Allan C. Malmberg

CHANCE *ET IT-LÆREMILJØ*

Del 1: Sandsynlighed i skolen

© INFA 2002

FORORD

CHANCE er et it-læremiljø til brug for arbejdet med sandsynlighed i en indledende undervisning. Ideerne der ligger bag CHANCE, er opstået gennem erfaringer fra arbejdet i INFA-projektet hvor udviklingen af fagområdet chancelære har haft en fremtrædende plads.

I forbindelse med denne erfaringsindsamling tages spørgsmål op vedrørende læreprocessen i matematik, specielt spørgsmål der har tilknytning til samspillet mellem it og læring.

I del 1 af CHANCE redegøres for de fagdidaktiske overvejelser der knytter sig til undervisningen i chancelære i skolen. En særlig omtale gives af sandsynlighedsbegrebet i skolen og den måde hvorpå det fremtræder i INFAs tekster og programmer. I tilknytning hertil beskrives de faglige ideer som har været afgørende for udformningen af it-læremiljøet CHANCE.

I del 2 gives først en generel beskrivelse af de ideer der ligger bag INFAs it-læremiljøer, de såkaldte LEARN-miljøer. Derefter omtales de fire faglige områder som udgør grundstammen i CHANCE. Omtalen gives i tilknytning til en beskrivelse af de it-værktøjer der indgår i læremiljøet. Del 2 afsluttes med forslag til hvordan der kan arbejdes i et it-læremiljø i en indledende undervisning.

Det er mit håb at CHANCE kan åbne elevers og læreres øjne for at der i chancelæren findes et fascinerende og spændende fagområde som lægger vægt på det anvendelsesorienterede og det eksperimenterende og som bygger på elevernes aktive medvirken. Et fagområde som giver faglige oplevelser og faglige udfordringer på ethvert niveau.

Allan C. Malmberg

CHANCE Del 1: Sandsynlighed i skolen

1. Et it - læremiljø til arbejdet med sandsynlighed 5

2. Et tilbageblik: Læseplanen 1976 9

3. Faghæfterne 1995 og 2001:
   At forholde sig til sandsynligheder 14

4 Sandsynlighedsbegrebet i skolen 16
4.1 Tre slags sandsynligheder 17
4.2 Det statistiske sandsynlighedsbegreb i centrum ...22
4.3 Et chancebegreb som bygger på databaser 25
4.4 Chancelærens grundregler 30
4.5 Hvordan fortolkes chancerne? 33
4.6 Chancetræer - det centrale hjælpemiddel 36
4.7 Chanceberegninger i træet 39
4.8 Samspillet mellem hændelser 43
4.9 TRÆ - et edb-program 45
4.10 Ny viden - ny database 49
4.11 HYPOTESE - „at lære af erfaringer“ 53

5. En læseplan 58

6. De faglige ideer bag CHANCE 63
6.1 Chancesituationer 63
6.2 Et intuitivt chancebegreb 64
6.3 Statistiske sandsynligheder 66
6.4 Ét fagområde: Chancelære 67
6.5 Eksperimenterende og udforskende 68
6.6 Indsigt gennem anvendelser 70
6.7 "Faglige tankevækkere" 73
6.8 Edb-spil i undervisningen 74
6.9 Anvendelsen af edb-modeller 75
6.10 Forberedelse til en egentlig faglig opbygning 78

7. Kan der bygges på elevernes chanceintuition? 80
7.1 Der er slet ingen database 82
7.2 Den forkerte database 85
7.3 Forkert anvendelse af databasen 89
7.4 Chancetræet bruges ikke 93

CHANCE Del 2: Læremiljøets opbygning

1. Læring i LEARN-miljøer.....100
2. Opbygning af LEARN-miljøer.....105
3. Læremiljøet CHANCE: Fire faglige områder 110
4. Indledende arbejde med data og sandsynligh. ... 113
5. Problemløsning i chancesituationer: LOD.....121
6. Problemløsning i chancesituationer: KUGLE123 .130
7. Problemløsning i chancesituationer: TRÆ.....156
8. Arbejde med databaser og chancer.....160
9. Chancer i spil 168
10. At arbejde i et it-læremiljø.....186

Litteratur.....196

1. Et it-læremiljø til arbejdet med sandsynlighed

INFA-projektet har siden begyndelsen af 1990'erne arbejdet med at udvikle området sandsynlighed i en indledende matematikundervisning. Det har været sigtet med dette arbejde at vise hvorledes der gennem tekster og it-hjælpemidler kan opbygges et læremiljø som i særlig grad er fremmende for elevernes beskæftigelse med emner fra dette område som vi har navngivet *chancelære*. De har i læremiljøet kunnet arbejde med eksperimenter udført på computer eller ved håndkraft. De har kunnet belyse problemstillinger ved hjælp af indsamlede data, de har opstillet antagelser og gæt, og de har efterprøvet dem gennem anvendelse af INFAs edb-programmer. En første rapport fra arbejdet foreligger i INFA-Småtryk 1994-2 [Litteratur afsnit E]

Der er for os ingen tvivl om at netop inddragelsen af hjælpemidler fra it har givet nye muligheder for etableringen af udfordrende og stimulerende læremiljøer til brug for elevernes beskæftigelse med emner fra chancelæren. Med computeren som hjælpemiddel er skabt en dynamik som tilfører læremiljøet helt nye kvaliteter og som giver læreprocessen en dimension af uvurderlig værdi. En nærmere argumentation for anvendelsen af it i undervisningen er givet i INFA-Småtryk 1999-2 [Litteratur afsnit E].

Læremiljøerne i undervisningen danner ramme for elevernes beskæftigelse med de faglige emner, og det er vigtigt at miljøerne giver optimale udfoldelsesmuligheder for eleverne.
Gennem aktiviteterne i læremiljøerne kan eleverne være med til at opbygge deres viden og kompetence med hensyn til chancelærens emner og dens anvendelse ved løsning af virkelighedens problemer.

Udformningen af undervisningens læremiljøer kan være helt afgørende for læringens vellykkede forløb, og det er en af

lærerens vigtige opgaver at opbygge så gode og fleksible læremiljøer som muligt.

Læremiljøerne i en it-støttet matematikundervisning bygges op omkring computeren. De centrale ingredienser i et læremiljø af denne art er edb-programmer, tekster, eksempler, opgaver og supplerende materialer, herunder materialer af multimedie-art. Hertil kommer praktiske indslag med indsamling af "rigtige data". Men dette er kun den ene side af sagen. Helt afgørende er også den aktivitet der finder sted i form af samarbejde elever imellem og de drøftelser og diskussioner der foregår mellem elever indbyrdes og mellem elever og lærer.

Gennem fortrolighed med arbejdet i sådanne miljøer vil eleverne føle sig trygge og sikre i læresituationer, og de vil kunne være med til at finde og videreudvikle deres egen personlige stil i arbejdet med læreprocesser. De får erfaring med at tackle nye og ukendte problemstillinger, og de kommer til at opleve deres eget potentiale i forhold til foreliggende læresituationer. Forhåbentlig vil de se "det at lære" som en udfordring de har lyst til at tage op.

De rette læremiljøer vil kunne styrke elevernes sans for faglig nysgerrighed, deres evner for omstilling og deres tillid til egne muligheder. Læremiljøerne skal give rammer for at eleverne kan udvikle deres kreativitet, ofte med udgangspunkt i det praktiske og aktivitetsorienterede. Men kreativitet er ikke nok i sig selv, den må udfolde sig i tilknytning til en faglighed. I fagområdet chancelære har vi en emnekreds til rådighed som i den rette udformning kan fænge hos alle elever, og hvor det er muligt at tilrettelægge en undervisning som kan give udfordringer til hver enkelt. Vi vil få en fattigere matematikundervisning i skolen hvis vi kun på overfladisk vis lader eleverne stifte bekendtskab med dette spændende, udfordrende og vedkommende fagområde.

Med veltilrettelagte læremiljøer til rådighed er det muligt at tilgodese forskelle i elevernes lærestil og forskelle i deres behov

for og evner for at fordybe i det faglige stof. Hvor vægten lægges på læring gennem aktiviteter og handlinger, vil de fleste elever kunne være med og gøre en indsats i arbejdet med de forelagte emner.

Man vil efter vor overbevisning kunne nå et godt stykke ad denne vej i matematikundervisningen gennem etablering af læremiljøer efter de retningslinier der er skitseret her. De mange faglige og pædagogiske virkemidler der spilles på i de it-støttede læremiljøer tilgodeser en stor del af de krav der kan stilles til en undervisning hvor den enkelte elev kan udfolde sig mest muligt og alligevel deltage i et arbejdsmæssigt fællesskab. I undervisningen vil man kunne arbejde med fælles faglige oplevelser i bestræbelsen på at nå et fælles mål, men man kan gennem de foreliggende hjælpemidler nå målene ad forskellige veje og med forskellig grad af detaljering og gåen-i-dybden undervejs.

Det må imidlertid ikke overses at arbejdet med læremiljøer i en it-støttet undervisning stiller store krav til læreren. Der forudsættes et fagligt overblik og en faglig indsigt i de behandlede emner som sætter læreren i stand til at foretage overvejelser og afvejninger i forbindelse med valg af faglige og pædagogiske metoder. Et spændende og givende læremiljø opbygges ikke ved at læreren blot tager et edb-program og den tilhørende elevtekst og lader eleverne arbejde med det. Der kræves en tilrettelæggelse som nøje vurderer de givne hjælpemidler og deres rolle i læringsmæssig sammenhæng og i relation til den givne elevgruppe.

Det er gennem veltilrettelagte læresituationer at skolens matematikundervisning har mulighed for at opfylde de gode intentioner fra undervisningsvejledningerne:

> *At fremme arbejdsformer som giver eleverne en eksperimenterende og udforskende holdning til de faglige emner, og som vænner dem til at undre sig, at være nysgerrige, at stille spørgsmål og at gå på opdagelse.*

Og det er gennem sådanne læremiljøer at matematik undervisningen kan nærme sig de mange gode hensigter der er udtrykt i princippet om undervisningsdifferentiering.

I del 2 af CHANCE er der nærmere redegjort for ideerne bag INFA-projektets it-læremiljøer.

INFAs udvikling af it-læremiljøer er inspireret af de arbejder der er nævnt i afsnit D i litteraturlisten.

2. Et tilbageblik: Læseplanen 1976

Fagområdet statistik og sandsynlighed kom ind i skolen i Danmark med læseplanerne fra 1976. Det fik imidlertid aldrig en tilfredsstillende udformning i undervisningen, og det har på ingen måde udviklet sig til at blive et inspirerende og udfordrende område hvor eleverne kan boltre sig med matematikken og dens anvendelser i en ny og spændende iscenesættelse.

Fagområdet har ved undervisningen i skolen været præget af en række mindre vellykkede beslutninger:

1. *Sandsynlighedsregningen* udspillede sig næsten udelukkende de med sandsynligheder af kombinatorisk art. Derved blev repertoiret af anvendelser begrænset til at bestå af de traditionelle trivielle eksempler på chanceeksperimenter: terningkast og kugleudtagelser.

Af misforstået skræk for at være umatematisk i undervisningen, har læreren ikke tilladt at sandsynligheder kunne opstå i forbindelse med datamaterialer, men kun gennem små velbeskrevne matematiske udfaldsrum, så man var sikker på at der ingen diskussion kunne finde sted om de tillagte talværdier. - Nogle lærere og lærebogsforfattere opbyggede den sædvanlige mængdebeskrivelse af sandsynlighedsregningen, med udfaldsrum, hændelser og sandsynlighedsfunktion, og nåede ikke herudover. Og eleverne oplevede det hele som en ny ørkesløs eksercits i symbolmanipulation.

2. *Kombinatorikken* blev af både lærebogsforfattere og lærere dyrket med vægten lagt på formler og ikke på metoder. Derved blev dette område lukket land for den største del af eleverne. Tilmed var lærerne også utrygge ved kombinatorikken hvor selv ganske banale problemstillinger kunne føre dem ud på usikker faglig grund.

Man kom derfor hurtigt til den erkendelse at kombinatorik er for svært, både for elever og lærere. Og de kombinatoriske overvejelser indskrænkedes herefter til at omfatte bestemmelsen af antallet af udvalg bestående af højst to elementer der kan udtages fra en mængde på ikke over en halv snes elementer. - Med sådanne bånd på det faglige program kommer man ikke ret langt i anvendelsessituationer.

3. *Den deskriptive statistik* blev dyrket som et selvstændigt fagområde. Der blev lagt mere vægt på terminologi end på indhold, og den statistiske beskrivelse af datamaterialer blev ofte løsrevet fra enhver form for dataindsamling og datafortolkning. Det vigtigste var opstilling af tabeller, beregning af mærketal og fremstilling af grafiske figurer, alt sammen kun til ære for fagområdet, ikke med henblik på nogen som helst anvendelsessituation.

En beskæftigelse med et forelagt talmateriale kunne derfor kulminere med beregning af en middelværdi eller en median uden at der blev foretaget nogen fortolkning af de beregnede værdier, eller uden at de på nogen måde blev anvendt i en meningsfyldt sammenhæng. Betydningsindholdet blev helt fjernet fra talbeskrivelserne. Undervisningen byggede på færdigleverede data, og ikke på den dynamik der ligger i at eleverne selv lever med i alle faser af processen med at indsamle data og bruge dem på meningsfyldt måde.

4. *Eksempelmaterialet* var for fattigt. Der var langt imellem de inciterende og fængende eksempler på anvendelse som dette fagområde er så rigt på. I undervisningen så man stort set aldrig en situation hvor der opstod et behov hos eleverne for at fastlægge en chance eller en risiko, ej heller så man eksempler på hvordan elevernes dataindsamling kunne bidrage til at besvare spørgsmål om ukendte sandsynligheder.

*

Intet under at fagområdet ikke blev til noget i skolens matematikundervisning. Under de givne betingelser måtte enhver form

for livskraft blive udslukt i løbet af kort tid. Og blot nogle få af folkeskolens afgangsprøver afslørede da også hvad der fra officielt hold forventedes af kundskaber inden for dette område: Ingen reel indsigt, men kendskab til en række faggloser som hos eleverne kunne sætte gang i reflekser der førte til beregning af talværdier, til opstilling af tabeller eller til tegning af diagrammer. Hos en usikker lærer vil en sådan holdning smitte af på den daglige undervisning.

> Det *anvendelsesorienterede*, det *eksperimenterende*, det *oplevelsesgivende*, det *udfordrende*, det *fascinerende* og det *sprudlende* blev dermed totalt fjernet fra undervisningen i sandsynlighedsregning og statistik i den autoriserede danske skoleudgave.

Undervisningen i skolen i sandsynlighedsregning og statistik har dermed aldrig nærmet sig noget der lignede beskrivelsen i undervisningsvejledningen fra 1976 (side 18):

> Undervisningen må centreres om de to emners fundamentale begreber og disses anvendelser i situationer, som vedrører elevernes hverdag. Undervisningen må give eleverne en begrebsmæssig baggrund for dagligdags udtryk som chance, risiko og tilfældighed, og den må give eleverne mulighed for at opnå fortrolighed med elementære eksperimenter af stokastisk art.

Og fortsat hed det i undervisningsvejledningen:

> De må endvidere kunne udlede relevante oplysninger fra givne statistiske beskrivelser, og de må kunne tage stilling til holdbarheden af konklusioner og fortolkninger, der foretages i tilknytning til sådanne beskrivelser.

Disse gode hensigter realiseres ikke gennem et arbejde med opgaver der handler om udtagelse af et par kugler fra en pose, ej heller gennem et talmateriale som giver en oversigt over hvordan det gik ved et halvt hundrede kast med en tegnestift.

De mange ord i den matematik-didaktiske debat om en eksperimenterende og udforskende arbejdsform er gået hen over dette fagområde uden at efterlade sig synlige spor. Netop her hvor eksperimenter kunne være et vigtigt element i elevernes arbejde med at skaffe sig ny erkendelse, oplevede man en undervisning der forfaldt til papirøvelser i kombinatorisk optælling og mængdelæresymbolik - og i drøftelse af om en forelagt hændelse nu var af typen *både-og* eller af typen *enten-eller*.

Sandsynlighedsregning og statistik blev i skoleudformningen drænet for alt liv. Et på denne måde braklagt fagområde vil der selvfølgelig ikke være nogen begrundelse for at bevare i den fremtidige matematikundervisning i skolen. Det kan i en sådan udgave ikke bidrage til at vække elevernes interesse for matematik og deres forståelse for fagets rolle i anvendelse og erkendelse.

Men det kunne have været ganske anderledes
Undervisningsforsøg fra indland og udland viser at fagområdet ikke behøver at leve en så kummerlig tilværelse i den almene uddannelse. Projekter med udfordrende og inspirerende temaarbejde har været udviklet adskillige steder, og resultaterne herfra fortæller at der er mulighed for at opbygge et område som både har elevernes interesse og som tilgodeser de mange gode intentioner der gennem de senere år er opstillet for undervisningen i sandsynlighedsregning og statistik.

Der er da også meldinger fra det ene land efter det andet om spændende projekter som har til formål at føre eleverne ind i sandsynlighedernes verden. Og flere og flere undervisningssystemer placerer fagområdet inden for det obligatoriske stof som alle elever i grunduddannelsen skal stifte bekendtskab med. Samtidig foregår der en rivende udvikling hvor fagfolk og pædagoger deltager i opbygningen af en didaktik for dette felt, og der holdes særskilte konferencer hvor emnet er sandsynlighed i skole og læreruddannelse. En orientering om igangværende initiativer inden for den elementære undervisning i chan-

celære kan findes i tidsskriftet *Teaching Statistics* (tysk udgave: *Stochastik in der Schule*). Samlede beskrivelser af undervisningen i sandsynlighed i skolen findes hos Anne Hawkins og S. Lajoie [Litteratur afsnit B].

På den hjemlige front har dette fagområde fra 1990 været centralt placeret i INFA-projektets virksomhed med udvikling af materialer til brug for undervisningen i folkeskolen og i lærernes efteruddannelse.

Et tidligere projekt ved Lærerhøjskolens Matematiske Institut etableredes i slutningen af 1970'erne med det formål at belyse mulighederne for at realisere de forslag der var givet i læseplanen fra 1976. Som et af resultaterne af de fagdidaktiske arbejder i dette projekt udvikledes et lærebogsmateriale "Hvad er Chancen", som udsendtes i to bind i 1980. [Litteratur afsnit B]. Lærebogen var skrevet med henblik på brug ved undervisningen i folkeskolens 8.-10. klasse, men der var tænkt på undervisning i en forsøgssituation hvor fagområdet sandsynlighedsregning og statistik tildeles et betydeligt timetal. Det lykkedes aldrig at få etableret en sådan undervisning, og lærematerialet blev i stedet anvendt ved uddannelsen og efteruddannelsen af folkeskolens lærere.

3. Faghæfterne: *At forholde sig til sandsynligheder*

I Faghæftet Matematik fra 1995 hedder det under det indledende afsnit om færdigheder og faglige redskaber:

„Gennem aktiviteter, der er relevante for eleverne, skal opnås færdighed i:

- *at anvende tal*
- *at beskrive størrelser ved måling og beregning*
- *at bruge grafiske fremstillinger*
- *at arbejde med geometri i plan og rum*
- *at benytte variable og formler*
- *at anvende og vurdere statistik*
- *at forholde sig til sandsynligheder.*

Disse færdigheder indgår i fagets anvendelser som beskrivelsesmiddel og som redskab ved forudsigelse af en udvikling eller en begivenhed.

Eleverne skal være i stand til at benytte datatekniske hjælpemidler og vurdere i hvilke sammenhænge, det er hensigtsmæssigt at anvende dem ved problemløsning.“

Eleverne skal altså gennem undervisningen komme frem til at opnå færdigheder i "at forholde sig til sandsynligheder".

Nu kan eleverne ikke bare forholde sig til noget uden at have et udgangspunkt at forholde sig fra. Uden en basis at støtte sig til bliver det rent dilettanteri at forholde sig til en sag. Man kan frygte at dette vil blive realiteten i skolens forhold til sandsynligheder, idet der ikke i de vejledende læseplaner i faghæftet gives opfordringer eller retningslinier til at opbygge et fagligt fundament hvorfra eleverne kan foretage deres overvejelser.

Ej heller er er der i undervisningsvejledningen nogen støtte at hente for den lærer der ønsker at få læseplansudvalgets bud på hvordan undervisningen i dette fagområde kan tilrettelægges. Sandsynlighedsregning har ikke fået et eneste lille afsnit blandt vejledningens mange sider. Undervejs i faghæftet kan man læse at vægten lægges på "det statistiske sandsynlighedsbegreb", men der gives ikke en nærmere forklaring på hvad denne betegnelse står for.

En sådan behandling af fagområdet er næppe et udtryk for en optimistisk tro i læseplansudvalget på at emnet sandsynlighedsregning er så ligetil at det ikke giver anledning til vanskeligheder for elever og lærere. For i så fald er udvalget ganske ude af trit med virkeligheden. Tværtimod burde dette fagområde have en fyldig og veleksemplificeret omtale i læseplan og undervisningsvejledning.

I foråret 2001 er faghæftet udsendt i en revideret udgave, "Klare Mål". Blandt de centrale kundskabs- og færdighedsområder finder vi en stort set uændret omtale af den rolle der er tiltænkt sandsynligheder: "Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at forholde sig til sandsynligheder."

I den tilhørende undervisningsvejledning, version 2001, leder man stadig forgæves efter forslag til hvordan målet "at forholde sig til sandsynligheder" kan fremmes i skolens undervisning. Vi må sætte vor lid til faghæftets 2010-udgave.

*

Der skal i det følgende gennem opbygningen af CHANCE i del 2 gives forslag til hvad der kunne være en faglig baggrund for på rimelig vis "at forholde sig til sandsynligheder“. Der vil i tilknytning hertil blive fremsat forslag til aktiviteter der er relevante for eleverne når de skal opnå færdighed i at omgås sandsynligheder med forståelse og indsigt.

4. Sandsynlighedsbegrebet i skolen

Det følgende forslag til arbejdet med sandsynligheder i den elementære undervisning bygger på erfaringer der er gjort i INFA-projektet hvor sandsynlighedsregningen er behandlet under kraftig inddragelse af it-hjælpemidler.

Forslagets sigte er imidlertid langt bredere end blot at gøre opmærksom på mulighederne i at anvende it i undervisningen. Der fremlægges ideer til en faglig begrebsopbygning som i udpræget grad gør brug af beskrivelser ved konkrete modeller i form af databaser. Gennem sådanne databaser vil elever og lærere få adgang til lethåndterlige hjælpemidler til arbejdet med sandsynlighedsregningens grundlæggende begreber, begreber som almindeligvis anses for svært tilgængelige for begyndere og som ofte giver anledning til vanskeligheder i en begynderundervisning.

Den følgende redegørelse vil vise hvorledes arbejdet med sandsynlighedsregning i INFA-projektet kan ses som en bestræbelse på at give nye ideer til skolens behandling af fagområdet, ideer som giver sig udslag i såvel den faglige opbygning som i de hjælpemidler der benyttes i elevernes beskæftigelse med begrebsdannelserne og deres anvendelse i problemløsning. - Redegørelsen beskæftiger sig med de overordnede linjer for arbejdet med chancelæren i INFA-projektet, og den går ikke i detaljer med hensyn til de enkelte faglige ideer der ligger til grund for projektet. Disse ideer vil blive nærmere beskrevet i del 2 i omtalen af de udviklede undervisningstemaer.

INFAs chancebegreb i stikord
Til indledning skal gives en kort karakteristik af det sandsynlighedsbegreb der er benyttet i INFAs chancelærearbejde og som vil blive nærmere beskrevet i den følgende fremlæggelse. Beskrivelsen gives i relation til fem aspekter.

Chancebegrebet. Hovedvægten er lagt på det statistiske chancebegreb, men der gøres også udstrakt brug af det kombinatoriske og det personlige chancebegreb.

Faglig opbygning. Der er tale om en faglig opbygning som hviler på et intuitivt grundlag, ikke på en teoretisk opbygning. Beskrivelser gives ved hjælp af dagligsprog, og der er ingen anvendelse af mængdelæreterminologi.

Tildeling af talværdier til chancer. Talværdier tildeles gennem anvendelse af datamaterialer fra eksperimenter, gennem overvejelser over symmetriforhold, gennem afvejning af væddemål og gennem opstilling af lodtrækningssituationer.

Fortolkning af chancer. Chancer fortolkes ved frekvenser i eksperimentserier, gennem opstilling af lodtrækninger og væddemål, samt som overvejelser over graden af overbevisning om hændelsers indtræffen.

Pædagogiske hjælpemidler. Databaser, chancetræer, æskemodeller, eksperimenter, simuleringer, spil. Omfattende inddragelse af it.

4.1 Tre slags sandsynligheder

I arbejdet med emner fra sandsynlighedsregning i CHANCE gøres brug af tre typer af chancebegreber: et kombinatorisk, et statistisk og et personligt. I hæftet fra Chance-læreserien „Chancetræ - Chancer gennem beregninger“, er der givet en indledende omtale af disse begreber og deres anvendelse ved beskrivelse af situationer fra virkeligheden. Hovedpunkterne fra denne fremlæggelse gengives her.

Hverdagens sandsynligheder

Den daglige tilværelse indeholder et væld af situationer hvor chancer og risikoer spiller en rolle. Når vi ikke med sikkerhed kan sige hvad der *vil* ske, men kun hvad der *kan* ske blandt en række muligheder, er vi i en chancesituation. Vi vil da være in-

teresseret i at skaffe os oplysninger om hvor stor en chance eller hvor stor en risiko der er for at en bestemt mulighed indtræffer.

Når vi taler om hverdagens chancesituationer, benytter vi udtryk som har med sandsynligheder at gøre. Taler vi om en hændelse vi gerne ser indtræffe, bruger vi ordet *chance*, og foreligger der en uønsket hændelse, taler vi om hændelsens *risiko*. Er vi lidt mere neutrale i vurderingen af hændelsen, kan vi benytte ordet *sandsynlighed*. Vi taler således om chancen for at få gevinst i et spil, om risikoen for at der sker en trafikulykke, og om sandsynligheden for at en lodtrækning i en skoleklasse resulterer i at en pige vælges.

I mange hverdagssituationer kan vi nøjes med at omtale en chance eller risiko som værende stor eller lille uden nærmere at angive den ved hjælp af talværdier. Vi kan fx sige at der er stor chance for en mild vinter, og at der er en lille risiko for farlige bivirkninger ved en vaccine. Ofte vil vi dog sætte tal på: „Der er mindst 90% chance", „Der er en risiko på højst 5%, osv.

At sætte tal på chancer

Hvordan fremkommer nu disse talvurderinger? I INFAs chancelæretekster gives eksempler på hvordan man kan sætte tal på chancer og risikoer. Der er gjort brug af to metoder. Hvis der foreligger et chanceeksperiment med ligevægtede udfald, opstiller vi en såkaldt *slumpmodel* for eksperimentet, og vi kan derefter beregne sandsynligheden ved at tælle gevinstudfald.

Hvis det er umuligt at opstille en sådan model, eller hvis det er for besværligt at foretage optællingerne, kan vi måske i stedet gennemføre en *statistisk undersøgelse*. På grundlag af data fra eksperimentserier kan vi derefter udtale os om de ukendte chancer eller risikoer.

Ved den første metode arbejder vi med det der kaldes *kombinatorisk sandsynlighed*. Der når vi frem til talværdier for sand-

synlighederne ved at tælle udfald og gevinstudfald. Måske må vi ved disse optællinger benytte særlige tælle-metoder, og sådanne metoder hører hjemme i det fagområde der kaldes kombinatorik. Deraf betegnelsen „kombinatorisk sandsynlighed".

Ved den anden metode når vi frem til talværdier for sandsynlighederne ved hjælp af statistiske undersøgelser i tilknytning til udførte eksperimenter som kan være „rigtige eksperimenter" eller simulerede eksperimenter. De sandsynligheder der fastlægges på denne måde, vil vi kalde *statistiske sandsynligheder*.

I hverdagen forekommer kombinatoriske sandsynligheder stort set kun i helt enkle stikprøveudtagelser og i forbindelse med spil. I spil er der næsten altid tale om konstruerede situationer som er lagt til rette på en sådan måde at de kan beskrives ved hjælp af udfaldsrum med ligevægtede udfald. Det gælder derimod ikke for virkelighedens mere alvorlige chancesituationer, her er det i almindelighed ikke os selv der står for iscenesættelsen.

I hverdagens chancesituationer er det især statistiske sandsynligheder der gøres brug af. Data indsamles og en statistik udarbejdes. Med udgangspunkt i denne statistik fremsættes derefter udtalelser om chancer og risikoer. Vi laver altså statistik over fortiden, og benytter den ved forudsigelser af fremtiden. Statistik bygger på det kendte og anvendes på det ukendte. En statistik over dødsfald i Danmark kan således sætte os i stand til at give tal for en danskers chancer for at opnå en bestemt levealder.

Chancer ud fra ekspertvurderinger

Det er imidlertid ikke kun statistiske sandsynligheder man ser anvendt i hverdagens chancesituationer. Undertiden fremsættes der også udtalelser om chancer som ikke støtter sig på nogen statistik.

Det kan skyldes at det er for vanskeligt eller for bekosteligt at fremskaffe en statistik, eller at det måske slet ikke er muligt at opstille en statistik. I sådanne situationer når man somme tider frem til et tal for den ukendte sandsynlighed ved at lade en ekspert vurdere alle foreliggende oplysninger og på grundlag heraf fremsætte sin formodning om den givne situation. Sandsynligheder af denne art vil vi kalde *personlige sandsynligheder*.

Sandsynligheder som kommer til veje gennem sådanne ekspertvurderinger kan være stærkt afhængige af hvem den pågældende ekspert er, og der kan i øvrigt være problemer med at afgøre hvem der kan betragtes som uvildig ekspert.

Hverdagens chancer og risikoer kan altså optræde som tre forskellige typer af sandsynligheder:

1. *Kombinatoriske sandsynligheder* gennem optællinger
2. *Statistiske sandsynligheder* gennem datamaterialer
3. *Personlige sandsynligheder* fastlagt gennem ekspertvurderinger.

De kombinatoriske sandsynligheder kan umiddelbart se mest solide ud. De kan jo findes ved optællinger, og alle der udfører disse optællinger (og tæller rigtigt) vil komme til det samme resultat.

Ved statistiske sandsynligheder er billedet ikke så klart. Her kan benyttes forskellige datamaterialer, og de vil sjældent føre til helt de samme sandsynligheder. Men hvis materialerne bygger på et omfattende antal tilfælde, vil de dog i almindelighed give resultater som ikke afviger meget fra hinanden.

Helt anderledes stiller sagen sig ved personlige sandsynligheder. De overvejelser der ligger til grund for de personlige sandsynligheder, lader sig jo vanskeligt kontrollere. Man vil dog un-

dertiden kunne bedømme en ekspert på de resultater han opnår over et større antal vurderinger.

Det er sjældent der foreligger helt rene anvendelser af statistiske sandsynligheder og personlige sandsynligheder, ofte vil disse to typer blive benyttet side om side. I nogle situationer vil anvendelsen af statistiske sandsynligheder have overvægt, i andre er det brugen af personlige sandsynligheder der er dominerende.

For nærmere beskrivelser af sandsynlighedsbegrebet henvises til de fremstillinger der er anført i afsnit A i litteraturlisten. - En fremstilling der opbygger den elementære sandsynlighedsregning på personlige sandsynligheder findes hos A. O'Hagan [Litteratur afsnit B].

Et nyt fagområde i skolen

I den almene uddannelse kom sandsynlighedsregning ind som et fagområde i matematikundervisningen fra omkring 1950. Nogle lande var tidligt med og kunne allerede i 50'erne fremvise forsøgsprojekter der havde afprøvet en række emner fra fagområdet. De fleste andre lande er fulgt med i årene derefter, Danmark indførte emnekredsen i folkeskolen med skoleloven af 1976. En omtale af chancelære-undervisningen i en række lande findes i rapporten af V. Barnett [Litteratur afsnit B]

Det store flertal af tekster der har været benyttet i den elementære undervisning rundt omkring i verden, har bygget på det kombinatoriske sandsynlighedsbegreb. Der har kun været få eksempler på faglige forløb der tager udgangspunkt i det statistiske og det personlige sandsynlighedsbegreb.

Det har været et sigte med INFA-projektets arbejde med sandsynlighedsregning at vise at de tre omtalte sandsynlighedsbegreber alle har relevans i pædagogisk henseende. De vil alle tre kunne indgå i den elementære undervisning, og de vil på hver sin vis kunne bidrage til at sætte facetter på elevernes

forståelse af hvad sandsynligheder er og hvad sandsynligheder kan benyttes til.

At sandsynlighedsregning i folkeskolen hidtil næsten udelukkende har været eksemplificeret gennem anvendelser af den kombinatoriske sandsynlighed, er som allerede nævnt en fatal svaghed i undervisningen. Netop de to andre typer af sandsynligheder kan bidrage til at belyse de alsidige anvendelsesmuligheder der er for sandsynlighedsregning og statistik i et moderne samfund. Den der kun stifter bekendtskab med den kombinatoriske sandsynlighed, må stå ganske uforstående over for de mange påstande om den centrale rolle faget spiller som redskab for problemløsning og erkendelse inden for næsten ethvert teknisk og videnskabeligt område.

4.2 Det statistiske sandsynlighedsbegreb i centrum

INFAs undervisningsmaterialer foreligger i såkaldte EMMA-temaer, hvor EMMA står for "elektroniske materialer til matematik". I EMMA-temaet Taldata 1-3 fastlægges chancer på grundlag af statistiske materialer, datamaterialer. Med denne placering af de statistiske undersøgelser er det hensigten at sætte det statistiske sandsynlighedsbegreb i forgrunden i INFAs arbejde med fagområdet, og at udvikle elevernes intuitive chanceforståelse og deres fortrolighed med chanceovervejelser i forhold til denne version af sandsynlighedsbegrebet.

Udgangspunktet vil derfor være et datamateriale som er opstået i tilknytning til et chanceeksperiment. Fra eksperimentet er indsamlet data som beskriver hvilke resultater der blev opnået i eksperimentet. Et eksempel på et sådant materiale findes i det indledende afsnit i EMMA-temaet hvor det undersøges hvor mange kast der skal foretages med to terninger før der opnås et kast hvor de to terninger viser det samme øjental.

Antal kast	Antal eksperimenter	Kumuleret antal
1	18	18
2	13	31
3	10	41
4	9	50
5	8	58
6	6	64
7	7	71
8	5	76
9	3	79
10	3	82
11	3	85
12	3	88
13	1	89
15	3	92
17	2	94
21	1	95
22	3	98
24	1	99
26	1	100

Som det ses af denne oversigt, blev der i 18 af de 100 eksperimenter opnået to ens allerede i første kast. Hvis vi benytter vore 100 eksperimenter som den database hvorfra vi henter viden om vanskeligheden ved at opnå to ens, vil vi altså kunne sige at der er 18% chance for at opnå to ens i første kast. Datamaterialet viser også at der er 31% chance for at opnå to ens i løbet af de første to kast. Og der er 58% chance for at opnå to ens i løbet af de første fem kast. - Vi ser endvidere at det højeste antal kast der skulle bruges for at få to ens, var 26.

Et arbejdsredskab

Nu er det ikke tanken at eleverne skal opfatte disse talangivelser som sandheden om de ukendte chancer. De skal netop tage dem med forbehold, og vurdere dem i relation til det materiale der bygges på. Fra eksperimenter i klassen vil de vide at den næste serie af forsøg kan give et afvigende resultat. Men det er netop sigtet med fremstillingen i EMMA-temaerne at vænne dem til at omgås datamaterialer på en sådan måde at de ser at der af dem kan hentes oplysninger, men at disse oplysninger ikke behøver at være det endelige ord i sagen. Nye data kan give nye oplysninger som bevirker at den foreliggende viden må justeres.

Vi vil imidlertid sætte tal på chancerne på baggrund af de foreliggende data. Vel vidende at disse chancer modificeres når nye data kommer til, og vel vidende at personer der indsamler hvert deres datasæt vil komme frem til resultater der ikke stemmer ganske overens. Men det er en del af den forståelse af chancer, vi gerne vil bibringe eleverne. De skal vænne sig til at opfatte et chanceudsagn som noget der kan være kommet til veje på grundlag af et datasæt. Til billedet hører da naturligt at de fremlagte chancetal kun kan være foreløbige vurderinger, de kan ikke tages som eksakte værdier der er fastlagt én gang for alle. Men vi vil bruge disse tal til at belyse den givne chancesituation, og indtil der foreligger nye data benytter vi dem, vi har.

Som konsekvens heraf må vi gå med til at det vil være korrekt at eleverne i tilknytning til eksemplet ovenfor konkluderer (foreløbigt) at chancen er lille for at der skal benyttes mere end 25 kast for at få to ens. Deres datamateriale viser jo at de i alle 100 forsøg kunne klare sig med højst 26 kast.

Den lærer der føler sig utryg herved, kan opfatte de fundne chancetal som et bud på de ukendte bagved liggende teoretiske sandsynligheder. Han kan altså skelne mellem *chancer* og *sandsynligheder*, og lade chancer være de praktiske arbejdsredskaber vi benytter i vore bestræbelser for at opnå ind-

sigt i de teoretiske sandsynligheders verden. Chancer bestemmer vi altså på grundlag af datamaterialer, og disse chancer benytter vi som en praktisk håndterlig udgave af de bagved liggende teoretiske sandsynligheder hvis eksakte værdier vi i øvrigt aldrig vil kunne bestemme.

På denne måde vil vi kunne arbejde med et *konkretiseret chancebegreb*, et begreb der er baseret på et foreliggende datamateriale som eleverne vil kunne gribe tilbage til når behovet for anskueliggørelse melder sig.

Dette vil vi illustrere i det følgende, hvor der opstilles regler for regning med chancer. Disse regler udledes let med henvisning til konkrete datasæt hvor enhver talmæssig sammenhæng kan kontrolleres ved optællinger og beregninger. Et arbejde med sådanne "konkrete“ regler kan støtte elevernes forståelse når de på et senere tidspunkt i deres uddannelse stifter bekendtskab med sandsynligheder som udfolder sig i tilknytning til en formaliseret opbygning med udfaldsrum, hændelsessystem, sandsynlighedsfunktion og aksiomer.

Man kan sige at der gennem databasen opbygges en konkret model for den forelagte chancesituation. Eleverne vil fra andet arbejde med matematik være bekendt med at modeller ikke indeholder hele sandheden, men at de kan benyttes på fornuftig vis til beskrivelse og problemløsning som vedrører den betragtede situation. Med nye informationer vil der kunne opbygges modeller som svarer bedre til virkeligheden, og der kan gennem dem gives nye og bedre svar på de stillede spørgsmål.

4.3 Et chancebegreb som bygger på databaser

Vi vil altså i den elementære undervisning knytte an til et sandsynlighedsbegreb som i udstrakt grad bygger på anskueliggørelse gennem en tilhørende database. I databasen indlægger vi de data der udtrykker vor aktuelle viden om den

forelagte chancesituation. I eksemplet ovenfor indeholder databasen det statistiske materiale fra de 100 eksperimenter.

Vi kan forestille os at databasen indeholder 100 sedler, én for hvert eksperiment. På hver seddel står anført hvor mange kast der blev benyttet i det pågældende eksperiment for at opnå to ens. Databasen vil derfor i dette tilfælde indeholde 18 sedler hvorpå der står 1, der vil være 13 sedler hvorpå der står 2, og der vil fx være 2 sedler hvorpå der står 17.

Når vi skal udtale os om chancerne for at opnå to ens i et bestemt antal kast, benytter vi databasen. Vi tænker os en seddel udtaget fra databasen ved lodtrækning. Chancen for at få to ens i første kast sætter vi til 18%, der er jo 18 af de 100 sedler i databasen som bærer tallet 1. Og når vi udtrækker en seddel fra databasen, er der 18 tilfælde ud af 100 hvor den viser tallet 1. På tilsvarende måde kan vi af databasens sammensætning se at der er 58% chance for at vi kan få to ens i løbet af de første 5 kast. Blandt databasens 100 sedler er der jo 58 sedler som viser et af tallene 1, 2, 3, 4, 5.

Virkelige eller tænkte databaser?

I omgangen med statistiske sandsynligheder, altså sandsynligheder som beskrives i tilknytning til et datamateriale, er der ingen vanskeligheder med at etablere den nødvendige database. Den består simpelthen af de data der foreligger. Det kan som i eksemplet ovenfor være resultaterne fra en eksperimentserie, eller det kan være data i en officiel trafikstatistik eller sygdomsstatistik.

Lidt anderledes stiller det sig når der er forelagt en chancesituation hvor der optræder en sandsynlighed der ikke kan karakteriseres som en statistisk sandsynlighed.

Lad os se på et terningkast. Der er forelagt en terning, men der vides intet om hvilke kasteresultater der er opnået med den, måske den endnu aldrig har været kastet. Vi véd intet om terningen, men så længe vi ikke har grund til at tro andet, vil vi

gå ud fra at det er en sædvanlig symmetrisk opbygget terning. Vi vil derfor antage at i en ideel kasteserie vil de enkelte øjental forekomme lige tit. I databasen indlægger vi data som afspejler denne antagelse: Vi indlægger samme antal sedler med tallet 1, tallet 2, ..., tallet 6. Til eksempel kan vi i databasen nøjes med at indlægge seks sedler i alt, én for hvert af de seks øjental. Men vi kan også vælge at indlægge fx 10 sedler for hvert øjental hvis vi af pædagogiske grunde eller af andre grunde skulle foretrække det. Det afgørende er blot at der er lige mange sedler af hver slags.

Herefter kan vi afgøre alle spørgsmål om chancer i det forelagte chanceeksperiment ved hjælp af den opstillede database. Hver gang vi udtrækker en seddel fra databasen, noterer vi os hvad der var anført på sedlen, derefter lægger vi sedlen tilbage før næste udtrækning finder sted.

Ved situationer med kombinatoriske sandsynligheder etablerer vi altså en database som afspejler de ligevægtede udfald der indgår i chancesituationen. Der er i dette tilfælde tale om *en tænkt database*, den er ikke bygget op af data fra udførte eksperimenter.

I situationer med personlige sandsynligheder kan vi på samme måde etablere en database af tænkte data. Hvis en ekspert vurderer en chance til at være 15%, kan vi etablere en database der indeholder 100 sedler hvoraf de 15 viser tallet 1, og de øvrige viser tallet 0. Ved udtrækning af en seddel fra databasen er der 15% chance for at sedlen viser tallet 1, svarende til ekspertens vurdering af den forelagte chance.

Hvis eksperten skulle sætte chancer på en række muligheder i en chancesituation, kunne han fx komme til den vurdering at mulighed 1 havde en chance på 10%, mulighed 2 en chance på 50%, mulighed 3 og mulighed 4 hver en chance på 20%. Også her kunne der nu let etableres en database som gengiver ekspertens vurdering af de fire chancer.

Vi kan på denne måde opstille en database som afspejler den forelagte chancesituation. Ved situationer med statistiske sandsynligheder indeholder databasen de aktuelle observationer, ved situationer med kombinatoriske eller personlige sandsynligheder indeholder databasen tænkte data som er opstillet på grundlag af de forelagte oplysninger om den bagved liggende chancesituation.

Der er intet i vejen for at vi også ved de statistiske sandsynligheder opstiller en database med tænkte data. Vi kan da blot sige at de aktuelle data har givet os ideen til indholdet af databasen, men vi har ikke følt os bundet til i alle detaljer at kopiere de data der fremkom af det udførte eksperiment. Ved opbygningen af databasen står vi altså frit, men ønsker vi at vore beskæftigelser med chancer skal kunne anvendes til løsning af praktiske problemer, må vi selvfølgelig tage hensyn til hvad virkeligheden giver os af oplysninger i form af data fra udførte eksperimenter.

En opbygning af den elementære sandsynlighedsregning på databaser findes hos en det 20. århundredes store statistikere, J. Neyman [Litteratur afsnit B].

Belysning af hverdagens chancer

I hverdagens chancesituationer kan vi opstille en database som giver et billede af forelagte chanceforhold. Vi sørger blot for at databasen indeholder det rigtige antal sedler af hver type. At en sandsynlighed er på 5%, kan vi fortolke således: Det svarer til chancen for at udtrække en seddel med et 1-tal fra en database der indeholder 5 sedler med 1-tal og 95 sedler uden 1-tal.

En sådan database-model vil altid kunne opstille når hverdagens sandsynligheder skal fortolkes og forstås.

Når vi har etableret en database for en forelagt chancesituation, siger vi at der er opstillet *en chancemodel* for situationen. I

denne chancemodel kan vi udføre beregninger og foretage overvejelser der vedrører chancer og risikoer.
Chancemodellen er vort værktøj i det videre arbejde med chancesituationen. Hvis vi undervejs i arbejdet får nye oplysninger, kan vi justere databasen så vi får en chancemodel som giver et bedre billede af situationen. Ny viden kan på denne måde føre til chancemodeller som giver et bedre og bedre billede af den forelagte chancesituation.

Lærerens valg

I INFAs chancetekster har vi ikke fremhævet brugen af databaser. Vi finder at anvendelsen af den angivne fremgangsmåde til begrebsudvikling ved hjælp af databaser må være overladt til lærerens afgørelse. Hvor det findes pædagogisk ønskeligt, kan undervisningen inddrage overvejelser som udfolder sig i tilknytning til databaser der afspejler de forelagte chancesituationer. I EMMA-temaet "Chancer gennem optællinger" som giver en indførelse i den kombinatoriske sandsynlighed, er derfor benyttet den sædvanlige beskrivelse med enkle overskuelige udfaldsrum. Det er her lærerens afgørelse om en supplerende beskrivelse ved hjælp af databaser vil være til støtte for elevernes indsigt i chancebegrebet.

I praksis er der ikke langt fra den kombinatoriske sandsynligheds udfaldsrum med lutter ligevægtede udfald til databasen med en seddel svarende til hvert af de resultater der forekommer i en serie af udførelser af det betragtede chanceeksperiment. Måske databasen med dens håndterlige sedler vil forekomme nogle elever lidt lettere tilgængelig end det mere abstrakte udfaldsrum, som måske endda kan være fremlagt i mængdelærens sprog.

I skolens sandsynlighedsregning kan man ikke blot negligere fastlæggelsen af databasen (eller udfaldsrummet), og sige at dette spørgsmål ikke er værd at spilde tid på. Selv i ganske enkle chanceeksperimenter kan der forekomme afvigende opfattelser af den forelagt situation, opfattelser som kan føre til

forskellige databaser og til forskellige fastsættelser af chancer for forelagte hændelser. I et senere afsnit kommer vi ind på brugen af databaser i arbejdet med sandsynligheder.

4.4 Chancelærens grundregler

Vi kan nu indføre den terminologi som vi finder nyttig for vor beskæftigelse med chancer og deres beregning. En hændelse kan vi karakterisere ved en henvisning til data der findes i databasen. Hændelsen „Der skal bruges højst 5 kast“ refererer til de 58 sedler vi omtalte før. Vi kan selvfølgelig godt her vælge at gøre brug af mængdelærens begrebsapparat, og definere hændelser ved henvisning til *delmængder af databasen*, men der er næppe i den elementære undervisning vundet noget ved en beskrivelse i et sådant sprog. Hvis vi finder det mere naturligt, kan vi også betragte hændelser som *udsagn* der karakteriserer et antal af sedlerne i databasen. Uden at dette behøver at føre os ind i logikkens begrebsapparat til behandling af udsagn. Ideen er at anvende dagligsproget så længe det slår til, og ikke at opbygge situationer hvor eleven kan kritiseres for ikke at benytte de autoriserede vendinger: *Vi vil være tilfreds med dagligsproget når blot meningen fremgår klart af de givne meddelelser.*

Det vil være intuitivt oplagt hvad der i tilknytning til databasen forstås ved *en sikker hændelse* og *en umulig hændelse*. "Der skal højst bruges 26 kast“ er en sikker hændelse i den opstillede database, nemlig en hændelse med en chance på 100%. "Der skal bruges over 30 kast“ er en umulig hændelse. Det kan ikke - i den foreliggende database - forekomme at der benyttes over 30 kast for at opnå to ens. Hændelsen har en chance på 0%. *Begrebet "Sikker hændelse“ og "Umulig hændelse“ har altså mening i tilknytning til den forelagte database*. En ny database som opstilles på grundlag af andre eksperimenter, kan have andre sikre og andre umulige hændelser.

Begrebet "*Modsat hændelse“* eller "*Komplementær hændelse“* kan også illustreres i tilknytning til databasen. Hændelsen "Der

skal bruges op til 5 kast“ har som modsat hændelse "Der skal bruges mere end 5 kast“. Det er klart at en hændelse og dens modsatte hændelse tilsammen må have en chance på 100%. Kendes chancen for én af de to hændelser, kendes altså begge de to hændelsers chancer.

Videre kan begrebet "*Adskilte hændelser“* illustreres. Hændelserne "Der skal bruges op til 5 kast“ og "Der skal bruges over 20 kast“ er adskilte hændelser. Der er ingen seddel i databasen som henviser til begge disse hændelser. Det er intuitivt klart, gennem henvisning til optælling af sedler i databasen, at den chance der tillægges den samlede hændelse, "Sumhændelsen“ af de to forelagte hændelser, fås som summen af chancerne for de to hændelser. I det forelagte tilfælde vil hændelsen "Der skal bruges op til 5 kast eller der skal bruges over 20 kast“ altså have en chance på 64%, nemlig 58% + 6%.

Hvis vi ønsker det, kan vi nu formulere vore erfaringer i almene regler for chancer. Lad os benytte de gængse betegnelser hvor P(H) betegner chancen for hændelsen H (underforstået: Hændelse i tilknytning til den givne database). For den modsatte hændelse til H benytter vi betegnelsen –H og for sumhændelsen til hændelserne A og B benytter vi betegnelsen "A+B“.

Grundlaget for regning med chancer

Enhver hændelse H udpeger et antal sedler, #(H), fra den foreliggende database. Ved chancen P(H) (i relation til den foreliggende database) forstår vi da andelen af sedler i databasen der udpeges af hændelsen, dvs. #(H)/n, hvor n er det samlede antal sedler i databasen.

Vi har da følgende tre grundlæggende regler for arbejdet med chancer:

1. For enhver hændelse H gælder:

$$0 \leq P(H) \leq 1$$

2. For en hændelse H og dens modsatte hændelse –H gælder:

$$P(H) + P(-H) = 1$$

3. For to adskilte hændelser A og B gælder:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

I undervisningen er disse regler ikke afgørende milepæle, og der er ingen grund til at gøre noget særligt ud af dem. Deres gyldighed fremgår direkte af beregningen af chancer i tilknytning til de opstillede databaser. Man kan med god ret sige at de tre regler hører til den intuitive forforståelse af chancebegrebet som enhver vil have.

De er imidlertid grundregler i den forstand at de kan benyttes til at karakterisere det faglige område der hedder elementær sandsynlighedsregning. I en aksiomatisk opbygning vil disse tre regler (eller nogle tilsvarende) blive sat i spidsen som givne grundregler for omgangen med sandsynligheder. Fra disse regler udledes derefter andre regler som kan benyttes ved beregningen af sandsynligheder. Grundreglerne fastlægger altså en skabelon for sandsynlighedsregningen: Hvis grundreglerne gælder, så gælder alle de øvrige regler også.

Når eleverne derfor senere møder fagområdet i en mere abstrakt opbygning, vil de der kunne genkende de intuitive regler fra skolens chancelære. Erfaringer fra arbejdet med de intuitive regler vil da kunne overføres til det nye regi.

Et nøglebegreb: tilfældighed
Det kan være naturligt at give begrebet "tilfældighed“ en forankring i tilknytning til det benyttede chancebegreb: At et resultat er tilfældigt, vil i denne sammenhæng betyde at det er frembragt gennem udtrækning fra en forelagt database.

Vi tænker os at vi kender databasens indhold, og fra denne database udtrækkes nu ved lodtrækning en seddel som henviser til et eksperimentresultat. Det opnåede resultat vil vi kalde "et tilfældigt resultat ved det forelagte eksperiment“.

Et tilfældigt tal er derfor ikke et tal der "hentes ud af den blå luft“, det er et tal som forekommer ved udtrækning fra en database hvis indhold vi kender. Vi kan ikke på forhånd vide hvilket tal der udtrækkes, men vi har kendskab til hvilke tal der vil kunne udtrækkes.

Det må bemærkes at denne sprogbrug ikke stemmer overens med hverdagens anvendelse af betegnelsen "tilfældig“. Men det er jo ikke en enestående situation i matematikundervisningen. Her vil det ofte forekomme at der i fagsproget gøres brug af betegnelser som allerede har deres hævdvundne anvendelse i hverdagens sprog.

4.5 Hvordan fortolkes chancerne?
Chancebegrebet er i vor fremstilling knyttet til konkrete databaser. At chancen for en hændelse H er sat til 40%, betyder at i den tilhørende database vil 40% af sedlerne være mærket med H. Det er vor overbevisning at anvendelse af denne begrebsmæssige model som bygger på en database-beskrivelse, giver begynderen en god indsigt i chanceforholdene i den forelagte chancesituation. Ved vurderingen af hændelsens mulighed for forekomst kan eleven forestille sig en udtrækning fra databasen. Hændelsens forekomst er koblet nøje sammen med udtrækningen af en seddel der er mærket med H.

I undervisningen vil vi gå ind for at der til stadighed benyttes sådanne databasebeskrivelser i forbindelse med fortolkningen af forelagte chancer.

Det vil endvidere være nødvendigt at give eleverne et erfaringsgrundlag fra eksperimenter. I it-læremiljøet CHANCE er der derfor gjort meget ud af at lade eleverne få erfaringer fra egne eksperimenter, såvel konkrete eksperimenter som computersimulerede. Endvidere fremlægges data fra eksperimenter udført af andre. Alle disse eksperimentdata skal give eleverne indblik i "*de lange seriers lov*": Hvis en hændelse har en chance på 40% for at forekomme, så vil den i en lang serie af eksperimenter kunne forventes at indtræffe i ca. 40% af eksperimenterne.

Vi lægger altså op til at eleverne bliver fortrolige med en oversættelse af chancer til en forekomst "i det lange løb". Også selv om der ikke foreligger noget langt løb, vil de ofte kunne forestille sig den forelagte chancesituation gentaget uændret et stort antal gange.

Arbejdet med eksperimenter har imidlertid også det formål at gøre eleverne fortrolige med de variationer der kan observeres fra eksperiment til eksperiment. Det er vigtigt at eleverne er opmærksomme på stabiliteten i lange eksperimentforløb, men det er lige så vigtigt at de er bekendt med de variationer der kan forekomme når der foretages sammenligninger af datasæt af beskedent omfang.

Den rigtige pris

Et hjælpemiddel i omgangen med chancer er at sætte chancerne i forbindelse med spil og gevinster, måske endda i form af hypotetiske væddemål.

Lad os antage at vi har en hændelse H med en chance på 40%. Vi forestiller os at det forelagt eksperiment udføres 100 gange. Vi spiller på hændelsen H: Hver gang H forekommer,

modtager vi en gevinst på 1 kr. - Men spillet er ikke gratis, vi skal betale en pris for at være med. Hvad er en rimelig pris?

Vi ser på 100 spil. Lad os tænke os at de forløber ideelt efter den givne chancevurdering, således at H indtræffer i 40% af spillene. H indtræffer da 40 gange, og den samlede gevinst vil være 40 kr.

Hvis spillet skal være fair for både spiller og spillebank må prisen derfor være 40 øre pr. spil. I så fald balancerer regnskabet jo for begge parter.

Når vi spiller på en hændelse der har chancen 40% for at forekomme, kan vi altså gå med til en pris pr. spil der er 40% af gevinsten. Denne pris vil vi benævne "*den rigtige pris*".

Overvejelser over den rigtige pris i spillet om en hændelse vil ofte kunne tilføre elevernes chanceforståelse en ny facet. Ved chancevurderinger kan fastsættelsen af spillets rigtige pris, og dermed af hændelsens chance, give anledning til mange vurderinger. Især hvis det forlanges at eleven efter at have fastsat prisen skal være ligeglad med om han i spillet får tildelt spillerens rolle eller spillebankens.

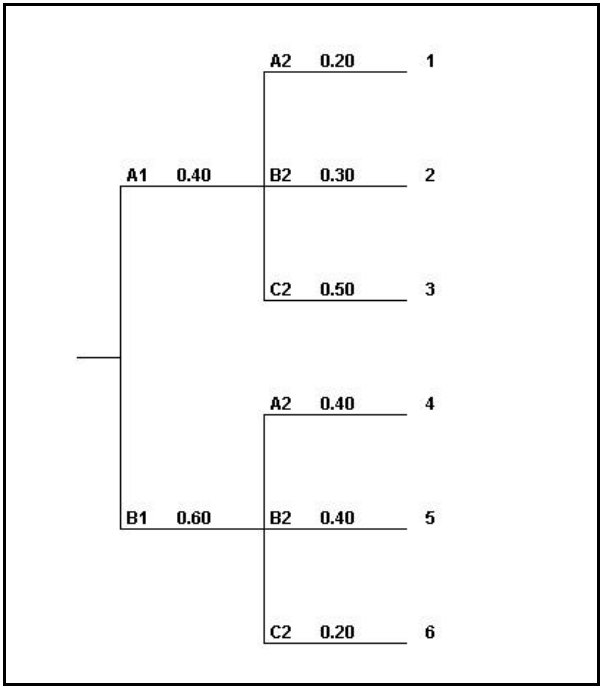
Hvor solidt er det intuitive chancebegreb?

Når chancebegrebet knyttes så nært til databaser og til udtrækning fra sådanne baser, er det selvfølgelig afgørende at eleverne har et intuitivt chancebegreb som sætter dem i stand til på fornuftig vis at omgås med situationer der vedrører overvejelser over chancer ved tilfældig udtagelse fra databaser.
Det har været vort udgangspunkt i INFA-projektet at en beskrivelse af chancer i tilknytning til sådanne udtagelser fra overskuelige datasæt ville have gode muligheder for at være grundlaget i en pædagogisk opbygning af chancelærens fagområde. Det var endvidere vor overbevisning at eleverne allerede i en tidlig alder ville være i besiddelse af et chancebegreb som der med nogen sikkerhed kan bygges på i tilknytning til udtagelse fra sådanne databaser.

For at efterprøve disse antagelser nærmere blev der i INFA-regi gennemført en undersøgelse til belysning af børns chancebegreb. Denne undersøgelse og dens resultater er nærmere beskrevet i publikationen "Børns chanceintuition belyst gennem matematikspil" [Litteratur afsnit E]. Nogle resultater omtales nærmere i del 2 i tilknytning til omtalen af chancespillet Statspil.

4.6 Chancetræer - det centrale hjælpemiddel

Chanceeksperimenter vil ofte være sammensatte af et antal deleksperimenter: Først udføres deleksperiment 1, derefter deleksperiment 2, osv. Til illustration af en sådan sammensat proces indføres chancetræet.



Træet er et billede af et chanceeksperiment som er sammensat af to deleksperimenter: I første deleksperiment kan forekomme to hændelser A1 og B1, i anden deleksperiment kan forekomme tre hændelser A2, B2 og C2. Træet viser de 6 muligheder der kan foreligge, svarende til træets 6 grene.

Således viser den øverste gren i træet det eksperimentforløb der svarer til at hændelse A1 forekommer i første deleksperiment og hændelse A2 forekommer i andet deleksperiment. De 6 grene svarer til 6 adskilte hændelser ved eksperimentet. Ved hver udførelse af eksperimentet vil forekomme netop én af de 6 hændelser, svarende til én bestemt af de 6 grene i træet.

På træets grenstykker er angivet talværdier: De henviser til den database der hører til chanceeksperimentet og til træet.

Lad os tænke os at vi har en database med 100 sedler. På første forgrening i træet finder vi tallene 0.40 og 0.60. Tallet 0.40 på grenstykket A1 angiver at af databasens 100 sedler er der 40 hvorpå der står A1. På de øvrige 60 sedler står der B1.

Reducerede databaser

Vi går nu videre i træet. Vi går ud ad den gren hvorpå der står A1. Ved forgreningspunktet kommer vi til tre grenstykker hvorpå der står A2, B2 og C2. På disse tre grenstykker finder vi tallene 0.20, 0.30 og 0.50. De tre tal henviser ikke til forholdene i den oprindelige database med de 100 sedler, men til *den reducerede database* der består af de 40 sedler hvorpå der står A1. I denne reducerede database fortæller de tre tal os at der står A2 på 20% af sedlerne, B2 på 30% af sedlerne og C2 på de øvrige 50 % af sedlerne. Af de 40 sedler i den reducerede database er der derfor 8 hvorpå der står A2, der er 12 hvorpå der står B2, og der er 20 hvorpå der står C2. Den reducerede database, A1-databasen, indeholder altså følgende sedler:

A1-databasen (i alt 40 sedler):

A2: 8 sedler B2: 12 sedler C2: 20 sedler

Når vi vil angive chancer ud fra optællinger i databasen, benytter vi følgende skrivemåde som viser om vi tænker på hele databasen eller på den reducerede database:

$$P(A1) = 0.40 \qquad P(A2|A1) = 0.20$$

Den første angivelse fortæller at i den totale database er chancen 0.40 eller 40% for at udtrække en seddel hvorpå der står A1. Den anden angivelse fortæller at i den database der er reduceret til kun at omfattede sedler hvorpå der står A1, er der en chance på 0.20 eller 20% for at udtrække en seddel hvorpå der står A2.

Tilsvarende har vi: $P(B2|A1) = 0.30$ og $P(C2|A1) = 0.50$. I A1-databasen er der en chance på 0.30 eller 30% for at udtrække en seddel hvorpå der står B2, og en chance på 0.50 eller 50% for at udtrække en seddel hvorpå der står C2.

Den øvrige del af træet svarer til den database der er reduceret til at omfatte de 60 sedler hvorpå der står B1. Af træets tal ser vi at af de 60 sedler i B1-databasen er der 40% hvorpå der står A2, der er også 40% hvorpå der står B2, og der er 20% hvorpå der står C2. Denne A2-database indeholder derfor 24 sedler hvorpå der står A2, 24 sedler hvorpå der står B2, og 12 sedler hvorpå der står C2. I den reducerede database har vi altså:

B1-databasen (i alt 60 sedler):

A2: 24 sedler B2: 24 sedler C2: 12 sedler

På denne måde opbygges et chancetræ: På hvert grenstykke angives chancen for at grenstykkets hændelse indtræffer når vi udtrækker en seddel fra den foreliggende database. I første forgrening er det den totale, ureducerede database, ved de efterfølgende forgreninger er det en reduceret database, svarende til den vej vi er gået gennem træet.

De tal der står anført på en forgrening i træet vil altid have summen 1. Det betyder at træet giver os et fuldstændigt billede af det sammensatte eksperiment, det indeholder oplysninger om alle de hændelser der kan indtræffe i de enkelte deleksperimenter. Og ved hvert eksperimentforløb vil én af forgreningens hændelser forekomme.

Træet og databasen er to udtryk for samme sag, de giver begge oplysninger om de foreliggende chancer i det sammensatte eksperiment. Men træet vil ofte være et bedre hjælpemiddel i arbejdet med hændelser der kan forekomme ved det bagved liggende eksperiment.

4.7 Chanceberegninger i træet

Vi vil nu se hvordan vi kan udføre chanceberegninger ved hjælp af det givne træ. Dette foregår ved hjælp af tre regler.

Produktreglen

Vi ønsker fx at beregne chancen for at både hændelsen A1 og hændelsen B2 indtræffer ved en udførelse af det sammensatte eksperiment. Denne hændelse, "Både A1 og B2", vil vi angive ved: A1*B2.

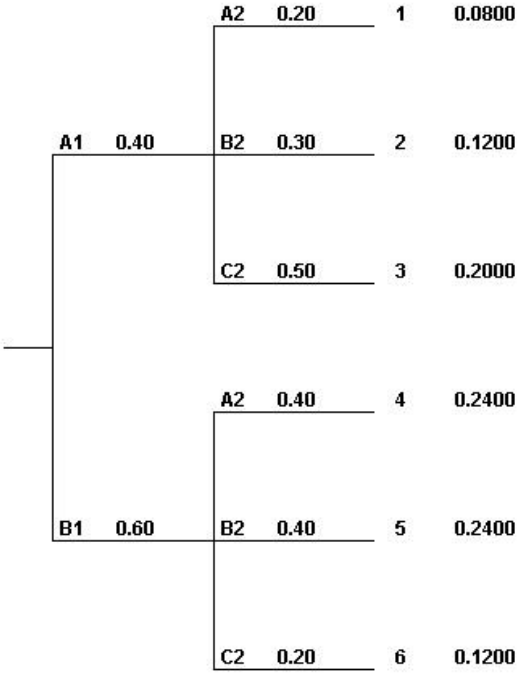
Chancen for hændelsen A1*B2 kan vi tænke os beregnet således: Der er en andel på 0.40 af sedlerne i databasen der viser betegnelsen A1, og af dem er der en andel på 0.30 der viser B2, altså er der en andel på 0.40*0.30 = 0.12 af sedlerne i den totale database der viser både A1 og B2. Men de to tal 0.40 og 0.30 finder vi i træet netop som chancer på den gren der svarer til at først indtræffer A1, og derefter indtræffer B2.

Vi har dermed: $P(A1*B2) = P(A1)*P(B2|A1)$

Ved beregning af chancen for en hændelse af denne slags hvor både det ene og det andet skal indtræffe, behøver vi altså blot at finde den pågældende gren i træet og derefter multiplicere de tal der er anført på grenstykkerne på denne gren. At

denne fremgangsmåde giver det rigtige resultat, hænger sammen med den måde hvorpå træet giver et billede af den tilhørende database.

For hver af træets grene kan vi nu beregne en chance. Vi multiplicerer de tal der står på grenen og får derved chancen for den hændelse der svarer til denne gren:



Her kan vi for hver af de seks grene se hvilken chance den tilsvarende hændelse har i den hele database. Af træet ser vi fx at chancen for hændelsen A1*A2 er 0.08, vi ser at chancen for hændelsen A1*C2 er 0.20, og at chancen for hændelsen B1*C2 er 0.12.

Træet vil kunne hjælpe eleverne til at skelne mellem chancerne for at både A1 og B2 indtræffer, og chancen for at B2 indtræffer når det vides at A1 indtræffer. Den første chance er givet ved P(A1*B2), den anden ved P(B2|A1). De to chancer kan let angives ud fra træets tal. I dagligt sprog kan det ofte være svært at afgøre om det er den ene eller den anden af de to hændelser der er på tale, men i chancetræet optræder de på en sådan måde at de ikke skulle kunne forveksles.

Sumreglen
Hvis vi ønsker at finde chancen for hændelsen C2, skal vi blot finde de grene i træet som indeholder betegnelsen C2. Det er gren nr. 3 og gren nr. 6. Tallene på de to grene fortæller os at der blandt databasens 100 sedler er 20 hvorpå der står A1 og C2, og der er 12 hvorpå der står B1 og C2. Der er altså i alt 32 sedler i databasen som indeholder betegnelsen C2. Chancen for hændelsen C2 er derfor 0.32. Dette tal er netop summen af de to chancer for gren nr. 3 og gren nr. 6: 0.20 + 0.12 = 0.32.

Af sammenhængen mellem træ og database kan vi se hvordan vi i træet kan beregne chancen for en hændelse: Vi finder alle de grene i træet som svarer til denne hændelse, derefter beregner vi summen af chancerne for disse grene.

Reduktionsreglen
Træet er opbygget således at vi i første forgrening har hændelserne A1 og B1, og i næste forgrening har vi hændelserne A2, B2 og C2. Af træets tal kan vi derfor straks se hvad chancen er for at hændelsen B2 forekommer når vi véd at A1 forekommer. Af træet har vi jo: P(B2|A1) = 0.30. Eller udtrykt i database: I A1-databasen vil 30% af sedlerne indeholde betegnelsen B2.

Men hvad nu hvis vi i stedet ønsker at se på B2-databasen, altså den database som består af alle de sedler som indeholder betegnelsen B2? Hvor mange af sedlerne i denne database vil også indeholde betegnelsen A1? Med andre ord: Hvad er chancen P(A1|B2)?

Denne chance kan ikke aflæses i træet. Det ville jo kræve at træet var opbygget således at hændelsen B2 var anført til venstre for hændelsen A1, og sådan er træet ikke udformet. Men vi kan alligevel beregne den søgte chance. Lad os tænke os at træet var udformet på den ønskede måde. Så ville vi efter produktreglen have:

$$P(B2*A1) = P(B2)*P(A1|B2)$$

Men vi har fra vore beregninger ovenfor allerede kendskab til P(B2*A1), som jo er det samme som P(A1*B2). Derfor har vi:

$$P(B2)*P(A1|B2) = P(A1)* P(B2|A1)$$

Heraf får vi for den søgte chance:

$$P(A1|B2) = P(A1)*P(B2|A1)/ P(B2)$$

Hvis vi indsætter talværdier fra træet får vi:

$$P(A1|B2) = 0.40* 0.30 / 0.36 = 1/3$$

Beregningen viser altså at 1/3 af sedlerne i B2-databasen indeholder betegnelsen A1. Eller med andre ord: Hvis vi véd at hændelsen B2 forekommer, så er der en chance på 1/3 for at hændelsen A1 også forekommer.

Udtrykket for P(A1|B2) viser os hvordan vi kan regne "baglæns“ i træet. Når blot et træ er opstillet, kan vi ved hjælp af beregninger finde de chancer som svarer til reducerede databaser som ikke umiddelbart afspejles i træet. Vi vil derfor kalde den fundne regel for *reduktionsreglen*.

I den teoretiske sandsynlighedsregning vil sandsynligheder der beregnes ud fra reducerede databaser, betegnes som "*betingede sandsynligheder“*. De regler der er opstillet ovenfor, vil alle kunne overføres direkte på betingede sandsynligheder.

Reduktionsreglen vil der optræde under navnet *'Bayes' sætning"*. Alle de resultater der i den elementære sandsynlighedsregning udledes vedrørende betingede sandsynligheder, vil have gyldighed for beregning af chancer i tilknytning til reducerede databaser.

En fremstilling af den elementære sandsynlighedsregning, herunder udledning af regler for regning med betingede sandsynligheder, findes i Malmberg: *Elementær Sandsynlighedsregning 1* [Litteratur afsnit B].

4.8 Samspillet mellem hændelser

Ved hjælp af reducerede databaser kan vi illustrere nogle begreber der kan være til nytte i omgangen med hændelser og deres chancer.

Lad os tænke os to hændelser A og B som begge kan forekomme i forbindelse med et eksperiment.

Det kan da ske at forekomsten af den ene forhøjer chancen for at den anden forekommer, forstået således:

$$P(A|B) > P(A)$$

Altså at chancen for A i den database der er reduceret til at omfatte de situationer hvor B forekommer, er større end chancen for A i den ureducerede database. Med andre ord: Når vi véd at B forekommer, så har A en større chance for at forekomme end når vi intet véd.

Vi vil i en sådan situation sige at hændelsen B *støtter* hændelsen A: "At hændelsen B forekommer, forøger chancen for at A forekommer."

På tilsvarende måde fastlægger vi hvad det vil sige at hændelsen B *svækker* hændelsen A:

$$P(A|B) < P(A)$$

”At hændelsen B forekommer, formindsker chancen for at hændelsen A forekommer.” Eller: Når vi véd at B forekommer, så har A en mindre chance for at forekomme end når vi intet véd.

Fra reduktionsreglen har vi følgende sammenhæng:

$$P(A|B) = P(A) * P(B|A) / P(B)$$

som ved omflytning bliver til:

$$P(A|B)/ P(A) = P(B|A) / P(B)$$

Hvis udtrykket på venstre side af lighedstegnet har en værdi der er større end 1, så har udtrykket på højre side det også. Med andre ord: *Hvis B støtter A, så støtter A også B.*

Af samme omskrivning ser vi at hvis hændelsen B svækker hændelsen A, så svækker A også B.

Vi kan derfor tale om at *to hændelser støtter hinanden*, eller at *to hændelser svækker hinanden*.

I træet ovenfor har vi:

$$P(B2) = 0.36 \quad \text{og} \quad P(B2|A1) = 0.30$$

Hændelsen A1 svækker altså hændelsen B2. Når A1 forekommer, har B2 en mindre chance for at forekomme end når vi intet véd om forekomsten af A1.

Tidligere har vi beregnet:

$$P(A1|B2) = 1/3 \text{ og } P(A1) = 0.40$$

hvilket bekræfter at hændelsen B2 svækker hændelsen A1.

To hændelser der hverken støtter hinanden eller svækker hinanden, kaldes *uafhængige hændelser*. Hvis A og B er to uafhængige hændelser, så vil chancen for A være den samme uanset om B forekommer eller ej: P(A|B) = P(A). Tilsvarende gælder i denne situation: P(B|A) = P(B). - "Når to hændelser er uafhængige, vil forekomsten af den ene være uden indflydelse på chancen for at den anden forekommer."

Det skal bemærkes at *adskilte* hændelser ikke er uafhængige hændelser, de er derimod hændelser som svækker hinanden. Når det vides at den ene forekommer, er det udelukket at den anden forekommer.

4.9 TRÆ - et edb-program

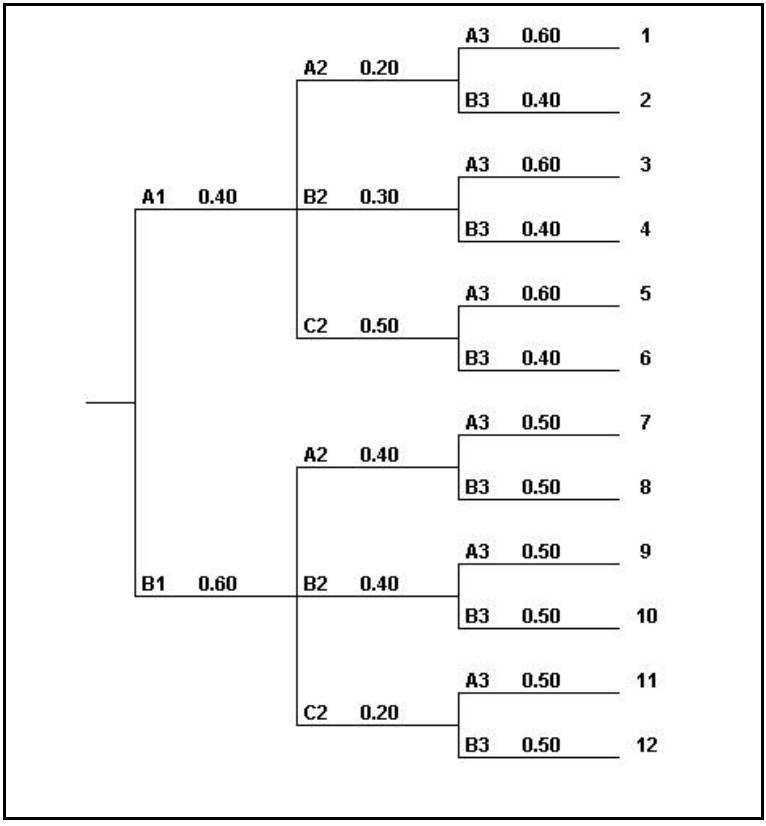
Til støtte for elevernes arbejde i INFA-projektet med chancetræer er udviklet et edb-program TRÆ (og en enklere udgave: ÆSKE). Her kan fastlægges et chancetræ med en given struktur. Eleverne sætter derefter chancer på de enkelte grenstykker, og programmet kan nu udføre de beregninger som opstår i tilknytning til anvendelsen af chancetræer, dvs. programmet kan udføre beregninger efter de tre regler: Produktreglen, sumreglen og reduktionsreglen.

TRÆ kan således beregne chancer for hver af træets grene, og det kan beregne chancer for angivne hændelser ved at finde de grene der svarer til disse hændelser. Endvidere kan TRÆ foretage beregninger efter reduktionsreglen. Det kan dermed foretage udregninger af chancer inden for de reducerede databaser som eleven ønsker at se nærmere på.

Af hensyn til overskueligheden er chancetræernes størrelse i TRÆ begrænset til tre deleksperimenter og til træer med højst 27 grene. Dette er dog ikke nogen væsentlig begrænsning i anvendelsen af TRÆ. Sigtet med programmet er primært at give eleverne mulighed for at blive fortrolige med *sammen-*

hængen mellem database og chancetræ, og denne fortrolighed opnås bedst i situationer hvor opbygningen af begge disse hjælpemidler kan overskues.

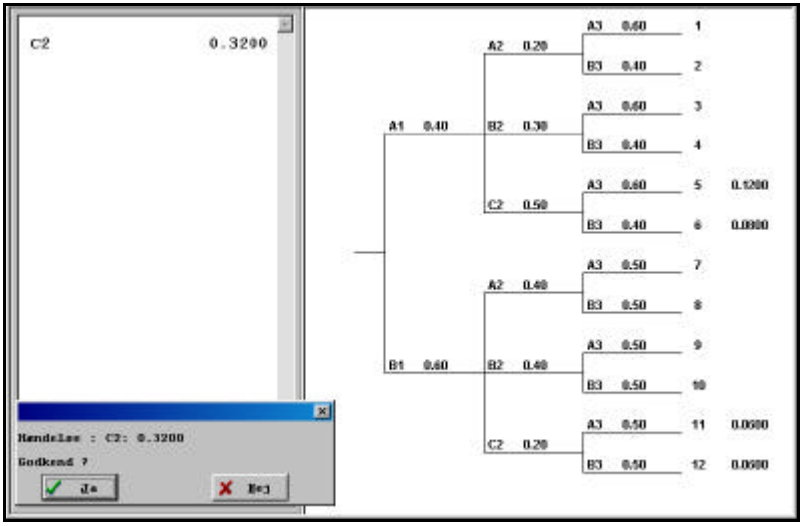
Her er et chancetræ som beskriver en situation med hvori der indgår tre deleksperimenter:



I første deleksperiment kan forekomme to hændelser A1 og B1, i andet deleksperiment kan forekomme tre hændelser A2, B2 og C2, og i tredje deleksperiment kan forekomme to hændelser A3 og B3.

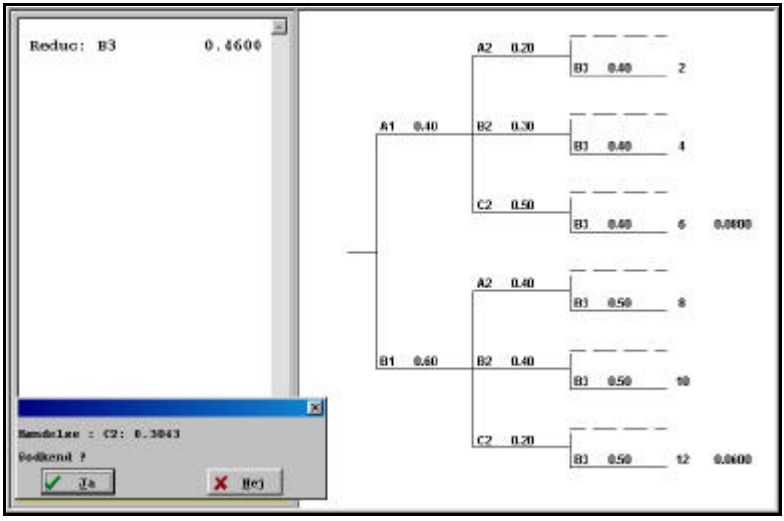
Af træet fremgår hvad sandsynlighederne for de enkelte hændelser er. Bemærk fx at P(B2|A1) og P(B2|B1) har forskellige værdier, den første er 0.30, den anden 0.40.

TRÆ kan beregne chancer ved hjælp af sumreglen, fx chancen for C2:

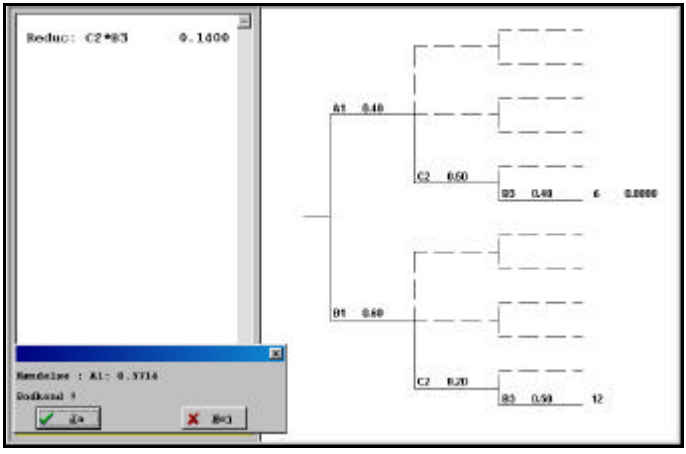


Det ses at hændelsen C2 udgøres af fire grene i træet: gren nr. 5, nr. 6, nr. 11 og nr. 12. Den samlede sandsynlighed på disse grene er 0.32, som anført til venstre på skærmbilledet.

Nedenfor er træet reduceret til kun at omfatte B3-databasen. I denne database er chancen for C2 beregnet.



Det ses i skemaet til venstre at den samlede sandsynlighed på det reducerede træ er 0.46. I dette træ lægger hændelsen C2 beslag på 0.14, nemlig 0.08+0.06. Sandsynligheden for C2 i det reducerede træ er derfor 0.14/0.46, dvs. 0.3043 som anført på skærmbilledet.



Skulle eleverne bede om en reducering der svarer til en tom database, fx reduceringen til A1*B1-databasen, vil programmet meddele at der ikke kan hentes oplysninger fra en sådan database.

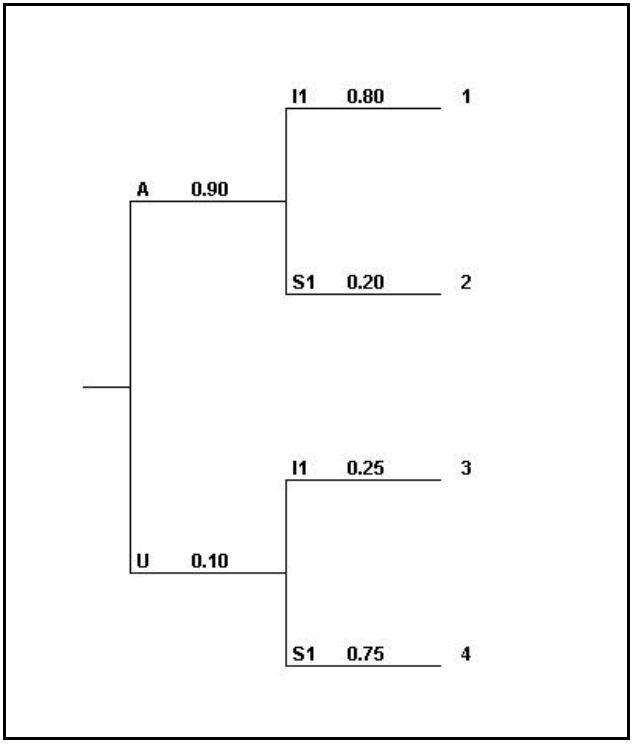
TRÆ sørger for at de pågældende beregninger udføres efter de opstillede regler. Eleverne kan derfor koncentrere sig om de begrebsmæssige aspekter i sagen. De kan afprøve en række ideer uden at dette giver anledning til at de skal ud i tidkrævende tegnerier og beregninger. Og de kan gå på opdagelse i chancetræet: *undersøge nye hændelser og forsøge at give en fortolkning af hvad der gemmer sig i dem, og overveje hvilke praktiske konsekvenser der ligger i de beregnede chancer*.

TRÆ bliver på denne måde et værktøj der kan benyttes i en lang række af chancesituationer, og specielt ofte de situationer som i en elementær undervisning kan føre ud over de helt banale eksempler. Da TRÆ bygger på metoder der kan fremlægges og anskueliggøres gennem konkrete databaser, opfylder programmet alle betingelser for at kunne indgå som et centralt hjælpemiddel i arbejdet med den indledende undervisning i sandsynlighedsregning. Det er på denne baggrund INFA-projektet har anvendt programmet i arbejdet med emner fra sandsynlighedsregningen.

4.10 Ny viden - ny database

Gennem anvendelsen af chancetræer får eleverne mulighed for at blive fortrolige med at ny viden kan føre til nye databaser og dermed til nye chanceberegninger.

Her er et eksempel på et chancetræ som afspejler forholdene i databasen hos et bilforsikringsselskab.



Forsikringsselskabet har to typer af kunder: Den almindelige bilist og "ulykkesfuglen“. De almindelige bilister udgør 90% af forsikringsselskabets kunder, medens ulykkesfuglene udgør de øvrige 10%.

En almindelig bilist har en risiko på 20% for i løbet af et år at få skader som forsikringsselskabet skal dække. En ulykkesfugl har derimod en risiko på 75% for at få en skade i løbet af en periode på et år.

Disse forhold er angivet i chancetræet. A betyder almindelig bilist, U betyder ulykkesfugl. I1 betyder „Ingen skade det første år“, S1 betyder „Skade det første år“.

Vi vil nu benytte programmet TRÆ til beregninger i det forelagte chancetræ. Lad os antage at vi står over for en bilist som netop er blevet kunde i forsikringsselskabet. Om denne kunde véd man intet på forhånd. Chancen for at han er en almindelig bilist er derfor givet ved chancen for hændelsen A:

$$P(A) = 0.90$$

Nu går der et år, og vi får ny viden om bilisten. Vi får at vide at han i løbet af det første år havde en skade som forsikringsselskabet skulle dække.

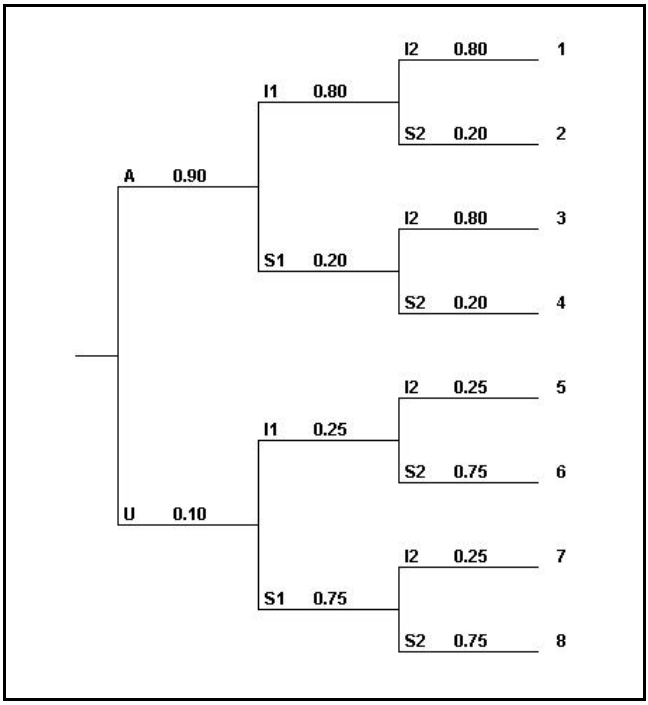
Med denne nye viden ønsker vi at nyvurdere chancen for at bilisten er en almindelig bilist og ikke en ulykkesfugl. Vi lader derfor TRÆ udregne følgende chance:

$$P(A|S1) = 0.7059$$

Med den nye viden om bilisten ser vi at vi får et nyt tal for hans chance for at være en almindelig bilist. Chancen er nu gået ned fra 90% til ca. 70%. Den nye vurdering skyldes at vi efter at have fået oplysning om hans første år ikke mere anvender den ureducerede database, men i stedet den database der er reduceret til at omfatte alle dem der har skade første år, dvs. S1-databasen.

Vi indsamler flere data

Vi udvider nu undersøgelsen til at omfatte yderligere et år. Her er træet som beskriver forsikringstagernes to første år i forsikringsselskabet. Vi forudsætter at der ingen påvirkning er fra det ene år til det andet. Ulykkesfugle bliver derfor ved med at have den samme risiko for at pådrage sig skader, „de forbedrer sig ikke“.

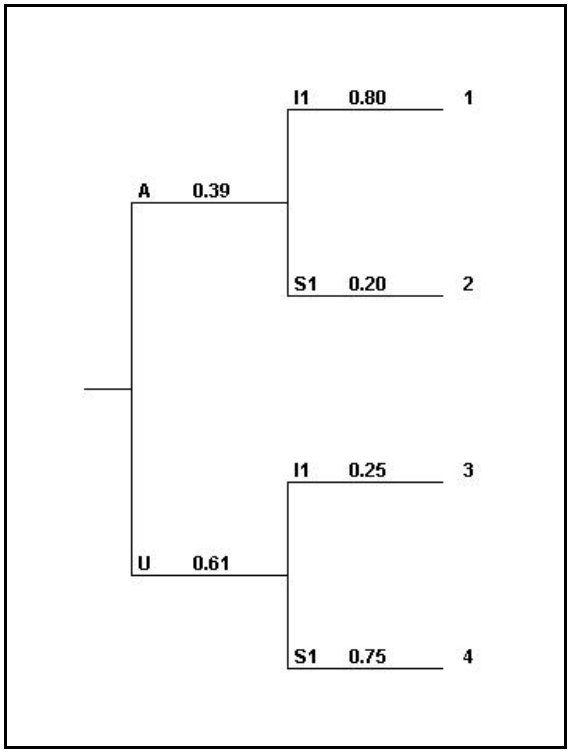


Vi lader nu TRÆ udregne chancen for at der er tale om en almindelig bilist, når det vides at bilisten havde skade både 1. år og 2. år:

P(A|S1*S2) = 0.3902

Igen har vi kunnet revidere vor vurdering på grund af de nye data der foreligger. Efter to år med skade vurderer vi at chancen for at der er tale om en almindelig bilist nu kun er ca. 39%. Der er altså en risiko på ca. 61% for at der er tale om en ulykkesfugl.

Hvis vi ønskede at følge bilisten over nogle flere år kunne vi etablere et chancetræ som tager udgangspunkt i de oplysninger vi allerede har. Vi kunne altså benytte et træ som starter således:



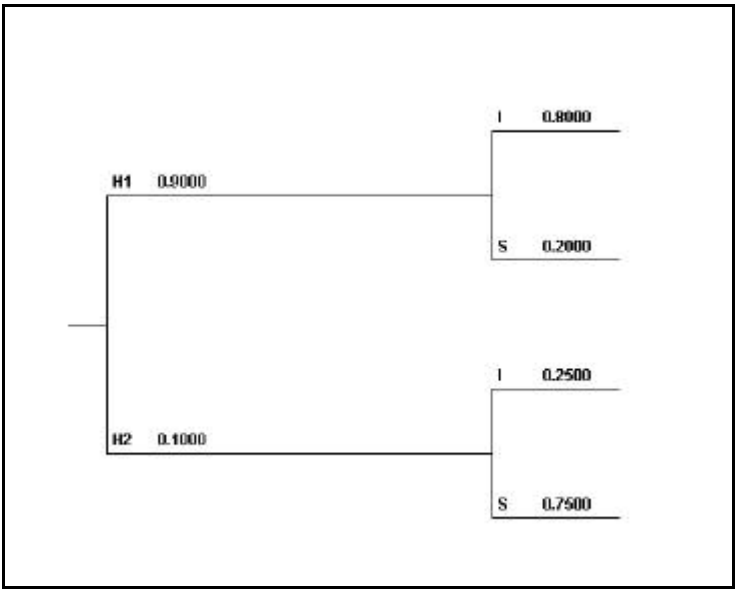
Dette træ viser at i den benyttede database er der en chance på 39% for at bilisten er en almindelig bilist, medens chancen for at der er tale om en ulykkesfugl er 61%. Træets anden forgrening viser at vi stadig benytter de samme skadefrekvenser som i det foregående træ.

4. 11 HYPOTESE - „at lære af erfaringer“

Anvendelsen af reducerede databaser er et udtryk for at ny viden fører til nye chancevurderinger, eller sagt på en anden måde: *Man lærer gennem erfaringer*.

Til arbejdet med hypoteser og vurderingen af dem gennem indsamlede data er udviklet et særligt program, HYPOTESE.

Her er et træ fra HYPOTESE som illustrerer den tidligere beskrevne situation med ulykkesfugle og almindelige bilister.

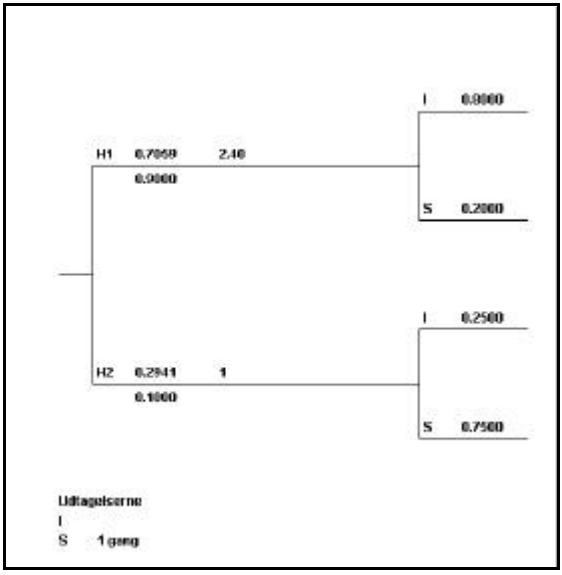


Der foreligger to hypoteser, H1 og H2. Hypotesen H1 går ud på at der er tale om en almindelig bilist og H2 at der er tale om en ulykkesfugl. De to hypoteser har på det tidspunkt hvor der endnu ikke er indsamlet data om bilistens kørsel, en sandsynlighed på henholdsvis 0.90 og 0.10. Vi vil udtrykke det således: Hypotesen H1 har en *trolighed* på 90% og H2 har en *trolighed* på 10%.

Af træet ser vi at der kan foreligge to slags data, I og S. I står for "Ingen skade“, S står for "Skade“. Af træet fremgår at sandsynligheden for S for en almindelig bilist er 0.20, og at sandsynligheden for S for en ulykkesfugl er 0.75. Vi vil sige at H1's *tendens* for S er 20%, medens H2's *tendens* for S er 75%.

Vi kan nu undersøge hvorledes troligheden af de to hypoteser ændres efterhånden som der indløber statistik om bilistens kørsel i de enkelte år.

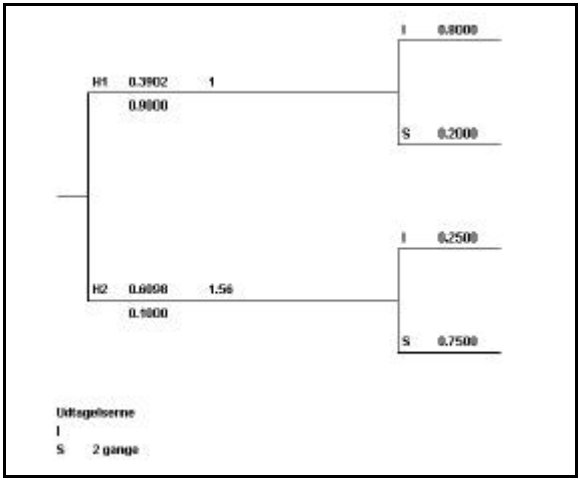
Vi indtaster i programmet et S som angivelse af at bilisten havde en skade i det første år. Herefter opdateres træet ud fra de nye oplysninger:



Vi ser nu at troligheden for H1 har ændret sig til 0.7059 fra de tidligere 0.9000. (Det oprindelige tal er på træet anført under den aktuelle værdi). Samtidig er troligheden for H2 steget fra 0.1000 til 0.2941.

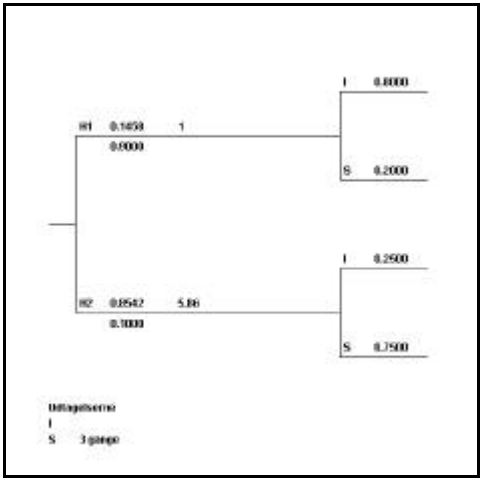
På træet ser vi også at hypotese H1 har en trolighed der er 2.40 gange så stor som H2's trolighed. Tallet 2.40 på træet er de såkaldte *odds* for hypotesen H1.

Vi indtaster nu igen et S for at angive at også det andet år førte til en skade for bilisten. Herefter ser træet således ud:



Nu er troligheden for H1 faldet til 0.3902, medens troligheden for H2 er steget til 0.6098. Vi ser også at det nu er H2 der har den største trolighed af de to hypoteser, odds for H2 i forhold til H1 er 1.56:1.

Endelig ser vi på hvad et tredje år med skade betyder for de to hypotesers trolighed:



Nu er troligheden for H1 faldet til under 15%, og følgelig er troligheden for H2 steget til over 85%. Odds for H2 i forhold til H1 er 5.86:1.

På denne måde kan eleverne eksperimentere med indtastning af data. Efter tre år med skader kommer der måske et år uden skader. HYPOTESE vil straks vise hvad dette betyder for de to hypotesers trolighed.

Det er i HYPOTESE et krav at hypotesernes tendenser for de to muligheder I og S ikke ændres undervejs. Der er altså år efter år den samme sandsynlighed for skade: Den almindelige bilist har en tendens for S på 0.20, medens ulykkesfuglen har en tendens for S på 0.75. - Det der ændrer sig år for år, er troligheden af de opstillede hypoteser, nye data fører til nye troligheder for hypoteserne. Vi får ny viden fra de nye data, *"vi lærer af indhentede erfaringer"*.

5. En læseplan

I lys af det ovenstående skal her gives et forslag til hvordan en undervisning i sandsynlighed og statistik i skolen kunne udformes med hensyn til

Indhold - Hjælpemidler - Arbejdsformer

Forslaget vil være sigtemærke for den efterfølgende opbygning af it-læremiljøet CHANCE.

Undervisningen i folkeskolen i emner fra statistik og sandsynlighedsregning vil med fordel kunne foregå under udstrakt inddragelse af hjælpemidler fra it. Dette gælder ikke blot for arbejdet på de højere klassetrin, også i den indledende beskæftigelse med de faglige emner kan it være et værdifuldt fagligt og pædagogisk hjælpemiddel.

Undervisningen i statistik og sandsynlighedsregning bør være præget af aktiviteter af eksperimenterende og afprøvende karakter. Eleverne vil i dette fagområde have rig lejlighed til at arbejde på en måde hvor de opstiller antagelser, hvor de undersøger sammenhænge, hvor de gætter og efterprøver deres gæt, og hvor de gennem erfaringer udtrykt ved foreliggende data uddrager konklusioner som kan danne udgangspunkt for nye antagelser og nye faglige aktiviteter.

Fagområdet giver gode muligheder for en undervisning der inddrager eksempler fra elevernes egen erfaringsverden.
Gennem sådanne indslag kan eleverne opnå faglig indsigt i nogle af de mange hverdagssituationer der indebærer overvejelser over chancer og risikoer.

Arbejdet med fagområdet vil med fordel kunne inddrage hjælpemidler fra it når det gælder beskæftigelsen med opbygningen af de fundamentale begreber. Dette kan fx gøres gen-

nem edb-spil som er specielt tilrettelagt med pædagogiske formål for øje.

Også ved arbejdet med matematiske modeller, her i form af chance-modeller, er it et uundværligt værktøj. Gennem edb-programmer som er specielt tilrettelagt med sigte på en elementær undervisning, vil eleverne få et hjælpemiddel i hænde som kan give dem adgang til et bredt repertoire af fagområdets anvendelser.

Sådanne edb-programmer kan udgøre kernen i de faglige værktøjer i skolens undervisning i emner fra statistik og sandsynlighedsregning. Eleverne kan gennem valg af parametre tilpasse edb-modellen til den foreliggende praktiske situation, og de kan gennem indsamling af data fra computerkørsler skaffe sig viden som kan danne grundlag for efterfølgende fortolkninger og forudsigelser.

Arbejdet med edb-programmer af denne art vil give gode muligheder for at lade eleverne få indblik i fordele og ulemper ved anvendelsen af matematiske modeller til løsning af virkelighedens problemer.

Arbejdet med data

I arbejdet med statistik skal eleverne få erfaringer med at indsamle, organisere og beskrive data. Den statistiske fremlæggelse af data sker i form af grafer, tabeller og mærketal.
Arbejdet med data kan tage sit udgangspunkt i data der opstår i forbindelse med eksperimenter som eleverne selv udfører. Og fremlæggelsen af data kan bygge på mange forskellige former for beskrivelser, også sådanne som gør brug af konkrete materialer.

Eleverne skal gennem arbejdet med de statistiske emner blive fortrolige med at uddrage oplysninger fra forelagte datamaterialer. Det er derfor vigtigt at de benyttede data ikke optræder løsrevet fra praktiske situationer, men at de forekommer i så-

danne sammenhænge at en meningsfyldt fortolkning af dem er mulig.

Ved arbejdet med den statistiske beskrivelse af data kan eleverne benytte edb-programmer som gør brug af faglige begreber og beskrivelsesmidler der er afpasset efter elevernes niveau.

Det er vigtigt at eleverne bliver fortrolige med at gøre brug af statistikker der opstår i forbindelse med anvendelsen af edb-programmer. I hverdagen vil dette være den almindelige berøring med statistik: At fortolke og forstå beskrivelser som er udarbejdet og fremlagt af andre. Anvendelsen af simuleringsprogrammer i forbindelse med chancesituationer vil give eleverne rig lejlighed til at arbejde med opgaver hvor de skal uddrage information fra programmets statistikker.

Det er vigtigt at eleverne ser at enhver statistisk bearbejdelse af et datamateriale indebærer en reduktion af informationsmængden: Der vindes i overblik, men der mistes i detaljer.
Eleverne kan herigennem erfare at der i valget af statistisk beskrivelse kan blive taget afgørelser som har indflydelse på værdien og brugbarheden af det fremlagte materiale.

Arbejdet med sandsynligheder
Det er en erfaring at både børns og voksnes intuition med hensyn til forhold der involverer sandsynligheder, er ganske løst funderet. Det vil derfor være en vigtig opgave for undervisningen at give eleverne mulighed for at arbejde med et righoldigt udvalg af situationer som kan bidrage til at støtte deres chanceforståelse og chancefornemmelse.

Denne udgangssituation for undervisningen gør det oplagt at lade eleverne prøve deres umiddelbare evner til at foretage chancevurderinger. Arbejdet med en chancesituation kan derfor ofte indledes med elevernes gæt på de forventede resultater. Efter dataindsamling tages gættene op til vurdering, med drøftelse af mulige forklaringer på de foretagne observationer.

En sådan arbejdsform med „Gæt - Undren - Forklaring“ kan være meget givende i behandlingen af emner fra dette fagområde.

Centralt i undervisningen må stå arbejdet med begreberne *usikkerhed, sandsynlighed* og *variation*. Eleverne må erfare stabiliteten i resultater fra lange eksperimentserier, og de må få kendskab til de variationer der kan forventes at forekomme ved korte serier af eksperimenter.

Sandsynlighedsbegrebet i skolen kan med fordel knyttes til et databasebegreb (se afsnit 4.3) således at sandsynligheder kan beskrives og fortolkes i tilknytning til en forelagt samling af data. Dette sætter det statistiske sandsynlighedsbegreb i spidsen i undervisningen og giver samtidig gode muligheder for at eleverne vil opleve arbejdet med data og simuleringer ved edb-programmer i en meningsfyldt sammenhæng.

Arbejdet med sandsynligheder kan i udpræget grad støttes gennem inddragelse af it. Til det centrale værktøj ved undervisningen i sandsynlighedsregning må høre edb-programmer som kan efterligne chanceeksperimenter med lodtrækninger og stikprøveudtagelser, og som kan indsamle data og opstille statistikker fra serier af udførelser af sådanne eksperimenter. Netop disse typer af anvendelser forekommer hyppigt i forbindelse med hverdagens brug af sandsynligheder.

Sådanne programmer kan endvidere være gode hjælpemidler ved arbejdet med at give eleverne forståelse af hverdagens chancestørrelser, som fx chancerne for forekomsten af sjældne hændelser. Gennem edb-simuleringer kan eleverne opnå meningsindhold i chanceudsagn som ”1 ud af 100“, eller ”Gevinst på hvert 25. lod“.

Til arbejdet med fagområdets fundamentale begreber vil chancetræer være et formidabelt hjælpemiddel. Gennem indledende - manuelt behandlede - eksempler kan eleverne få indsigt i chancetræets opbygning og dets anvendelsesmuligheder.

Derefter kan det tegnemæssige og beregningsmæssige arbejde overtages af et edb-program som er tilpasset til de overskuelige situationer det vil være rimeligt at arbejde med i skolen.

Arbejdet med sandsynlighedsregning forudsætter ikke at der foretages en formel faglig opbygning med egen symbolik og terminologi. Skolens beskæftigelse med dette fagområde vil uden vanskelighed kunne klare sig med den sædvanlige matematiske notation og med beskrivelser i almindeligt sprog. Ej heller vil der være behov for udvikling af regneregler for sandsynligheder. Overvejelser over chancer og risikoer vil fuldt tilstrækkeligt kunne foretages med grundlag i det intuitive sandsynlighedsbegreb der udvikles hos eleverne gennem undervisningen.

En indføring i chancelærens didaktik foreligger i H. Kütting [Litteratur afsnit B]. I denne bog findes endvidere en righoldig liste over litteratur (hovedsagelig tysksproget) af relevans for undervisningen i sandsynlighedsregning og statistik i skole og læreruddannelse.

6. De faglige ideer bag CHANCE

Til de faglige ideer som ligger bag udformningen af it-læremiljøet CHANCE skal gives en række kommentarer.

6.1 Chancesituationer

Det centrale emne i arbejdet med fagområdet er chancesituationer, og tre aspekter i elevernes arbejde med dette emne kan udskilles:

At erkende chancesituationer. Der arbejdes med chanceeksperimenter og serier af eksperimenter. Arbejdet kan inddrage rigtige eksperimenter med konkrete materialer, eller det kan foregå ved hjælp af simuleringer udført på computer.

At beskrive chancesituationer. Der arbejdes med tildeling af sandsynligheder til hændelser og med fortolkning af sandsynligheder. Chancesituationerne beskrives ved grafiske hjælpemidler, og data fra udførte eksperimenter behandles ved brug af hjælpemidler fra den deskriptive statistik.

At vurdere chancesituationer. Der arbejdes med eksempler på chancer og risikoer i hverdagen, og med eksempler på hvorledes sandsynlighedsregning og statistik anvendes som hjælpemidler til belysning af virkelighedens chancesituationer.

It-læremiljøet CHANCE er problemorienteret i den forstand at indgangen til mange emner foregår gennem oplæg med problemkarakter. Problemerne vil ofte være af en sådan art at eleverne gennem eksperimenter må skaffe sig data at arbejde med.

CHANCE går ikke uden om de traditionelle eksempler med terningkast og kugleudtagelser. Men disse klassiske situationer er ikke kulminationen i omtalen af fagområdets anvendel-

sesmuligheder, de benyttes blot undervejs som nogle - i øvrigt meget velegnede - eksempler til illustration af faglige begreber og metoder.

I arbejdet med de grundlæggende begrebsdannelser lægges der vægt på at eleverne gennem egne eksperimenter får indsigt i chancefænomeners natur, at de opnår kendskab til hvorledes tilfældigheder manifesterer sig i virkelighedens situationer, og at de erfarer at tilfældighed og lovmæssighed ikke er uforenelige begreber. Kort: *At de bliver i stand til med indsigt og forståelse at erkende "de stokastiske sider" af virkeligheden.*

6.2 Et intuitivt chancebegreb

CHANCE bygger på elevernes intuitive chancebegreb.
Sandsynligheder er noget der på forhånd eksisterer, de skal ikke først komme til verden gennem et sæt af aksiomer eller grundregler. De kan have talværdier som er ukendte for os, men vi kan skaffe os nærmere oplysninger om dem gennem indsamling af data, gennem beregninger eller gennem overvejelser af forskellig art.

Sandsynligheder kan adderes, og sandsynligheder kan subtraheres fra 1, ikke på grundlag af opstillede regler, men som en selvfølgelig konsekvens af det intuitive indhold vi har lagt i sandsynlighedsbegrebet.

I CHANCE vil der kunne tales om sandsynligheder uden at der henvises til et udfaldsrum med en tilhørende sandsynlighedsfunktion, og chanceeksperimenter vil kunne beskrives ved en grafisk illustration, et chancetræ, med tilknyttede sandsynligheder.

Der opbygges ikke i CHANCE et formaliseret matematisk notationsapparat til beskrivelse af hændelser og sandsynligheder, og der gives i øvrigt ikke "en definition" af begreberne udfald og hændelse. Disse begreber omtales kun gennem

hverdagssproget lidt uskarpe, men ofte hensigtsmæssige form. En hændelse vil ikke blive fastlagt som en delmængde af et forelagt udfaldsrum, den vil i stedet blive beskrevet i dagligdags vendinger i tilknytning til den givne chancesituation. Og sædvanlige sandsynlighedsteoretiske sætninger og formler, hvor beskedne de end ville tage sig ud i mængdelærens formulering, vil ikke forekomme i elevteksterne.

Der er selvfølgelig intet i vejen for at en lærer der føler at mængdelærens begreber kan give et fastere fundament for undervisningen, kan opbygge det formelle beskrivelsesapparat som traditionelt har været knyttet til den elementære sandsynlighedsregning. Dette må blot ikke betyde en flugt fra virkeligheden over i mængdelærens beskyttede og forenklede verden.

Det er en erfaring at et intuitivt sandsynlighedsbegreb ikke er et pålideligt hjælpemiddel, hverken hos børn eller voksne, når talen er om anvendelser der vedrører sammensatte chanceeksperimenter. Det gælder hvad enten det drejer sig om eksperimenter sammensat af indbyrdes uafhængige eller afhængige deleksperimenter. CHANCE lægger derfor særlig vægt på at give eleverne et solidt erfaringsgrundlag med chancesituationer af denne art. Det sker gennem en indgående beskæftigelse med overskuelige sammensatte eksperimenter og under brug af særlige grafiske hjælpemidler.

Den valgte intuitive opbygning af fremstillingen gør det muligt at udnytte begreber og hjælpemidler som ellers ville være uden for folkeskoleelevers rækkevidde. Således lader metoder som traditionelt behandles under overskriften "*Betinget sandsynlighed*" sig let indføre og anvende. Betingede sandsynligheder optræder ikke i CHANCE som specielle sandsynligheder med særlige egenskaber og særlige regneregler, men blot som sandsynligheder der fastlægges under hensyntagen til givne ekstra informationer.

6.3 Statistiske sandsynligheder

I en elementær undervisning kan sandsynligheder ikke føre en tilbagetrukken tilværelse i en aksiomatisk opbygning hvor spørgsmål om tildeling af talværdier til sandsynligheder og disse talværdiers fortolkning negligeres. Tværtimod er sådanne spørgsmål af afgørende betydning i en undervisning som skal indføre begynderen i sandsynlighedsregningens verden. I CHANCE lægges der derfor megen vægt på eksempler som kan illustrere hvordan sandsynligheder kommer til veje og hvordan de fortolkes.

I CHANCE arbejdes med tre typer af sandsynlighed: *en kombinatorisk sandsynlighed, en statistisk sandsynlighed og en personlig sandsynlighed*. Fortolkningen af sandsynligheder vil ofte blive givet gennem en oversættelse til "*frekvenser i det lange løb*", men i nogle tilfælde vil også en fortolkning ved hjælp af "*odds i væddemål*" eller i form af "*grad af overbevisning om*" blive anvendt.

Begrebet statistisk sandsynlighed har fået en fremtrædende plads i CHANCE. I arbejdet med eksempler som viser hvorledes tildelingen af sandsynligheder finder sted, lægges særlig vægt på situationer hvor tildelingen foretages under anvendelse af information hentet fra indsamlede data. Disse data kan være fremskaffet gennem "rigtige eksperimenter", eller de kan være opstået gennem simuleringer der er udført på computer.

Det statistiske sandsynlighedsbegreb sættes dermed i centrum i en stor del af fremstillingen i CHANCE. Denne placering har to fordele set fra et pædagogisk synspunkt:

(1) Hverdagens chancesituationer er som oftest af statistisk og ikke af kombinatorisk art. Repertoiret af realistiske anvendelseseksempler er derfor meget større i en undervisning hvor det statistiske sandsynlighedsbegreb er til rådighed.

(2) Gennem anvendelsen af statistiske sandsynligheder fremhæves samspillet mellem sandsynlighedsregning og eksperi-

menter, dvs. samspillet mellem sandsynlighedsregning og data. Der kommer på denne måde en mere dynamisk facet ind i arbejdet med tildeling af sandsynligheder.

At de statistiske sandsynligheder kan forekomme eleverne at være lidt mere "flossede" end de kombinatoriske, er ikke nogen ulempe i en indledende undervisning. Tværtimod kan de tilsyneladende mere uskarpe talangivelser i fastsættelsen af statistiske sandsynligheder give anledning til værdifulde overvejelser over hvilke nøjagtighedskrav der med rimelighed kan stilles til sandsynligheder som anvendes i beskrivelse af virkelighedens fænomener.

En fagdidaktisk argumentation for anvendelsen af det statistiske sandsynlighedsbegreb i en elementær undervisning er givet hos Lars Rasmussen *Det statistiske sandsynlighedsbegreb - et naturligt pædagogisk udgangspunkt* [Litteratur afsnit A]

6.4 Ét fagområde: Chancelære

CHANCE lægger vægt på at lade sandsynlighedsregning og statistik fremtræde som nært forbundne discipliner. Der gives derfor ingen særskilt behandling af den deskriptive statistik, men dens begreber og metoder introduceres i tilknytning til arbejdet med at beskrive resultaterne fra udførte chanceeksperimenter.

Den deskriptive statistik optræder i CHANCE alene som en hjælpedisciplin i arbejdet med chancesituationer og deres beskrivelse. Og der indføres kun begreber fra statistikken som har en meningsfyldt anvendelse i dette arbejde.

En tilsvarende rolle indtager kombinatorikken der benyttes som et hjælpemiddel ved fastsættelsen af sandsynligheder i situationer med ligevægtede udfald. Kombinatoriske problemer tages kun op i denne sammenhæng, og behandlingen af emnet er begrænset til det absolut minimale.

Med adgang til passende edb-programmel vil det ofte tidkrævende arbejde med anvendelsen af den deskriptive statistiks metoder kunne lettes betydeligt. Det skal imidlertid bemærkes at der ved en sådan fremgangsmåde må afsættes en del tid til at gøre eleverne fortrolige med de udskrifter og skærmbilleder der leveres fra edb-programmer af denne art. Uden en færdighed hos eleverne i fortolkning af program-uddata vil inddragelsen af edb kun kunne medvirke til en fremmedgørelse af eleverne over for de behandlede problemer.

Det bør i øvrigt overvejes om ikke *talbeskrivelse af datamaterialer* er en så almen foreteelse, og en aktivitet så nært forbundet med elevernes arbejde med at opnå talindsigt og talforståelse, at det var en naturlig del af skolens matematikindhold. Det burde derfor ikke puttes ind i en speciel bås under overskriften "Deskriptiv statistik", men simpelthen være en vigtig del af undervisningen i elevernes omgang med tal, talbehandling, talbeskrivelser og talfortolkninger. INFA har taget dette op i tekstserien "Talkunnen", INFA 1998-2000.

Det tilrådes, efter erfaringerne fra INFA-projektet, at anvendelsen af computer ikke gøres alt for "strømlinet". Hvis hele arbejdsprocessen automatiseres og overtages af computeren, vil eleverne hurtigt miste fornemmelsen for hvad der egentlig arbejdes med. Deres eneste indsats bliver da at viderebringe et resultat som de intet meningsfyldt forbinder med. Derfor skal der tilrådes "en pædagogisk anvendelse" af edb-programmer og i det hele taget "en nænsom og gennemskuelig brug af edb" i den indledende undervisning i dette område.

6.5 Eksperimenterende og udforskende

Det er et hovedsigte med opbygningen af CHANCE at eleverne kan beskæftige sig med stoffet i "*en eksperimenterende og udforskende arbejdsform*". Dette hænger sammen med INFA-projektets målsætning som den er beskrevet i INFA-Rapporten *Læremiljøer i en edb-støttet undervisning* [Litteratur afsnit E]:

At fremme arbejdsformer som giver eleverne en eksperimenterende og udforskende holdning til de faglige emner, og vænner dem til at undre sig, at stille spørgsmål og at på opdagelse.

INFA-programmellet sigter i særlig grad mod anvendelser i situationer hvor arbejdet med begrebsdannelse, problemanalyse og problemløsning sættes i forgrunden, og hvor eleverne gennem eksperimenter og iagttagelser opnår faglige oplevelser der kan føre til indsigt og erkendelse.

Det er endvidere projektets opfattelse at de faglige begreber bedst erkendes gennem veltilrettelagte læresituationer, som bygger på et samspil mellem elevernes selvvirksomhed og lærerens inspiration, vejledning og styring.

Dette betyder at vi er af den opfattelse at læreprocessen og arbejdet med tekster og programmel ikke kan overlades til eleverne selv, heller ikke til de dygtige. Det er nemlig ikke nok at eleverne udfører eksperimenter og løser problemer, de må også hyppigt stoppe op og gennemtænke hvad der foregår og hvad der kommer ud af de mange aktiviteter. Ved disse lejligheder har læreren en vigtig rolle som igangsætter og hjælper - og som faglig autoritet.

Læreren vil endvidere gennem sit overblik over faget være i stand til at pege på væsentlige sammenhænge i stoffet som eleverne ikke selv bliver opmærksomme på. Lærerens indseende med arbejdets forløb kan ikke undværes. Læreren må kunne træde til med hjælp og vejledning når faglige detaljer driller eller når interessen daler.

I del 2 er der nærmere gjort rede for de arbejdsformer der gøres brug af i CHANCE.

6.6 Indsigt gennem anvendelser

Det var tidligere en almindelig holdning at man i matematikundervisning først koncentrerede sig om at lære eleverne matematikken, og derefter tog man så fat på matematikkens anvendelser. Hvis der da var tid og lyst til det.

Mange har dog fået øjnene op for at man ofte med fordel kan tage udgangspunkt i at bruge matematikken som et værktøj i forbindelse med løsning af problemer, og så derefter vende tilbage til at foretage en mere teoretisk undersøgelse af værktøjet. Ideen er at man også kan lære matematik ved at se hvad den kan bruges til, og ved at erfare dens muligheder og begrænsninger i arbejdet med problemstillinger fra virkelighedens mange områder.

At gå ind på matematikkens anvendelser er i mange henseender en af de væsentlige opgaver i en matematikundervisning. Matematikken er et uforligneligt hjælpemiddel til beskrivelse af virkeligheden. Gennem matematiske modeller opstilles forenklede beskrivelser som kan benyttes ved problemløsning og ved kommunikation om komplekse emner.

Det er netop denne indstilling som ligger til grund for udformningen af it-læremiljøet CHANCE og for opbygningen af de tilhørende EMMA-temaer. Gennem arbejdet med anvendelser lukkes eleverne ind i en ny og spændende verden. Efter et arbejde, ofte støttet af it, opnår eleverne en fortrolighed med områdets problemstillinger og de metoder der kan benyttes i arbejdet. På denne baggrund kan læreren derefter afgøre om han vil vende tilbage til et uddybende arbejde af mere teoretisk art.

I CHANCE er denne teoretiske del af arbejdet ikke beskrevet, her er de fleste matematiklærere jo på kendt grund. Vi holder os derfor til de aktiviteter som kan danne udgangspunktet for elevernes arbejde, og som i mange tilfælde vil være fuldt tilstrækkelige til at give eleverne en faglig indsigt og forståelse.

I arbejdet med fagområdets anvendelser tilstræbes det at eleverne får et bredt indblik i hvorledes begreber og metoder fra chancelæren benyttes i hverdagen. Et af de vanskeligste problemer i den forbindelse er at finde eksempler som er på én gang elementære og som samtidig illustrerer ikke-banale anvendelser af faget.

Det har været et mål for INFAs arbejde med udformningen af CHANCE at fremlægge en række anvendelseseksempler som for eleverne fremtræder

- overskuelige,
- lettilgængelige,
- vedkommende,
- udfordrende.

I kravet om *overskuelighed* og *lettilgængelighed* ligger en bestræbelse på at sikre at arbejdet med de enkelte emner kan udføres over en forholdsvis kort tidsperiode. Dette er nemlig helt afgørende for muligheden for at få lærere og elever til at gå ind i arbejdet. Problemstillingen må ikke være for besværlig at fremlægge, og den nødvendige faglige begrebsdannelse må ligge inden for elevernes rækkevidde.

De enkelte emner må af eleverne føles *vedkommende*. De må kunne motiveres til at arbejde med dem, og de må finde at de opstillede problemstillinger er af interesse for dem.

At eksemplerne skal kunne give *udfordringer af faglig* art siger sig selv. Spændende problemstillinger og overraskende løsninger er en ekstra facet som kan være helt afgørende for arbejdets forløb. Heldigvis er chancelæren et fagområde som er rigt på problemstillinger af en sådan art.

I CHANCE har vi tilstræbt at finde anvendelseseksempler som kan opfylde et eller flere af følgende krav:

- De skal åbne elevernes øjne for hverdagens rigdom af chancesituationer.

- De skal behandle chancesituationer som eleverne er bekendt med gennem egne oplevelser.

- De skal belyse samfundsmæssige anvendelser som berører den enkelte borger.

- De skal hjælpe med til at afmystificere fagområdets rolle i hverdagen.

- De skal bidrage til at eleverne får mulighed for at kunne tage selvstændig stilling til argumenter der vedrører chancesituationer.

Herudover skal eksemplerne selvfølgelig vælges så de kan være med til at *udbygge og styrke elevernes intuition* i spørgsmål der vedrører overvejelser over chancer og risikoer.

I forbindelse med INFAs arbejde med emner fra chancelære er også benyttet edb-programmer som ikke direkte fokuserer på undervisningen i sandsynlighedsregning og statistik, men som i udstrakt grad gør brug af begreber og metoder fra disse fagområder. Derved erfarer eleverne at chancelæren er noget der kan bruges, det er ikke blot en teoretisk disciplin som optræder i skolematematikken.

Blandt edb-programmer der har kunnet benyttes på denne måde, skal nævnes to programmer til brug i arbejdet med emner fra demografi: *levetid* og *befolkningsprognoser*, samt et program som indeholder *data om det danske vejr gennem tiderne*. Ved anvendelsen af disse programmer ser eleverne hvorledes chancelærens emner optræder i meningsfyldte sammenhænge. Og gennem beskæftigelsen med opgavesituationer hvor disse edb-programmer benyttes som et værktøj, opnår eleverne en fortrolighed med chancelærens begreber og

en indsigt i den rolle de kan have når matematikken anvendes på virkelighedens problemer. - Et tilsvarende udbytte kan eleverne opnå ved at arbejde med de to programmer "Marked" og "Influenza" der gør brug af matematiske modeller som er styret af chancemekanismer.

En beskæftigelse med chancelærens emner efter de retningslinier som er skitseret her, kan give en god baggrund for elevernes arbejde med tværgående emner som behandles i et samspil mellem flere fagområder

6.7 "Faglige tankevækkere"

Dette begreb dækker over situationer hvor elevernes intuitive opfattelse af et sagsforhold kolliderer med de faglige resultater. Chancelæren er et område hvor der er oplagte muligheder for at gøre brug af sådanne faglige tankevækkere. Alle matematiklærere kender eksempler hvor den intuitive vurdering af chancer og risikoer afviger væsentlig fra de tal der kommer frem ved en faglig behandling af emnet. Klassisk blandt disse eksempler er *fødselsdagsproblemet* hvor der spørges om chancen for at der i en skoleklasse findes to elever der har fødselsdag samme dag i året.

Men der er mange andre af den slags situationer i chancelæren. De er velegnede som appetitvækkere i undervisningen, og de kan ofte benyttes som igangsættere inden for et nyt emneområde.

I det hele taget vil det hyppigt forekommende arbejde med at sætte talværdier på chancer i mange tilfælde kunne indledes med en gætterunde hvor eleverne får lejlighed til at udtrykke deres umiddelbare forventning til situationen. Et efterfølgende overraskende resultat fra den faglige behandling kan da være et godt udgangspunkt for refleksioner med diskussioner, forklaringer og fortolkninger som vigtige ingredienser.

Der er ikke noget fagområde i matematikken hvor eleverne så ofte som i chancelæren bliver udsat for at deres intuitive fornemmelse er "på afveje". Dette kan udnyttes positivt i en undervisningssituation, og CHANCE fremlægger en række muligheder og forslag som læreren kan tage op.

Det skal endvidere fremhæves at intuitioner som i det øvrige matematikstof er i overensstemmelse med de saglige forhold, og derfor udtryk for "god tænkning", kan være ganske skæve i chancelæren. Således vil den sædvanlige ræsonneren efter en lineær model, som den ofte udfolder sig i den praktiske regning, i de fleste tilfælde komme til kort i chancelæren. Chancen for at få tre seksere i 10 kast med en terning kan eleverne let tro er det samme som chancen for at få seks seksere i 20 kast. At den første sandsynlighed er mere end dobbelt så stor som den anden, vil de næsten ikke acceptere.

Den slags eksempler "der strider mod almindelig sund fornuft", kan der gives mange af i tilknytning til arbejdet med den indledende chancelære. CHANCE introducerer en del af dem i eksempler og opgaver.

6.8 Edb-spil i undervisningen

Edb-spil har været et ofte anvendt indslag i undervisningen i chancelære i tilknytning til INFA-projektet. Gennem spil udført ved hjælp af computer har eleverne på en aktiv og inciterende måde arbejdet med en række af fagområdets grundlæggende begreber.

I spillene har det været muligt at indlægge chancemekanismer som vanskeligt kan realiseres på anden vis. Mens sædvanlige spil må lade chancesituationerne styre af fx terningkast, hvor eleven er uden indflydelse på afvejningen af sandsynlighederne, er der i INFAs spil givet mulighed for at eleven i nogen grad selv kan påvirke sine chancesituationer.

I spillet STATSPIL findes fx en række æsker hvori der er placeret kugler med påmalede tal. En æske kan indeholde kugler med tallene 1,2,3,3,3,3, medens en anden æske indeholder kugler med tallene 1,1,1,3,3,3. I en forelagt spillesituation skal eleven vælge hvilken æske der skal udtrækkes et tal fra, et tal som bestemmer det videre forløb på spilleplanen.
Udtrækningen foretages derefter på tilfældig vis af computeren. Eleven kan ikke selv bestemme resultatet af udtrækningen, men han kan være med til at vælge den æske som giver ham de bedste chancer i den foreliggende situation.

STATSPIL har til formål at opøve spillerne i at foretage chanceovervejelser: *Hvilken æske skal vælges i den forelagte situation? - Hvor er der størst chance for at der bliver udtrukket det tal jeg har mest brug for? - Og hvilken risiko er der for at netop den æske vil give mig et tal som jeg slet ikke ønsker at få?*

Gennem valget af spilleæsker kan spillerne "tage chancer" og spille dristigt, eller de kan "spille statistisk" og holde sig til de valg der i det lange løb vil vise sig mest effektive.

STATSPIL forudsætter ikke forudgående arbejde med sandsynlighedsregning. Tværtimod kan spillet benyttes i en indledende fase hvor der opbygges chance-intuitioner hos eleverne, og hvor der lægges op til den senere undervisning i statistik og sandsynlighedsregning på de højere klassetrin.

I spil af denne art må spilleren bestandigt gå ind i chanceovervejelser, og det er en erfaring fra INFA-arbejdet at en sådan tilrettelæggelse af spillene er fremmende for elevernes chancebevidsthed og chanceforståelse.

6.9 Anvendelsen af edb-modeller

Det har været naturligt at inddrage edb-modeller som et centralt hjælpemiddel i undervisningen i chancelære.

Nogle af modellerne har været såkaldte anvendelsesspecifikke modeller, se herom i INFA-rapporten *Edb-modeller i matematikundervisningen* [Litteratur afsnit E]. Det drejer sig fx om en model der simulerer kø-dannelsen i et supermarked eller en model der simulerer forløbet af en influenza-epidemi i en skoleklasse. Begge disse modeller bygger på chance-situationer som eleverne selv kan være med til at specificere.

Af større faglig-pædagogisk interesse er arbejdet med de åbne modeller LOD og KUGLE1. Disse modeller kan lige som den lineære model i den "almene matematik" benyttes i en lang række af anvendelsessituationer af vidt forskellig art. Det er elevens opgave at afgøre i en forelagt problemsituation om modellen kan anvendes, og dernæst at fastlægge hvordan den bruges, at bestemme hvilke inddata der skal benyttes, og endelig at fortolke de opnåede resultater fra simuleringen på computer samt at drage eventuelle konsekvenser.

Det fascinerende ved anvendelsen af de to modeller er at eleverne her får adgang til et hjælpemiddel som sætter dem i stand til at arbejde med et stort repertoire af problemstillinger. Gennem programmernes simuleringer kan eleverne beskæftige sig med faglige emner som i en traditionel faglig opbygning ville være utilgængelige på grundskolens klassetrin. Og vi kan her rokke ved den matematiske skik: Kun at behandle emner der inddrager faglige begreber og metoder som eleverne behersker i enhver teoretisk detalje.

Med anvendelsen af LOD og KUGLE1 er det afgørende ikke den faglige matematik der gemmer sig i emnet, men de begrebsmæssige elementer der indgår i sagen. Enhver problemstilling som kan fremlægges for eleverne og forstås af dem, vil også kunne tages op i undervisningen og behandles ved hjælp af de to programmer. Hvis blot problemstillingerne begrebsmæssigt er tilgængelige, vil eleverne kunne arbejde med dem.

Elevernes arbejde forløber ofte i tre faser:

- Problemsituationen undersøges.
  Det faglige værktøj vælges.

- Værktøjet anvendes.

- Resultater fortolkes og vurderes.
  Konsekvenser drages.

I den første fase analyseres den forelagte situation, og det overvejes hvorledes det matematiske værktøj, edb-programmet, kan inddrages ved løsningen. Eventuelt foretages nogle præciseringer: *Vi vil opfatte situationen på følgende måde ...*

Derefter anvendes det valgte program med de inddata der er truffet beslutning om.

I den tredje fase studeres resultaterne fra edb-kørslen. Resultaterne fortolkes og vurderes, og deres troværdighed drøftes. Eventuelle forslag til nyformuleringer af den oprindelige problemstilling med efterfølgende edb-kørsel tages op.

I forbindelse med overvejelsen over resultaternes troværdighed har eleverne ofte forsøgt at foretage teoretiske beregninger som kunne belyse de fundne simuleringsresultaters kvalitet, eller de har søgt råd hos deres lærer. I LOD-temaet er der opgaveeksempler hvor eleverne selv kan gennemføre en sådan beregning, og der er opgaver hvor de kan komme igennem med støtte fra deres lærer. Men der er også opgaver hvor hverken elever eller lærer kan gennemføre den teoretiske udregning. Her er de to parter ligestillet i en drøftelse af det overraskende i de fundne simuleringer.

Hvor de teoretiske beregninger lader sig gennemføre, er det en særlig oplevelse for eleverne at erfare hvor gode vurderinger af de ukendte chancer der opnås gennem simuleringen med edb-programmerne. Holdningen hos eleverne kan som-

me tider udtrykkes ved: *Hvorfor dog bruge så megen tid og kræfter på det svære teoretiske, vi kan jo løse opgaverne lige så godt ved hjælp af simuleringer.*

Det har været et sigte for arbejdet i INFA med modeller som LOD og KUGLE1 at undersøge spørgsmål af følgende art:

Kan eleverne bringes til at "tænke i modeller" i deres arbejde med løsning af problemer?

Kan eleverne få en sådan indsigt i disse modellers rækkevidde at deres arbejde med problemløsning får en ny dimension?

Kan eleverne arbejde selvstændigt med anvendelsen af åbne modeller ved løsning af problemer?

Kan eleverne gennem arbejdet med sådanne modeller få kendskab til principielle spørgsmål vedrørende anvendelsen af matematik på virkelighedens problemer?

Det er vor erfaring fra arbejdet i INFA at disse spørgsmål alle kan besvares bekræftende.

De to programmer LOD og KUGLE1 er nærmere omtalt i del 2 af CHANCE.

6.10 Forberedelse til en egentlig faglig opbygning

I CHANCE foretages der ikke nogen egentlig faglig opbygning af sandsynlighedsregningen med en angivelse af aksiomer og med efterfølgende udledning af læresætninger. En række faglige begreber som vil være oplagte i en videreudvikling af fagområdet, tages heller ikke op i CHANCE. Det drejer sig fx om det vigtige begreb chancestørrelse, også kaldet stokastisk variabel.

Når grundskolens elever i deres fortsatte uddannelse møder fagområdet statistik og sandsynlighed igen, vil de stifte bekendtskab med chancestørrelser og deres sandsynlighedsfordelinger. Og i tilknytning hertil vil begreberne middelværdi og varians blive taget op.

I en sådan fremstilling vil der blive anvendt et formelapparat til bekvem beskrivelse af de foreliggende sagsforhold.

Vi har i CHANCE valgt en formelfri behandling af det faglige stof. Vægten er lagt på arbejdet med begreberne og deres anvendelse og ikke på en strømlinet matematisk fremstilling. Vi er imidlertid overbevist om at den foreliggende indførelse i CHANCE til sandsynlighedernes verden vil give grundskolens elever en god forberedelse til en fortsat beskæftigelse med emnerne på et højere niveau. Den forståelse som gennem arbejdet med CHANCE opnås for metoder og tankegange der er karakteristisk for arbejdet med sandsynlighed, vil komme eleverne til gode i deres videre udforskning af chancernes spændende verden.

I INFAs arbejde med emner fra chancelæren har vi afprøvet nogle emner som naturligt ligger i forlængelse af det stof der indgår i CHANCE. Der er i første række tale om binomialfordelinger, og i tilknytning hertil er emnet binomialtest taget op. Gennem passende it-værktøjer har det vist sig muligt at give elever på de øverste klasser i grundskolen en introduktion til begreber fra den klassiske hypotesetestningsteori: Acceptområde, fejl af 1. og 2. art, signifikans, teststyrke.

Disse emner indgår ikke i CHANCE, men en nærmere beskrivelse er givet i EMMA-temaet Binomialtest.

7. Kan der bygges på elevernes chanceintuition?

It-læremiljøet CHANCE, der i del 2 opbygges til brug for arbejdet med sandsynlighed, har sit faglige udgangspunkt i elevernes chanceintuition. Vi skal her knytte nogle kommentarer til denne lidt luftige basis.

Det er som nævnt en kendsgerning at chanceovervejelser er et usikkert område - både for børn og voksne. Vi skal til illustration heraf i det følgende fremdrage nogle eksempler på situationer hvor elevernes chancemæssige intuition ikke slår til, og vi skal i tilknytning hertil beskrive hjælpemidler og aktiviteter som er anvendt i arbejdet med at støtte og retlede elevernes intuition med hensyn til chancer.

En indledende undervisning som sigter mod at give eleverne færdighed i at forholde sig til sandsynligheder, må kæmpe på to fronter. Dels må undervisningen tilrettelægges sådan at eleverne møder en lang række af chancesituationer der kan medvirke til at opbygge og facettere deres faglige begreber, dels må undervisningen tage hensyn til at mange elever møder med en forforståelse af chancebegrebet som ikke er i harmoni med det faglige begreb de møder i undervisningen.

Der kan således være tale om både en opbyggende og en nedbrydende virksomhed. Desværre vil hverdagens eksempler på spilovertro og mediehistorier om chancer og risikoer ofte medvirke til at styrke et fejlagtigt sandsynlighedsbegreb.
Medierne fokuserer på enkeltsituationer, fx spillere med ekstra stort held, eller de fremhæver eventyrlige sammentræf uden at gå ind på de mange tilfælde hvor sådanne ting ikke indtraf.

Vi skal nedenfor i afsnit 7.1 – 7.4 se på fire typer af eksempler på situationer hvor elevernes chanceintuition erfaringsmæssig er mindre velfunderet. Vi skal i tilknytning til disse eksempler forsøge at give en faglig forklaring på denne brist, og vi skal pege på elementer i undervisningen som kan være med til at

støtte og udvikle elevernes chanceforståelse og chanceintuition. Det vil i dette afsnit især være et kendskab til chancelærens regler og metoder vi vil foreslå som hjælpemiddel i det faglige arbejde.

I del 2 kommer vi ind på nogle faglige temaer hvor eleverne gennem veltilrettelagte aktiviteter med udførelse af chanceeksperimenter kan opnå erfaringer der kan bidrage til at opbygge deres chanceintuition og -indsigt. De benyttede temaer vil være nært knyttede til hverdagens anvendelser af sandsynligheder.

I afsnit C i litteraturlisten er anført en række værker som går ind på spørgsmål vedrørende børns og voksnes tænkning i chancesituationer.

Opbygning af chanceforståelse

Lad det være sagt straks: Solide chanceerfaringer opnås kun hvis eleverne bruger tid til overvejelser og refleksioner. De faglige oplevelser, hvad enten de har udgangspunkt i det teoretiske eller det eksperimentelle, må have mulighed for at sætte sig, og de må tænkes ind i de erfaringer og det faglige univers eleverne allerede har opbygget.

Selv om chanceeksperimenter er et velegnet hjælpemiddel ved undervisningen i sandsynligheder, så er det ikke nogen god pædagogisk metode at haste videre fra det ene eksperiment til det næste uden en mellemliggende fase hvor resultaterne tages op til eftertanke. Specielt gælder det de mange eksempler på „faglige tankevækkere“, se afsnit 6.7, som er særligt egnede til at sætte resultater i relief og til at knytte forbindelser hos eleven mellem det netop oplevede og det tidligere tilegnede. Når elevernes chanceintuition skal udvikles, er de faglige tankevækkere et stærkt hjælpemiddel, men de skal serveres med varsomhed, og de skal opleves i det rette tempo.

Når chanceintuitionen svigter
Elevernes faglige ståsted udgøres her af de grundlæggende begrebsdannelser og metoder fra chancelæren som de er beskrevet i det foregående.

Et helt afgørende begreb er chancesituationens database. Hvad enten det drejer sig om statistiske sandsynligheder, eller om kombinatoriske eller personlige sandsynligheder, forudsættes det at en database ligger til grund for alle de faglige overvejelser og beregninger. Databasen kan indeholde de virkelige data indsamlet fra eksperimenter, eller den kan indeholde tænkte eller ideelle data som er opstillet på grundlag af overvejelser eller overbevisninger. Men uanset hvilken chancesituation der behandles, så vil der ligge en database bag, og enhver faglig beregning, beslutning og overvejelse foretages ud fra denne database.

Til det begrebsmæssige udstyr hører endvidere chancelærens regler. De er i CHANCE ikke formaliserede, men optræder som „naturlige grundregler" der er i god overensstemmelse med elevens umiddelbare chanceintuition.

Blandt chancelærens metoder hører anvendelsen af chancetræer ved behandlingen af sammensatte eksperimenter. Dette generelle hjælpemiddel og dets muligheder i en elementær undervisning er beskrevet i afsnit 4.6 og det omtales nærmere i del 2.

Vi går nu over til at se på typiske fejl i elevernes omgang med sandsynligheder og chanceovervejelser.

7.1 Der er slet ingen database!

En ofte forekommende fejltype i elevernes chanceovervejelser har sin årsag i at eleverne ræsonnerer helt uden at tage hensyn til en bagved liggende database. De lader sig måske påvirke af oplevede hændelser, og de lader disse oplevelser farve deres vurderinger.

Ludo-effekten

Et eksempel har vi i den såkaldte Ludo-effekt. I Ludo, det kendte selskabsspil som generationer har deltaget i, fokuseres der på at opnå et bestemt øjental, som oftest 6, for at få en brik i spil. Spillerne vil derfor være opmærksomme på hvor svært det kan være at opnå en sekser ved terningspil.
Derimod bemærker de ikke at det kan være lige så svært at opnå andre øjental, for sådanne situationer tænkes der slet ikke på i spillet. De overfører denne erfaring med den svære sekser til andre sammenhænge. For dem er kast med en terning dermed ikke et spil med ligevægtede udfald, i hvert fald ikke når det indgår i Ludo. Og denne fejlagtige erfaring overføres let til andre chancesituationer.

Tilsvarende misopfattelser vil kunne indtræffe ved andre spil. Hvis man i spillet koncentrerer opmærksomheden om en bestemt hændelses indtræffen, kan denne hændelses sandsynlighed være udsat for en fejlagtig vurdering.

I en undersøgelse foretaget af INFA i midten af 1980'erne blandt næsten 1000 danske skoleelever i 6. og 7. klasse var det kun 25% af eleverne der var af den overbevisning at en lang række af terningkast ville føre til at de seks øjental forekom stort set lige ofte. Blandt pigerne var det endda kun 17% der havde den overbevisning. - Ikke mærkeligt at der i skolens undervisning kan være vanskeligheder med elevernes chanceforståelse.

Det er en erfaring at de samme elever som ligger under for Ludo-effekten, ofte godt kan give et korrekt svar på hvad der er en rimelig database for et terningkast, nemlig en database hvor de seks øjental er repræsenteret ligeligt. Men i "virkelighedens chancesituationer" svigter den faglige overbevisning, de glemmer helt deres gode solide database, og de handler og overvejer uden at tage hensyn til den.

Forgrundseffekten
Psykologer taler om "forgrundseffekten" i forbindelse med chanceovervejelser, se fx Kahnemann m.fl. [Litteratur afsnit C]. Den foreligger når en indtruffen hændelse får særlig opmærksomhed. Man vil da være tilbøjelig til at tildele den en sandsynlighed som ikke passer sammen med en objektiv saglig vurdering. Efter netop omtalte eller oplevede trafikulykker eller naturkatastrofer kan man være tilbøjelig til at tildele disse hændelser en større sandsynlighed end hvad de ved en nøgtern vurdering burde have. Ved Ludo-spillet sættes det i forgrunden at det tager lang tid at opnå den ønskede sekser, medens alle andre øjental tilsyneladende ikke giver problemer. Derfor vurderes sandsynligheden for sekseren forkert.

En anden udgave af forgrundseffekten har vi i *Lotto-forblindelsen.*

Lotto-forblindelsen: De store gevinsters spil
Ved en rationel overvejelse burde man ikke deltage i lottospil. Tilbagebetalingen i det lange løb ligger i de fleste udgaver af lottospil på under halvdelen af indsatsen, og de store gevinster er meget sjældne. Hvis man deltager i det danske lørdagslotto-spil med 100 rækker hver uge, vil man i gennemsnit få topnoteringen, syv rigtige, 1 gang pr. 1600 år!

De små vinderchancer sløres af at der jo stort set hver uge udbetales gevinster i millionklassen. Hvorfor skulle det ikke blive mig i næste uge?

Den megen omtale af milliongevinsterne fortrænger realiteterne om de ekstremt lave chancer for topgevinster. En sådan fortrængning ses i alle spil med store gevinster: Den stadige påmindelse om udbetaling af store beløb sætter de sjældne vindere i forgrunden, og bevirker at de regulære chance- overvejelser går i stå. Man handler slet ikke ud fra database-overvejelser.

I disse eksempler er der tale om database-forglemmelse. Man tænker og handler uden at tage hensyn til den bagved liggende database. Man reagerer impulsivt, og netop i forbindelse med chancer er dette en meget usikker fremgangsmåde.

Hvor er databasen?
Database-forglemmelsen kan man undertiden se udnyttet i reklamer. En opfordring til køb af præmieobligationer siger: „14 chancer for at vinde en million". Her får man altså at vide at databasen indeholder 14 røde kugler, men ikke noget om hvor mange kugler der i øvrigt findes i databasen. En sådan fremlæggelse af chancer er ganske uden mening. - Men opfordringen er udmærket som afskrækkende eksempel, og den er velegnet til inddragelse i undervisningen i skolen.

Konklusionen er: *Man kan ikke vurdere en chance uden at tage hensyn til den aktuelle database.* Tag arbejdet alvorligt med at fastlægge databasen og at blive fortrolig med dens opbygning. Hvis databasen ændres, vil også chancerne ændres.

I skolens undervisning i sandsynligheder vil det være let at fremdrage eksempler på databasens betydning for chanceovervejelserne. Og det vil være oplagt at belyse databasens betydning for den saglige chancevurdering. At indlede med fastlæggelse af den benyttede database bør være en naturlig start på enhver chanceovervejelse.

I CHANCE er der et stort udvalg af opgaver hvor eleverne gøres fortrolige med de overvejelser der må gå forud for en tildeling af chancer til forelagte hændelser.

7.2 Den forkerte database

"Når Rødt er kommet ud 8 gange i træk på en roulette, så må det være Sorts tur". "Når vi ingen sekser har haft i 10 kast med en terning, så har sekseren større chance i kast nr. 11."

Dette er ganske almindelige ræsonnementer hos såvel børn som voksne. Der er hos spilleren en tro på balance i tilværelsen, en balance som giver sig udslag i at roulettekugler og terninger har en indbygget hukommelse og en retfærdighedssans der sørger for udligning af spilleheldets skævheder.

Ændres databasen undervejs?

Denne misforståelse kan oversættes til at der foretages overvejelser ud fra en forkert database. Bag tankegangen ligger en overbevisning om at databasen ændres efterhånden som spillet skrider frem: "Når Rødt er kommet ud mange gange, så er chancen for Sort større i det næste spil." - Men hvert spil er en ny start inden for den oprindelige database. Alt hvad der hidtil er sket er glemt, der er ingen indbygget balance eller ligevægt i chancespil af den slags.

Og her må vi kæmpe mod mediernes antipædagogiske virksomhed. Dagspressen bringer fx hver uge en oversigt som viser hvor længe siden det er at de forskellige lottotal er blevet udtrukket. Underforstået: Nu er det snart 17's tur til at blive udtrukket, men spil endelig ikke på 4, det har nemlig været udtrukket de sidste tre uger.

Et klassisk eksempel på valg af forkert database:

Rafleakademiet i Tønder

Når nye medlemmer skulle optages i det berømte rafleakademi i Tønder måtte de igennem en prøve. Kun de der besvarede alle spørgsmål rigtigt, ville blive optaget i akademiet.

Her er en opgave som mange ansøgere blev sorteret fra på: På bordet står tre raflebægere. I det ene er der to falske terninger, i det andet er der to ægte terninger, og i det tredje er der én ægte og én falsk terning. Et bæger udvælges tilfældigt, og en af dets to terninger rystes ud på bordet. Hvis det viser sig at denne terning er falsk,

hvad er da sandsynligheden for at den anden terning i bægeret også er falsk?

Denne opgave er et eksempel på at anvendelsen af en forkert database næsten er uundgåelig. Eleverne ser nemlig at der for valget af bæger er to muligheder:

- Bægeret kan indeholde to falske terninger
- Bægeret kan indeholde en falsk og en ægte terning

Når der er to muligheder, slutter de da fejlagtigt at så er der en chance på 50% for hver mulighed. Med andre ord: De benytter en database som vægter de to muligheder ens.

Men det er en fejl, eleverne gør her brug af en forkert database. En nærmere analyse af situationen, eventuel suppleret med en udførelse af det beskrevne eksperiment, vil vise dem hvor fejlen ligger.

Den fejl der optræder i dette eksempel er en klassiker i sandsynlighedsregningen. Og den ses ofte hos begyndere.

Her er den i en anden udgave: I et kast med to mønter er der tre muligheder: To plat, to krone, og en af hver. De tre muligheder må da hver have sandsynligheden 1/3 for at indtræffe. - Men allerede en afprøvning med en halv snes kast med to mønter vil kunne vise eleverne at de nok har tænkt forkert.

Tag spørgsmålet om database op med eleverne

I INFAs chancetekster indledes drøftelsen af betydningen af valget af database med et eksempel (EMMA-tema *Chancer gennem optællinger*, nærmere omtalt i del 2):

Sanne og Malene diskuterer følgende problem: I et klasseværelse er der to ledige to-mandsborde. To elever kommer ind i i klasseværelset og vælger på tilfældig vis

siddepladser ved de to borde. Hvad er sandsynligheden for at de sætter sig ved samme bord?

De to piger løser opgaven ved hver sin database (udfaldsrum), og kommer til to forskellige resultater for den søgte sandsynlighed: 1/2 og 1/3.

Her kan man ikke sige at den ene løsning er bedre end den anden, men eksemplet kan vise at man ved løsningen af en opgave bør specificere den database der benyttes. Uden en sådan angivelse vil det nemt kunne se ud som om der er benyttet en forkert database.

I sandsynlighedsregningens historie har der været adskillige diskussioner som bygger på uklare valg af databaser. En klassiker blandt eksemplerne går under navnet *„Bertrands paradoks"*.

Nogle opklarende opgaver

I det følgende eksempel er der igen anledning til en diskussion af den rette database:

Er udvælgelsen fair?

I to skoleklasser er der følgende antal elever:

- 9A: 5 piger og 10 drenge
- 9B: 3 piger og 12 drenge

Fra de to klasser skal udvælges en pige. Udvælgelsen foregår ved at der først trækkes lod mellem de to klasser (en mønt kastes). Fra den vindende klasse udvælges derefter en pige ved lodtrækning mellem klassens piger.

Spørgsmål: Har alle de 8 piger i de to klasser lige stor chance for at blive udvalgt?

Og her er endnu et eksempel på database-overvejelser:

Den rigtige løsning?
I en æske er der to røde kugler og to sorte kugler. Fra æsken udtages to kugler (ved udtagelse uden tilbagelægning). Hvad er chancen for at de to udtagne kugler har samme farve? Her er to forslag til løsninger.

1. løsning
Der er tre muligheder: To røde kugler, to sorte kugler, en af hver slags. - I to af disse tre tilfælde er kuglerne af samme farve. Svaret er derfor: 2/3.

2. løsning
Der er fire muligheder: To røde kugler, to sorte kugler, første kugle rød og anden sort, første kugle sort og anden rød. - I to af disse fire tilfælde er kuglerne af samme farve. Svaret er derfor: 2/4, dvs. 1/2.

Giv din kommentar til de to løsningsforslag. Hvad er den rigtige løsning?

I denne opgave lægges op til to løsninger med udgangspunkt i hver sin database. Men her er begge løsninger forkerte, ingen af databaserne giver det rigtige svar. Også her vil eleverne gennem eksperimenter let kunne afsløre fejlslutningerne.

7.3 Forkert anvendelse af databasen

Fra matematikundervisningen har eleverne erfaringer med et stort antal eksempler på at det er sund matematik at ræsonnere efter en lineær model. Når 1 kg koster 5 kr., så vil 3 kg koste 3x5 kr.

Den lineære model kommer ind mange steder i hverdagens anvendelser af matematik. Denne model overføres derfor ofte ukritisk til arbejdet med chancer: Når chancen for en sekser er 1/6 i et kast med en terning, så er den 2/6 i et kast med to terninger, altså 1/3.

Men en optælling af databasens 36 elementer vil afsløre at der kun er 11/36 chance, og ikke 12/36, for at få en sekser ved to kast med en terning.

I øvrigt kan eleverne godt se at hvis man gik videre i tankegangen til et kast med 6 terninger, så ville der ikke være 6/6 eller 100% chance for at få en sekser. Og hvad med et kast med mere end 6 terninger? - Men når det drejer sig om to kast har de almindeligvis ingen anfægtelser.

Eleverne benytter databasen forkert når de uden videre gør brug af linearitetsprincippet i forbindelse med fastlæggelse af chancer.

Her kan databaserne desværre tit være noget uoverskuelige, så sagen bliver ikke opklaret gennem en henstilling om blot at tænke i databaser. Vi har da i CHANCE gjort brug af simuleringer ved hjælp af de to værktøjer, LOD og KUGLE1, for på denne måde at lade eleverne foretage en nærmere undersøgelse af sagsforholdene.

Ved LOD undersøges fx chancen for at der i en klasse på 10 elever er to der har fødselsdag samme dag. Denne sandsynlighed findes ved anvendelse af LOD at være ca. 12%. Det er da nærliggende at eleverne gætter på hvad sandsynligheden vil være i en klasse på 20 elever? Her gælder linearitetsprincippet ikke, man kan ikke blot fordoble den fundne sandsynlighed på 12%. Det er derfor en god aktivitet at lade eleverne opleve ved egne anvendelser af LOD at den søgte sandsynlighed for en klasse på 20 elever er over 40%.

Her er to opgaver med eksempler på anvendelse af KUGLE1:

Hvor er chancen størst?
Giv ved hjælp af KUGLE-modeller et bud på følgende to chancer:

1. Chancen for at få mindst 3 seksere i 10 terningkast.

2. Chancen for at få mindst 6 seksere i 20 terningkast.

En prøve
Du deltager i en prøve hvor du ved hver enkelt opgave har 40% chance for at løse opgaven.

Giv ved hjælp af KUGLE-modeller et bud på chancen for at du løser mindst halvdelen af opgaverne:

1. I en prøve med 10 opgaver.

2. I en prøve med 20 opgaver.

I begge disse opgaver vil KUGLE-modellerne afsløre at der ikke kan „tænkes lineært" ved fastsættelsen af de ukendte chancer.

Den farlige model når det gælder chancer
Det er en hyppig iagttagelse at eleverne gør brug af den lineære model i deres omgang med chancer, hvor der benyttes en database som ikke direkte lader sig overskue. Skal eleverne have et nuanceret forhold til sandsynligheder og deres fastlæggelse, kan det skaffes dem gennem et arbejde med simuleringsprogrammer. Og i den sammenhæng har LOD og KUGLE1 vist sig særdeles nyttige. Disse to værktøjer tager vi op i del 2.

Her er endnu et eksempel på anvendelse af KUGLE1:

Hvilket spil giver størst chance?
Sanne får tilbudt at deltage i et spil hvor der kastes med mønter. Man får gevinst hvis mindst 60% af mønterne viser Krone.

Deltagerne kan selv vælge om de vil kaste 5 mønter, 10 mønter, eller 25 mønter. I kast med 5 mønter er der altså gevinst ved mindst 3 kronekast, i kast med 10 mønter er der gevinst ved mindst 6 kronekast, og i kast med 25 mønter er der gevinst ved mindst 15 kronekast.

Hvilken af de tre muligheder skal Sanne vælge?

I denne opgave er det en almindelig antagelse hos eleverne at de tre muligheder stort set har samme chance. Men anvendelsen af KUGLE1 vil afsløre at der er en væsentlig forskel mellem chancerne, den første er helt oppe på 50%, den sidste er kun lidt over 20%.

Det er vigtigt at elevernes "lineære tænkning“ tages op til afprøvning, og at de får kendskab til at en sådan metode har meget begrænsede anvendelser i forbindelse med chancer. Den lineære metode må ikke komme til at fremstå som en universel matematisk metode, men må vurderes kritisk i den enkelte anvendelsessituation.

Forkert repræsentation

En anden fejlagtig anvendelse af databasen optræder hvor sammensatte hændelser benyttes som repræsentanter for mere omfattende grupper af hændelser. For eksempel kan møntkastresultatet „Krone Krone Plat Plat“ i fire møntkast fejlagtigt opfattes som værende identisk med hændelsen "To af mønterne viser Krone og to viser Plat". Derfor vurderes sandsynligheden for hændelsen KKPP højere end for hændelsen KKKK, det er jo meget lettere i fire møntkast at få to krone og to plat end det er at få fire krone.

Her er to opgaver som belyser en sådan situation:

Møntkast
En mønt kastes fire gange. Tegn et chancetræ der beskriver eksperimentet, og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der opnås fire kronekast.
2. Der opnås tre kronekast og ét platkast.
3. Der opnås to kronekast og to platkast.
4. Der opnås ét kronekast og tre platkast.
5. Der opnås fire platkast.

Et tillægsspørgsmål: Hvad er mest sandsynligt i de fire kast med en mønt: At få "to af hver slags“ eller at få "tre af én slags og én af den anden slags“?

Her overrasker det eleverne at "det forkerte resultat“ har størst sandsynlighed. En nærmere analyse vil give dem forklaringen.

Møntkast igen
En mønt kastes fire gange. Hvad er sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Alle kast giver plat.
2. De to første giver plat, de to sidste giver krone.
3. De fire kast giver: plat, krone, plat, krone.

Det er i denne opgave en overraskelse for eleverne at de tre hændelser har samme sandsynlighed. - Også her kan de afprøve de teoretiske resultater gennem eksperimenter.

7.4 Chancetræet bruges ikke

Vi kan lade chancetræet symbolisere anvendelsen af chancelærens regler og metoder. Vi skal da give nogle eksempler på

manglende eller fejlagtig brug af de beregningsregler der ligger indbygget i anvendelsen af chancetræer.

En opgave fra EMMA-temaet Levetid:

En mand på 20 år gifter sig med en 18-årig kvinde. Hvad er sandsynligheden for at de begge lever på deres 50 års bryllupsdag?

(Statistikken fortæller at en 20-årig mand har 67% chance og en 18 årig kvinde 81% chance for at leve i yderligere 50 år).

Denne opgave volder både elever og lærere vanskeligheder. Der er faktisk i de to grupper ikke stor forskel på svarenes variation: Nogle giver som svar den største chance, 81%, andre giver den mindste, 67%. Andre igen tager gennemsnittet af de to tal. Og så er der selvfølgelig nogle der giver det rigtige svar.

Selv elever der har arbejdet med chancetræer, kan give et af de nævnte forkerte svar. Det ser ud som om man over for en sådan opgave forfalder til naive fremgangsmåder, måske nogle man har haft gode erfaringer med ved den traditionelle behandling af regneopgaver.

Den samme opgave findes også i EMMA-temaet Chancetræ:

50 år senere
En 20-årig mand gifter sig med en 18-årig kvinde. Tegn et chancetræ der belyser parrets chance for at leve i 50 år, og beregn sandsynligheden for:

1. Begge er i live 50 år senere.
2. Ingen af dem er i live.
3. Mindst én af dem er i live.
4. Kvinden er i live, manden er død.
5. Manden er i live, kvinden er død.

I denne opgave sørger vendingen „Tegn et chancetræ“ for en korrekt besvarelse af opgaven.

Her er en variation af samme tema:

> Tre fodboldkampe har hver en chance på 70% for at give hjemmesejr. Hvad er chancen for hjemmesejr i dem alle tre?

Et spørgsmål af den art har fået praktisk interesse efter at der er indført pengespil på fodboldkampe i Danmark.

Det er hos ukyndige, dvs. dem der ikke tænker i chancetræer, en hyppig antagelse at hvis der er 70% chance i hver kamp for hjemmesejr, så er der også 70% for at alle tre kampe ender med hjemmesejr. Og på dette grundlag vurderer de risikoen ved at sætte 1000 kr. ind i et væddemål om at de tre udvalgte kampe alle giver hjemmesejr.

Men en anvendelse af chancelærens regler vil vise spilleren at hans væddemål kun kan forventes at give gevinst i 1 ud af 3 uger, idet chancen for at alle tre kampe ender med hjemmesejr jo i chancetræet beregnes til ca. 35% - under forudsætning af at resultaterne i de tre kampe er uafhængige af hinanden.

Gentagelsesfejlen

Man kan kalde den fejlvurdering vi her har omtalt, for "gentagelsesfejlen“: En hændelse som kan beskrives ved at en række enkeltsituationer alle skal indtræffe, vurderes alene på enkeltsituationen. Den bliver dermed ikke indtænkt i et chancetræ hvor en beregning ville vise ganske andre resultater. I træet svarer enkeltsituationen jo til et enkelt grenstykke, medens den sammensatte hændelse svarer til en hel gren i træet.

Hos elever er en sådan tankegang ikke sjælden. Et eksempel: I et spil er er 30% chance for gevinst. Hvor mange gevinster kan du forvente i 10 spil?

Elevens svar: Ingen!

Begrundelsen: Fordi det mest sandsynlige antal gevinster i ét spil er 0, og dette resultat må være gældende for alle 10 spil. (Er der her igen tale om en sund matematisk tankegang som møder sit nederlag i chancelæren?)

I sådanne eksempler vil et chancetræ eller en simulering kunne vise at chancen for at få mindst én gevinst er en ganske anden end den der er knyttet til det enkelte spil.

Små risikoer som gentages

Også i forbindelse med gentagne risikoer vil gentagelsesfejlen kunne iagttages. Små risikoer som gentages et stort antal gange, vurderes ud fra den lille risiko i enkeltsituationen. En behandling af spørgsmålet ved hjælp af et chancetræ eller ved en simulering vil kunne afsløre at mange små risikoer kan løbe op til én stor risiko.

I længden går det galt!

Peter kører hver dag med S-tog til sit arbejde i København. Der er en risiko på 5% for at der foretages billetkontrol på turen. Hvad er chancen for at Peter kommer ud for mindst én billetkontrol i løbet af 10 ture? I løbet af 20 ture? I løbet af 50 ture?

Denne opgave har selvfølgelig sit positive modstykke:

Før eller senere lykkes det!

Karsten spiller på roulette hvor der er 37 mulige resultater, nemlig tallene fra 0 til 36. I hvert spil sætter han sin indsats på sit lykketal nr. 13. Hvad er chancen for at lykketallet kommer ud mindst én gang i løbet af de første

10 spil? Hvad er chancen for at det kommer ud i løbet af de første 20 spil? De første 50 spil?

I begge disse opgaver kommer eleverne frem til en besvarelse ved hjælp af simuleringer ved en KUGLE-model.

Allan C. Malmberg

CHANCE *ET IT-LÆREMILJØ*

Del 2: Læremiljøets opbygning

1. Læring i LEARN-miljøer

De it-læremiljøer der er udviklet i INFA, har fået betegnelsen LEARN-miljøer. Disse miljøer sigter mod at give eleverne optimale betingelser for

Læring	i tilknytning til emnet
Engagement	i arbejdet med emnet
Aktiviteter	til udforskning af emnet
Refleksioner	over indvundne erfaringer
Nyvurdering	af egen kunnen

Et LEARN-miljø opbygges med udgangspunkt i et fagligt tema. Til eksempel kan nævnes at der er udviklet LEARN-miljøer i tilknytning til arbejdet med *tal*, med *geometri* og med *sandsynligheder.*

Et LEARN-tema vil sigte mod bestemte klassetrin. Der vil derfor kunne opbygges flere LEARN-miljøer inden for samme tema, fx temaet *tal*, men med elever fra forskellige klassetrin som målgruppe. De første LEARN-miljøer der er udviklet i INFA-projektet, henvender sig til klassetrinnene 6-10.

Her skal gives nogle kommentarer til de fem sigtepunkter for LEARN-miljøerne.

Læring
Det er en selvfølge at der i læremiljøet tilstræbes en faglig læring inden for det behandlede emne. Læremiljøet skal støtte elevens arbejde med at opnå indsigt og forståelse og at fremme færdigheder og kunnen. En vigtig fase er arbejdet med problemer og udvikling af problemløsningskompetence.

Matematik er karakteriseret ved de mange muligheder for formulering af opgaver og problemer på ethvert fagligt niveau, og netop aktiviteter af problemløsende art er ofte en stærk interessevækker for den motiverede elev.

En sidegevinst ved den målrettede læring i tilknytning til det givne emne kan være en indføring i matematisk metode og tankegang. Også læringens vilkår i form af samarbejder kan blive taget op til afprøvning. Hjælpemidler fra it kan her give gode muligheder for realisering af nye samarbejdsformer, og de kan støtte elevernes drøftelser, deres argumentation og deres opbygning af fælles faglig forståelse.

Et LEARN-miljø kan udmærket fremmes gennem arbejde der foregår i grupper, og ofte vil den væsentlige del af aktiviteterne med de faglige emner forløbe i team-arbejde. Elever kan lære af hinanden, de kan støtte hinanden i de enkelte arbejdsprocesser, og de kan i fællesskab finde frem til løsninger på de problemer de er optaget af. I sådanne samarbejder kan it-værktøjerne være til stor gavn.

Men den egentlige indsigt i et nyt emne og forståelsen af nye sammenhænge i et fagligt område, det er og bliver en individuel foreteelse. Det er ikke *elevgrupper* der skaffer sig viden og forståelse og opbygger nye kognitive strukturer, det er en opgave for *den enkelte elev*. Den enkelte må derfor gennem egne udfordringer og egne aktiviteter nå frem til at opbygge sin faglige kunnen, men han kan selvfølgelig have stort udbytte af samarbejder undervejs i denne proces.

Engagement

Helt afgørende for arbejdets forløb er elevens motivation og engagement. Det er derfor vigtigt at denne side af læringen tages op og gives så gode vilkår som muligt. En del støtte til opbygning af motivationen kan hentes i at læremiljøet beskæftiger sig med problemstillinger der af eleverne opfattes som relevante, vedkommende og meningsfyldte. Endvidere skal de benyttede faglige eksempler være overskuelige og håndterlige.

Det er her it-værktøjet skal stå sin prøve. Det skal blive et naturligt hjælpemiddel for eleven, og det skal være et hjælpemid-

del som er let at anvende. Det må være opbygget på en sådan måde at eleven ikke har vanskeligheder med at sætte sig ind i programmets muligheder, og når værktøjet tages frem igen til fornyet brug, må det kræve et minimum af indsats for eleven at genkalde sig hvad programmet kan og hvordan det anvendes. It-læreværktøjerne bør blive et lige så naturligt hjælpemiddel ved arbejdet med de faglige emner som lommeregneren er det i arbejdet med hverdagens regneprocesser.

Arbejdet i læremiljøet må sigte mod at elevernes nysgerrighed og lærelyst styrkes. Her kan opgaver af åben karakter være et hjælpemiddel, og også elevernes aktivitet med selv at opstille problemstillinger kan være med til at lade matematikken fremtræde som et inspirerende arbejdsfelt.

Aktiviteter

Arbejdet i LEARN-miljøerne bygger i udstrakt grad på at eleverne engagerer sig i aktiviteter af eksperimenterende og udforskende art. De benyttede it-værktøjer skal lægge op til en sådan arbejdsmetode, og de skal give gode muligheder for at eksperimenter og afprøvninger kan blive en naturlig arbejdsform i omgangen med de matematiske emner.

Observationer fra de udførte eksperimenter skal drøftes og analyseres, og antagelser og hypoteser skal opstilles og afprøves. Ofte kan erfaringerne føre til formulering af mere generelle resultater som derefter afprøves ved indhentning af nye data.

Gennem aktiviteterne og de tilhørende overvejelser vil eleverne kunne stifte bekendtskab med en arbejdsmetode og en tankegang som er et karakteristisk træk for en række fagområder.

Men aktiviteter er ikke selve målet for arbejdet, de er kun et middel til at opnå at eleverne får optimale muligheder for deres læring. Aktiviteter er vigtige, men de må ikke hastes igennem. Der skal være tid til eftertanke og overvejelse. Højt tempo og

hurtige skift fra det ene emne til det næste er ikke et gode i beskæftigelsen med matematik.

Refleksion
En vigtig facet i arbejdet i LEARN-miljøerne er elevernes refleksion over egen læring.

Det er afgørende for lære-udbyttet at LEARN-miljøerne giver gode vilkår for denne meget vigtige proces hvor eleverne reflekterer over det faglige stof de beskæftiger sig med, og hvor de får det indplaceret i deres matematiske univers.

Denne refleksion kan støttes gennem en række initiativer:

- Særlig udformning af elevteksten
- Specielle faglige aktiviteter
- Særlige opgavetyper: Faglige opgaver/"Stileopgaver"
- "Meta-indslag": Omtale af læringsmål og sigte
- Uddybende spørgsmål til fremme af refleksion
- Anvendelse af multimedie-virkemidler

Vi kan også fremme elevernes refleksion ved at opfordre dem til at gå ind i aktiviteter som:

- At beskrive faglige situationer af central og typisk art
- At fremstille opgaver som afspejler aktivitetsområdet
- At føre "Logbog": Nedfældelse af erfaringer og oplevelser
- At give egne fremstillinger af aktivitetsområdet
- At tilrettelægge undervisningsforløb for andre elever
- At lade eleverne udforme en mini-lærebog

Der er ingen tvivl om at en indsats med hensyn til støtte og fremme af de faglige refleksioner kan være af stor betydning for læringens vellykkede forløb.

Nyvurdering
Arbejdet i LEARN-miljøet skulle gerne føre til at eleverne udvider deres matematiske univers både med hensyn til det faglige område og med hensyn til det at lære matematik og at få ny indsigt. Eleverne kommer dermed frem til en nyvurdering af deres faglige forståelse, deres viden og kunnen.

Gennem arbejdet opnår de et overblik over det faglige område, og de ser strukturer som de ikke tidligere har været opmærksom på. De får endvidere kendskab til det faglige emnes fundamentale ideer, de ser rækkevidden af de benyttede itværktøjer, og de støttes i deres tiltro til egne evner i arbejdet med matematik.

2. Opbygning af LEARN-miljøer

Af de ovenstående kommentarer vil det fremgå at det er en omfattende sag at udvikle LEARN-miljøer som tilgodeser alle de givne hensigter. Et LEARN-miljø er da heller ikke noget der fremstår fuldt og færdigt efter en første arbejdsindsats, det vil blive revideret, justeret og ændret i en løbende proces.

Når det faglige tema for LEARN-miljøet er fastlagt, kan den egentlige udvikling gå i gang. Her vil følgende faser indgå:

Det faglige stof
Det faglige stof udvælges, struktureres og tilpasses klassetrinnene.

Computerprogrammer
Der udvikles edb-programmer som kan støtte arbejdet med det faglige emne.

Elevtekster
Der udarbejdes tekster, og der udformes små "Prøv selv"-afsnit hvor eleverne kan kontrollere deres forståelse af program og tekst.

Medie-indslag
Der tages stilling til medie-indslag af relevant art, fx videoklip, audiofiler og internet-anvendelse.

Elevernes selvstændige arbejde
Der opbygges oplæg til elevernes selvstændige arbejde med opgaver af forskellig art: Fra delvis færdigformulerede opgaver til ganske åbne problemstillinger.

Refleksioner og tilbageblik
Der indlægges i temamaterialet opgavesituationer og arbejdssituationer som hjælper eleverne til at foretage refleksioner over det udførte arbejde og de opnåede resultater.

Lærerorientering
Der udarbejdes en orientering til læreren med forslag til hvorledes arbejdet med det faglige tema kan foregå.

EMMA-temaer
LEARN-miljøerne opbygges i INFA på de såkaldte EMMA-temaer. EMMA står for "Elektroniske materialer til matematik". Til hvert EMMA-tema foreligger en orientering til læreren, en elevtekst og de tilhørende it-værktøjer.

EMMA-materialerne er tilrettelagt med henblik på at eleverne, enkeltvis eller i grupper, i udstrakt grad arbejder selvstændigt med det faglige stof. Til de enkelte EMMA-temaer vil foreligge følgende materialer:

En orientering til læreren
Der gives en beskrivelse som henvender sig til læreren og som giver et overblik over det foreliggende emne. Beskrivelsen kan være til hjælp for den lærer som overvejer at inddrage emnet i en undervisning der anvender it som værktøj.

Der stilles i beskrivelserne forslag til hvilke klassetrin det pågældende EMMA-tema kan benyttes på, og der gives en vurdering af arbejdets omfang i lektioner. Endvidere gives en kort omtale af følgende punkter:

Baggrund
En begrundelse for at det pågældende emne indgår i undervisningen i skolen. Her kan være henvisning til læseplan og til faglig-pædagogiske redegørelser.

Fagligt indhold
En kort omtale af det faglige indhold i emnet. Beskrivelse af elevaktiviteter.

Elevernes arbejde med EMMA-temaet
En beskrivelse af hvorledes arbejdet med det faglige stof er tilrettelagt i det foreliggende EMMA-tema. Materialerne til det enkelte tema vil almindeligvis være opdelt i små afsnit der hver indeholder forslag til elevaktiviteter.

EMMA * temaer
Som et tilbud til elever med særlig interesse og særlige evner for matematik tilrettelægges nogle såkaldte EMMA-stjernetemaer. Disse temaer stiller større krav til elevernes matematiske modenhed og deres evne til at arbejde selvstændigt.
EMMA * temaerne er tænkt som en udfordring til enkeltelever, de vil næppe kunne anvendes i en undervisning for hele klassen.

Undervisningsmaterialet til eleverne
Undervisningsmaterialet til eleverne er kernen i EMMA. Gennem det skal eleverne have mulighed for at arbejde selvstændigt med de faglige emner. I arbejdet skal indgå udfordrende og inspirerende faglige aktiviteter, og arbejdet skal tilrettelægges med henblik på at eleverne får lejlighed til at reflektere over de opnåede resultater, så de får indpasset de nye erfaringer og den ny viden i deres matematiske univers.

Sådanne refleksioner vil kunne udfolde sig i en lærerstøttet efterbehandling af det faglige arbejde, men det er en erfaring at denne efterbehandling vil kunne få bedre vilkår hvis eleverne undervejs i arbejdet, enkeltvis eller i grupper, gør reflekterende overvejelser og foretager tilbageblik for at sætte de udførte aktiviteter ind i en faglig og erkendelsesmæssig sammenhæng.

Gennem *aktiviteter* gives en indføring i det faglige emne.
Aktiviteterne vil føre eleverne ind i det faglige stof, og de vil belyse de faglige begreber og metoder. Det er afgørende for læringens forløb at eleverne arbejder med at løse de stillede opgaver og gennemfører de foreslåede overvejelser over de indvundne resultater.

I tilknytning til beskrivelsen af elevernes arbejde med temaet gives forslag til supplerende aktiviteter som kan udfolde sig i klasseregi. Der gives ideer til hvad der kan indgå i en fælles indledning til temaet og hvad der kan tages op i en efterbehandling af de faglige emner.

Arbejdsformen for eleverne
Det er INFAs erfaring at arbejdet med matematik bedst foregår under vilkår hvor der er god tid til tankevirksomhed og overvejelser. EMMA-arbejdet er derfor tilrettelagt således at de elektroniske tekster kan hentes ned fra datanettet og udprintes. Eleverne kan derefter i fred og ro sætte sig ind i det faglige stof. Undervejs vil de gå til computeren og benytte de programmer der er knyttet til det pågældende EMMA-tema. Der kan også i EMMA-temaet være givet henvisninger til supplerende materialer som kan hentes gennem opkobling til internet.

Elevernes arbejde foregår således ikke nødvendigvis under stadig opkobling til datanettet. Den solide arbejdsfase forløber i fred og ro i det tempo, eleven vælger. I arbejdet anvendes computeren til de nødvendige kørsler af edb-programmer. Online aktiviteter er ved denne arbejdsform begrænset til at eleverne henter supplerende materiale gennem datanettet.

Det skal nævnes at EMMA-materialerne også foreligger i en version hvor elevaktiviteterne foregår under opkobling til EMMA-databasen. Her kan undervisningen gøre brug af alle muligheder for samspil med datanet og multimedier.

Arbejdet med EMMA-temaerne sigter mod at give eleven:

- Nye faglige oplevelser og udfordringer
- Nye arbejdsformer
- Ny inspiration til samarbejde
- Nye problemløsningsværktøjer

- Ny indsigt i matematikken
- Ny opfattelse af matematikkens rolle
- Ny lyst til at lære og nyt syn på læring

3. Læremiljøet CHANCE: Fire faglige områder

Vi skal nu nærmere beskrive hvad der indgår i it-læremiljøet CHANCE. Indholdet vil i det væsentlige bygge på EMMA-temaer, INFAs elektroniske materialer til matematik.

Materialerne i læremiljøet CHANCE vil knytte sig til følgende fire faglige områder:

- Indledende arbejde med data og sandsynligheder
- Problemløsning i chancesituationer
- Arbejde med databaser og chancer
- Chancer i spil

Indledende arbejde med data og sandsynligheder
Her gives grundlaget for arbejdet med at fastlægge sandsynligheder ud fra data der er indhentet gennem eksperimenter af chancemæssig art. I tilknytning til arbejdet med det statistiske sandsynlighedsbegreb gives en indføring i hjælpemidler fra den deskriptive statistik.

Som et særligt emne behandles serier af eksperimenter.
Gennem computer-simuleringer vises hvordan der i længere serier af eksperimenter kan observeres en frekvens-stabilitet, et forhold der er af afgørende betydning for mange fortolkninger af sandsynligheder i praktiske sammenhænge.

Endvidere gives i dette område en indledende behandling af det kombinatoriske sandsynlighedsbegreb. Her fastlægges sandsynligheder på grundlag af optællinger af gevinstudfald i udfaldsrum med ligevægtede udfald.

Problemløsning i chancesituationer
Dette område er det centrale i CHANCE. Her introduceres tre slagkraftige generelle it-værktøjer til brug for elevernes arbejde med chancesituationer.

To af it-værktøjerne, LOD og KUGLE123, gør brug af computersimuleringer. De ukendte chancer bestemmes gennem indsamling af data fra simulerede eksperimenter. Disse værktøjer vil kunne anvendes ved problemløsninger som ligger langt uden for elevernes rækkevidde ved en traditionel teoretisk behandling af det faglige indhold. Men it-værktøjerne vil kunne fremlægges i en forståelig og meningsfyldt form for eleverne, og de vil opleve at disse værktøjer er meget stærke hjælpemidler i deres arbejde med problemer i chancesituationer.

Det tredje it-værktøj, TRÆ, kan benyttes ved beregning af sandsynligheder for sammensatte hændelser. Dette værktøj er af lidt mere teoretisk art, og det vil næppe kunne blive et alment hjælpemiddel for alle elever. Men det findes i en forenklet udgave i form af programmet ÆSKE, et program der er ganske ligetil at anvende.

Et undervisningsmateriale som bygger på de ovennævnte it-værktøjer til brug ved problemløsning i chancesituationer, vil foreligge i en kommende INFA-publikation.

Arbejde med databaser og chancer

Her arbejdes med to databaser der indeholder data som er let tilgængelige for fortolkninger. Den ene database indeholder oplysninger om danskernes levetid. Det vil være oplagt at anvende den til belysning af elementære problemstillinger vedrørende dødelighed og levetider.

Den anden database indeholder oplysninger om det danske vejr måned for måned fra 1920 og fremefter. Denne database lader eleverne foretage chancemæssige overvejelser i tilknytning til meningsfulde data.

Det er sigtet med disse to databaser at eleverne skal blive fortrolige med at anvende statistik og sandsynlighed som naturlige værktøjer ved beskrivelser og ved problemløsning.

Chancer i spil
Her gives en omtale af nogle af de chancespil der er udviklet i INFA-projektet. Eleverne kan arbejde med situationer hvor der skal foretages beslutninger som træffes på grundlag af chancemæssige overvejelser. Spillene vil kunne bidrage til at give nuancer i elevernes chancebegreb, men de vil også kunne benyttes til at åbne elevernes øjne for spilovertro og for falske forestillinger om mulighederne i hverdagens spil.

*

Indholdet af de fire områder beskrives nærmere i de følgende afsnit. Beskrivelsen vil i det væsentlige blive givet ud fra de lærerorienteringer der knytter sig til de enkelte EMMA-temaer. Elevteksterne vil kun blive inddraget i et beskedent omfang. Det hænger sammen med at elevteksterne i EMMA-temaerne vil være under stadig opdatering med hensyn til indhold og udformning og med hensyn til inddragelse af relevante medieindslag. - De aktuelle versioner af elevteksterne vil kunne ses under EMMA-temaerne på INFAs hjemmeside: www.infa.dk.

I afsnit 10 vil blive givet forslag til hvorledes der kan arbejdes med it-læremiljøer i en undervisningssituation.

4. Indledende arbejde med data og sandsynligheder

Her behandles i afsnit 4.1 *Statistisk sandsynlighed* og *De lange seriers lov* og i afsnit 4.2 *Kombinatorisk sandsynlighed*. De tre emner udgør grundlaget for beskæftigelsen med de faglige emner fra området statistik og sandsynlighed i læremiljøet CHANCE.

Nedenfor gengives orienteringen til læreren.

4.1 Statistisk sandsynlighed

EMMA-tema: Taldata 1-3 Chancer gennem eksperimenter

Klassetrin:	6-10
Omfang:	8-12 lektioner
Programmel:	Kast, Quiz, VisiStat, Serie.
Fagligt område:	Chancer gennem data, deskriptiv statistik, statistisk sandsynlighed.

Baggrund
Arbejdet med tal indtager en central placering i skolens matematik. I det forelagte tema arbejdes med taldata og deres beskrivelse, samt anvendelsen af taldata når der hentes informationer til belysning af sagsforhold. Arbejdet med taldata vil kunne udvikle elevernes talkunnen, dvs. deres talindsigt og talforståelse og deres færdighed i at omgås tal på fornuftig vis.

Temaet giver tillige en indføring i metoder fra den deskriptive statistik. Disse metoder vil kunne anvendes overalt hvor der arbejdes med informationer som fremlægges ved hjælp af taldata. Temaet afsluttes med en omtale af "De lange seriers lov" hvor anvendelsen af serier af eksperimenter tages op.

Eleverne kan gennem arbejdet med dette tema opnå fortrolighed med beskrivelser der inddrager statistiske materialer. De vil endvidere få en indføring i emnet statistisk sandsynlighed.

Fagligt indhold
Temaet beskæftiger sig med taldata og deres fremlæggelse i form af tabeller, diagrammer og mærketal. Behandlingen af temaet sker i nær tilknytning til eksempler hvor spørgsmål om ukendte chancer belyses gennem indsamlede taldata. Temaet giver således grundlag for et indledende arbejde med statistisk sandsynlighed, og de anvendte metoder fra den deskriptive statistik udgør et fundament for et efterfølgende arbejde med statistisk sandsynlighed.

I arbejdet med temaet gøres brug af et edb-værktøj i form af INFA-programmet VisiStat. Dette program kan uden vanskeligheder erstattes af andre edb-programmer som giver mulighed for at inddrage metoder fra den elementære deskriptive statistik.

I temaet behandles de begreber og metoder som i skolens matematik er nævnt under statistik. Der arbejdes med fremlæggelse af talinformation i tabeller som frekvenstabeller og sumtabeller. Af diagrammer og grafer behandles pindediagrammer, søjlediagrammer, trappediagrammer og sumkurver. Endvidere gøres brug af mærketal, såsom gennemsnit, fraktiler, øvre og nedre kvartil og median. Alle de omtalte hjælpemidler introduceres i en meningsfyldt sammenhæng hvor de kan bidrage til arbejdet med at skaffe information om ukendte sandsynligheder.

EMMA-temaet er opdelt i tre dele. I Taldata 1 behandles data der foreligger som enkeltdata, i Taldata 2 behandles grupperede eller intervalopdelte data. I Taldata 3 behandles "De lange seriers lov", et emne der er afgørende for alt arbejde med statistisk sandsynlighed.

Et indledende arbejde kan udmærket begrænse sig til at omfatte del 1. Men det er vigtigt at der senere vendes tilbage til såvel del 2 som del 3.

Arbejde med EMMA-temaet Taldata 1- 3

Indhold

Taldata 1: Elementer fra den deskriptive statistik
Taldata 2: Grupperede materialer
Taldata 3: De lange seriers lov

Taldata 1 Gennem et eksempel med indsamling af data til bestemmelse af en ukendt chance gives en indføring i de grundlæggende begreber fra den deskriptive statistik. Det drejer sig om tabeller, grafiske fremstillinger og mærketal. I Taldata 1 arbejdes udelukkende med data der foreligger som enkeltdata.

Når eleverne undervejs i arbejdet har fremstillet deres egne tabeller og diagrammer og foretaget de tilhørende beregninger, inddrages edb-værktøjet VisiStat. Eleverne kan nu lade programmet gentage arbejdet, og de vil kunne studere programmets udskrifter og herigennem blive fortrolige med hvordan tabeller og diagrammer tager sig ud i edb-værktøjets udgave.

Taldata 1 afsluttes med elevernes arbejde med en række opgaver. De vil her frit kunne anvende edb-værktøjet.

Taldata 2. Her videreføres omtalen af emner fra den deskriptive statistik, idet der nu arbejdes med data der foreligger som grupperede data. De faglige begreber belyses igen i tilknytning til et gennemgående eksempel.

Taldata 3. Her illustreres anvendelsen af korte og lange serier af eksperimenter ved indsamling af data. Det fører frem til "De

lange seriers lov" - en grundlov for al omgang med statistiske sandsynligheder.

***Brugen af edb-hjælpeprogrammer*.** Til brug for arbejdet med EMMA-temaerne Taldata 1 og 2 er udviklet to hjælpeprogrammer *Kast* og *Quiz* der kan benyttes ved elevernes indsamling af data. Programmerne er udformet således at eleverne skal deltage aktivt i arbejdet med at holde styr på data, og der er ikke foretaget nogen automatisering af de arbejdsprocesser der indgår i den statistiske bearbejdelse. Det er en erfaring at der ved en indføring i emnet bør være tale om en sådan nænsom brug af edb hvis ikke eleverne helt skal miste kontakten med hvad de foretager sig. – Til arbejdet med Taldata 3 er udviklet programmet *Serie*.

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. En omtale af samfundets anvendelse af taldata med eksempler fra aviser og elektroniske medier. Eksempler på forskellige former for fremlæggelse af statistik: Diagrammer og tabeller. Eventuelt kan der fremlægges og diskuteres eksempler på hverdagens misbrug af taldata. Eksempler kan eventuelt tages fra INFA-publikationen "De kære tal".

Efterbehandling. Her bør der arbejdes med at opstille oversigter over de benyttede metoder og med drøftelser af anvendelsen af de statistiske hjælpemidler: Hvilke tabeller har man brug for i forelagte opgavesituationer, hvilke diagrammer giver de ønskede informationer, og hvilke mærketal er det mest hensigtsmæssigt at benytte?

Endvidere kan der indledes en drøftelse af hvorledes vi gennem indsamling af data kommer frem til information og viden om ukendte sagsforhold. Efterbehandlingen kan suppleres med en fornyet drøftelse af hverdagens anvendelse og fremlæggelse af taldata, nu måske under en kritisk vinkel hvor man diskuterer alternative fremgangsmåder.

4.2 Kombinatorisk sandsynlighed

EMMA-tema: Chancer gennem optællinger

Klassetrin:	6-10
Omfang:	4-6 lektioner
Programmel:	intet
Fagligt område:	Grundbegreber fra sandsynlighed, kombinatorisk sandsynlighed

Baggrund
Temaet beskæftiger sig med grundbegreber vedrørende sandsynlighed. I dette tema er det den kombinatoriske sandsynlighed der behandles, dvs. sandsynligheder der fremkommer gennem optælling af gevinstudfald i et udfaldsrum bestående af ligevægtede udfald.

Temaet udgør sammen med temaet "Taldata 1 – 3 Chancer gennem eksperimenter" det materiale der kan være fundament i den indledende behandling af fagområdet.

Fagligt indhold
Temaet behandler udfaldsrum og ligevægtede udfald. Der gøres brug af de klassiske eksempler: møntkast, terningkast og simple stikprøveudtagelser fra små samlinger af kugler. De benyttede udfaldsrum er af enkel og overskuelig art, og af sammensatte eksperimenter gøres kun brug af sammensætninger af to deleksperimenter.

I tilknytning til arbejdet med bestemmelse af sandsynligheder gives en første indføring i brugen af reducerede udfaldsrum ved beskrivelser hvor der foreligger ekstra information om det betragtede chanceeksperiment. Sådanne reducerede udfaldsrum behandles nærmere i EMMA-temaet "Chancetræer" (se afsnit 7 nedenfor).

Emnet Stikprøver tages op igen i tilknytning til programmet KUGLE1. Se herom i afsnit 6.1

I arbejdet med temaet "Chancer gennem optællinger" gøres ikke brug af edb-programmer. Optællingerne i de benyttede eksempler og opgaver er af en så enkel karakter at hjælpemidler fra kombinatorikken ikke er nødvendige. Hvis læreren finder det ønskeligt, kan der dog inddrages et program til brug for beregning af kombinatoriske sandsynligheder. Elever kan da med programmet foretage kontrol af egne beregninger. Et sådant program findes i INFA-programmet *Terning* der giver mulighed for beregning af sandsynligheder i forbindelse med kast med terninger.

Der lægges i temaet vægt på arbejdet med opstilling af udfaldsrum. I eksempler og opgaver drøftes situationer hvor den fremlagte chancesituation lader sig beskrive ved forskellige udfaldsrum.

En videre behandling af kombinatoriske sandsynligheder er givet i EMMA*temaet Kombinatorik.

Arbejde med EMMA-temaet Chancer gennem optællinger

Indhold

1. Et kast med en terning
2. Vi kaster med mønt
3. Vi kaster med to terninger
4. Stikprøver med tilbagelægning
5. Stikprøver uden tilbagelægning
6. Hvilket udfaldsrum?
7. Opgaver

Afsnit 1- 3. Gennem et indledende eksempel med et klassisk chanceeksperiment gives en indføring i nogle grundlæggende

begreber fra arbejdet med sandsynligheder: Udfald, udfaldsrum, ligevægtede udfald, gevinstudfald, sandsynlighed.

Begreberne eksemplificeres videre i omtalen af simple sammensatte eksperimenter, først gennem to kast med en mønt, og dernæst ved to kast med en terning.

Afsnit 4-5. Her behandles stikprøveudtagelse i den mest elementære form hvor der blot udtages to elementer fra en forelagt samling. De to typer af udtagelser, med tilbagelægning og uden tilbagelægning, behandles i hver sit afsnit.

I tilknytning til stikprøveudtagelser introduceres begrebet *reduceret udfaldsrum*. Dette emne optræder her blot i formen "et udfaldsrum som afspejler at der foreligger ekstra informationer om den forelagte chancesituation". I en videre behandling, som fx i temaet "Chancetræer", vil de reducerede udfaldsrum naturligt føre til behandlingen af betingede sandsynligheder.

Afsnit 6. Her gives et elementært eksempel hvor den forelagte chancesituation naturligt kan beskrives ved forskellige udfaldsrum.

Afsnit 7. I dette afsnit findes et udvalg af opgaver som kan belyse de behandlede emner. Det skal anbefales at der gøres en stor indsats i arbejdet med disse opgaver. Chancesituationer er et nyt fagligt område for eleverne, og det er vigtigt at de får et nuanceret billede af hvordan sådanne situationer kan fremtræde.

Mange af opgaverne vil være velegnede til et arbejde hvor eleverne i små grupper får lejlighed til at drøfte de forelagte chancesituationer.

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. En omtale af hvordan chancesituationer optræder i vor hverdag. Eksempler fra spil, fra sygdom og sundhed, fra trafikstatistikker, fra kriminalstatistikker, etc.

Endvidere en drøftelse af hvordan vi anvender chanceudtryk i vort sprog: "Det er sandsynligt", "Der er 50-50 chance for", "Det er usandsynligt at ...",etc. Også til eksempel en drøftelse af hvad vi mener når vi siger: "Der er 30% chance for...", eller "Det er 100% sikkert at ..", etc.

Efterbehandling. Her bør de nye begreber tages op til drøftelse. Især begrebet udfaldsrum og ligevægtede udfald.
Drøftelsen kan måske bedst foregå med udgangspunkt i nogle af opgaverne fra EMMA-temaets afsnit 7.

Der kan også vendes tilbage til den indledende drøftelse i hvad eleverne lægger i hverdagens chanceudtryk. Har det ændret sig i lys af deres arbejde med temaet?

5. Problemløsning i chancesituationer: LOD

I dette og de følgende to afsnit behandles de centrale problemløsningsværktøjer der indgår i CHANCE:

LOD (afsnit 5)
KUGLE123 (afsnit 6)
TRÆ (afsnit 7)

I tilknytning til omtalen af LOD og KUGLE123 er givet nogle uddybende kommentarer med hensyn til anvendelsen af disse stærke værktøjer i undervisningen,

5.1 EMMA-tema: Hvad er chancen? Brug LOD

Klassetrin:	6-10
Omfang:	3-5 lektioner
Programmel:	LOD
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, information gennem eksperimenter.

Baggrund
Arbejdet med statistisk sandsynlighed står centralt i de nye læseplaner. Med programmet LOD får eleverne adgang til et let-tilgængeligt edb-værktøj som kan benyttes i forbindelse med fastlæggelse af sandsynligheder i chancesituationer af vidt forskellig art.

LOD bygger på en arbejdsform hvor eleverne eksperimenterer og afprøver. Med dette værktøj kan eleverne med indsigt behandle chancesituationer som ellers ville ligge uden for deres faglige rækkevidde.

Fagligt indhold
Der arbejdes med en edb-model som kan benyttes til simulering af chancesituationer der kan beskrives som *lodtræknin-*

ger. EMMA-temaet vil behandle en række eksempler på situationer af denne art. Ved brug af LOD vil eleverne kunne fastlægge sandsynligheder for hændelser som kan beskrives i tilknytning til den givne lodtrækning.

I arbejdet med LOD fremhæves *modelbegrebet*. Til en forelagt chancesituation opstilles en model som afspejler chancesituationen på bedst mulig vis. Derefter "køres modellen på computer" ved hjælp af LOD. De opnåede resultater fra kørslen fortolkes og oversættes til udsagn om chancer og risikoer i den oprindelige situation.

Undervisningsmaterialet lægger op til at eleverne gennem eksperimenterende og udforskende aktiviteter beskæftiger sig med chancesituationer af hverdagsagtig art. Arbejdet med løsning af problemer ved brug af LOD vil med fordel kunne foregå i små grupper hvor problemerne angribes fra flere sider og hvor fortolkningen af opnåede resultater kan udsættes for nærmere overvejelse og diskussion.

Det er et mål for arbejdet at eleverne oplever LOD som et alment og lettilgængeligt værktøj der kan benyttes i arbejdet med chancesituationer. Det er en erfaring at LOD ikke må automatiseres for meget, idet eleverne da mister forbindelsen med de forelagte chancesituationer. Eleverne må derfor i arbejdet med LOD selv "røre ved de indsamlede data" og foretage de nødvendige optællinger.

Arbejde med EMMA-temaet: Hvad er chancen? Brug LOD

Indhold

1. Fødselsdage
2. Mere om fødselsdage
3. Bilnumre og chancer
4. Et spil med terninger
5. Nabotal i Lotto
6. Hvor stor bliver gevinsten?
7. Et besøg i Chanceland
8. Et spil med mønter
9. Er det tilfældigt?

Kommentarer til arbejdet med LOD

Fødselsdage og **Mere om fødselsdage**. Gennem et eksempel indføres eleverne i brugen af LOD. Den chancesituation der her fremlægges, er overskuelig og let forståelig. Problemstillingen følges op med det klassiske eksempel om chancen for dobbeltfødselsdag i en skoleklasse. Gennem anvendelsen af LOD indsamles data, og der gives et gæt på den ukendte sandsynlighed.

I de øvrige afsnit belyses anvendelsen af LOD i et udvalg af chancesituationer. Hvert afsnit behandler et lettilgængeligt og overskueligt problem. I de tilhørende "Prøv selv"-afsnit vil eleverne arbejde med varianter af det givne problem. I nogle situationer er anvendelse af LOD ganske ligetil, i andre må der en portion kreativ tankevirksomhed til.

Kommentarer til arbejdet med LOD. Eleverne møder i problemløsningen med LOD en arbejdsform som de måske ikke har erfaringer med. I det afsluttende afsnit gives der nogle kommentarer hertil. Fremhæves skal det også at i arbejdet med LOD lægges der til stadighed op til at eleverne reflekterer over de opnåede resultater: Var resultaterne overraskende? Er der resultater som vi næsten ikke kan tro på? Kan vi give nogen forklaring på de uventede resultater?

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. Drøftelse af situationer fra hverdagen hvor der forekommer lodtrækninger og udvælgelser som kan beskrives ved tilfældig udtagelse fra en samling af elementer. Det kan også være formålstjenligt at drøfte indholdet af chanceudsagn: Hvad mener vi når vi siger at der er stor/lille chance for noget? Hvad betyder det at noget er usandsynligt? Overvej hvor meget vi "taler eller tænker i chancer " i hverdagen.

Efterbehandling. På nænsom vis kan læreren gå ind på spørgsmålet om hvor tæt de opnåede resultater ligger på de teoretiske værdier. Er der nogen "rigtig" værdi? I nogle få tilfælde vil eleverne kunne følge tankegangen i en teoretisk udledning. I andre må eleverne forlade sig på lærerens faglige autoritet. - Spørgsmål om eksperiment-usikkerhed kan eventuelt tages op, fx ved brug af LODs indbyggede beregning af usikkerhedsintervaller. - I efterbehandlingen kan også indgå en fase hvor eleverne selv finder situationer hvor LOD kan anvendes som et værktøj i problemløsningen.

Der kan endvidere foretages en læringsmæssig efterbehandling. Eleverne har i arbejdet med LOD set hvordan der kan arbejdes med et værktøj som bygger på indsamling af data fra eksperimenter. De har altså løst matematiske problemer ved en ny arbejdsmetode.

Afslutningsvis bør læreren i samarbejde med eleverne drøfte om sigtet for arbejdet med LOD skønnes at være opnået gennem EMMA-temaet. Dette kan gøres i en diskussion af følgende spørgsmål:

- Kan eleverne bringes til at „tænke i modeller" i deres arbejde med løsning af problemer?
- Kan eleverne få en sådan indsigt i LODs rækkevidde at deres arbejde med problemløsning får en ny dimension?

- Kan eleverne arbejde selvstændigt med anvendelsen af LOD ved løsning af problemer?
- Kan eleverne gennem arbejdet med LOD få kendskab til principielle spørgsmål vedrørende brugen af matematik på virkeligheden?

5.2 Om programmet: Hvad LOD kan

LOD kan udtage tilfældige tal fra et givet talområde. Udtagelsen foregår som en lodtrækning mellem de forelagte muligheder, og udtagelsen kan være med eller uden tilbagelægning efter den enkelte udtagelse.

Dubletter og nabotal

I fremlæggelsen af de udtagne tal kan programmet sortere dem efter størrelse, og programmet kan markere hvor der er tale om udtagelse af dubletter, altså samme tal er udtaget flere gange. Programmet kan også markere hvor der er udtaget nabotal. Netop disse to situationer, dubletter og nabotal, spilles der på i de benyttede anvendelser af programmet til beregning af ukendte chancer.

LOD er et primitivt program som ikke er udstyret med særligt mange matematiske hjælpefunktioner. Ideen er at LOD blot skal være et hjælpemiddel i elevernes indsamling af data. Databehandlingen skal foretages af eleverne og ikke af programmet. Det er en erfaring fra arbejdet med indsamling af data at hvis databehandlingen automatiseres for meget, så mister eleverne jordforbindelsen. LOD er tidligere også blevet afprøvet i en udgave (LOD2) hvor databehandlingen og optællingen af interessante tilfælde blev udført af programmet. Disse faciliteter er imidlertid - af pædagogiske grunde - ikke indlagt i LOD. Her må eleverne deltage aktivt i alle faser af databehandlingen.

Her er et eksempel på resultater fra 10 eksperimenter hvor der i hvert eksperiment udtages 4 tal fra talområdet 1..12.

Udtagelsen er med tilbagelægning.

```
LOD-Model:

Der udtages tal i talområdet 1..12.
Et eksperiment består i at udtage 4 tal.
Det er tilladt at udtage samme tal flere gange.
De udtagne tal sorteres efter størrelse.
```

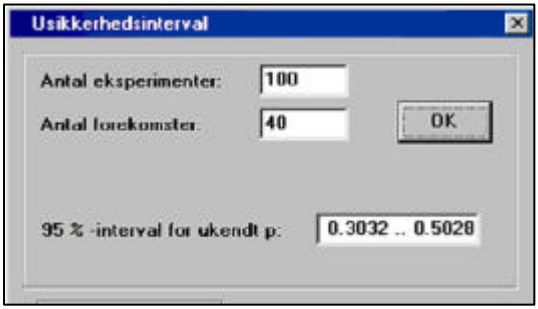
```
Tabel:

  1:    2     3 ---  3      4
  2:    6     7      9     12
  3:    3     7      8     12
  4:    2 --- 2      5     11
  5:    2     8 ---  8      9
  6:    3     8     10     12
  7:    3     6     10     11
  8:    6     9     12 --- 12
  9:    3 --- 3 ---  3      7
 10:    1 --- 1      7      9
```

På skærmen kan tydeligt ses hvor samme tal forekommer flere gange: Det sker i eksperiment nr. 1, nr. 4, nr. 5 og nr. 8, 9 og 10. Markeringen af de interessante situationer foretages således af programmet, men eleven må selv stå for optællingen af dem. Og selvfølgelig også for den konklusion der kan drages på grundlag af den udførte serie af eksperimenter.

Usikkerhedsinterval

I programmet er indlagt en mulighed for at beregne et usikkerhedsinterval for de chancer der bestemmes ved kørsler af programmet. Hvis en hændelse til eksempel indtræffer i 40 ud af 100 eksperimenter, så kan der beregnes et såkaldt 95%-chanceinterval for den ukendte chance:



Beregningen viser at den ukendte chance med 95% sandsynlighed ligger mellem 0.3032 og 0.5028.

5.3 "Pædagogisk simulering"

Arbejdet med LOD er tilrettelagt således at LOD kun leverer data. Der foretages ikke i programmet nogen databehandling af de opnåede resultater.

Eleverne skal derfor studere programmets udskrifter, enten på skærm eller på papir, og selv udføre en manuel databehandling og en efterfølgende fortolkning af den. I arbejdet med LOD kan eleverne således komme til at skulle undersøge udskriften fra en kasteserie på 100 eller 200, eller måske endnu flere eksperimenter.

Dette kan umiddelbart synes ganske unødvendigt. LOD kunne jo let udbygges med en automatik som selv sørgede for at optælle de relevante data, og som derefter opstillede en statistik over deres forekomst. Eleverne kunne således undgå det kedelige arbejde med at gennemgå alle de lange udskrifter fra programmet.

Det er imidlertid ikke uden problemer at gøre programmet så strømlinet. Det viser sig nemlig at hvis eleverne får rådighed over for meget automatik i simuleringsprogrammet, så er der en risiko for at de i løbet af ganske kort tid mister fornemmel-

sen for hvad der egentligt foregår i simuleringen. De mister sansen for indholdet i de opnåede data, og de føler sig usikre når de efterfølgende skal foretage en fortolkning af de resultater der udskrives fra programmet.

Derfor gør LOD brug af hvad der kunne kaldes *"en pædagogisk simulering"*, en nænsom, halvautomatisk simulering hvor den egentlige databehandling er overladt til eleven. Kun derved sikres det at eleven til stadighed er helt klar over hvad de enkelte data fra programmet står for. Med den pædagogiske simulering udnyttes datamaskinens evne til at simulere chancesituationer, men de leverede rådata viderebehandles ikke af computeren, derimod af brugeren selv.

Erfaringer fra en sådan udformning af simuleringsprogrammerne er indhentet gennem anvendelsen af LOD. En fuldt udbygget version med automatisk databehandling foreligger i programmet LOD2. Her kan programmet selv optælle og opstille tabeller over de forskellige datas forekomst. Men programmet er ikke velegnet til at blive benyttet af elever. I løbet af kort tid husker de ikke mere hvilke data der indgår i programmets databehandling, og deres fortolkning af de opnåede resultater bliver ganske flimrende. Vi har derfor i INFA-projektet stemplet LOD2 som "forbudt for elever", og det indgår da heller ikke i INFA-Klubbens programmel.

I stedet nøjes vi med LOD, og i det har vi et overskueligt og simpelt værktøj som kan håndteres af enhver elev. Med det kan eleverne belyse chanceforhold i forelagte situationer, og de vil med erfaringer fra udvalgte eksempler blive fuldt fortrolige med værktøjets mange muligheder.

5.4 LOD Et oplagt chance-læremiljø

Det er et mål at lade LOD-modellen blive et værktøj for eleverne i deres arbejde med hverdagens chancesituationer, på samme måde som den lineære model er et værktøj i elevernes

arbejde med opgaver fra hverdagens mange „regnesituationer“.

Vi vil derfor gøre dem fortrolige med værktøjets benyttelse, og vi vil gennem eksempler vise dem LODs muligheder og begrænsninger.

Det er vort indtryk at der i LOD ligger et pædagogisk potentiale som bør udnyttes. Anvendelser af den lineære model i regneopgaver fører sjældent til overraskende resultater som kan give anledning til elevernes undren. Dette sker derimod ofte med anvendelsen af modellen i LOD. Med hensyn til chancesituationer er elevernes intuition ikke særlig sikker, og det vil være ganske almindeligt at resultater fra LOD fører til reaktioner som: „Det kan simpelthen ikke passe, der må være noget galt!“

At der her ligger et godt udgangspunkt for arbejdet med faglige oplevelser som kan føre til indsigt og forståelse, siger sig selv. Det er disse muligheder vi sigter mod at udnytte i arbejdet med chancesituationer under anvendelse af LOD.

En anden arbejdsform

I forbindelse med introduktionen af LOD gøres eleverne opmærksom på at de med LOD kommer ud for en arbejdsform som de måske ikke er vant til at benytte i matematik:

> Du skal her arbejde med matematik på en anden måde: Der er ikke noget facit der er det eneste rigtige, og du kommer ikke frem til de ønskede resultater ved at foretage beregninger eller matematiske udledninger.
>
> Du skal i stedet udføre eksperimenter. Du skal indsamle data fra eksperimenter, og på grundlag af dine data skal du give et bud på en løsning til det forelagte problem.
>
> Du kan ikke vide hvor god din løsning er, men du kan altid afprøve et tvivlsomt resultat ved at udføre nye ræk-

ker af eksperimenter eller ved at hente data fra dine kammerater.

Det er endvidere et sigte at støtte elevernes refleksion over opnåede resultater:

I opgaver med chancesituationer er det vigtigt at du tænker over de resultater du opnår: Er det en overraskende stor eller lille chance, du er nået til? Eller er resultatet nogenlunde som du havde ventet det?

Det vil være en god ide om du vænner dig til at give et gæt på de ukendte chancer inden du går i gang med eksperimenter. Når du derefter har indsamlet dine data og givet dit svar på løsningen af det forelagte problem, bør du sammenligne med dit start-gæt. Måske du kan lave en lille gættekonkurrence med en eller flere af dine kammerater. På denne måde kan I afprøve hvor god jeres chancefornemmelse er.

Gennem sådanne forudgående gæt bliver eleverne sat i gang med at overveje de forelagte situationer. Gættene vil give anledning til samtaler eleverne imellem, både forud for eksperimenterne og efter at eksperimenterne er udført.

Faglige tankevækkere

I arbejdet med LOD kan inddrages opgavesituationer hvis løsning giver anledning til undren og skepsis hos eleverne. Der vil kunne findes opgaver hvor løsningerne i den grad strider mod elevernes chanceintuition at de vægrer sig ved at tage resultaterne for gode varer. Sådanne faglige eksempler kalder vi *„tankevækkere“*, og de er nærmere omtalt i afsnit 6.7 i del 1. De er velegnede til at vække elevernes faglige interesse, og de fører ofte til en række aktiviteter af typen *„gå på opdagelse“*. Her benytter eleverne de faglige værktøjer til at udforske områder i et ukendt land.

Det er en kendsgerning at netop sandsynlighedsregningen er rig på sådanne faglige tankevækkere. Hertil kommer at disse problemsituationer ofte kan føre til faglig undren både hos eleverne og deres lærer. Der kan derfor i undervisningen opstå værdifulde drøftelser hvor elever og lærer kan have lige kvalificerede forslag til løsning af de faglige problemer.

Der foreligger ved valget af eksempelmateriale fra det faglige område alle nuancer af sværhedsgrad: Fra *det lette* hvor eleverne efter at have givet deres løsning gennem data fra LOD også kan gennemføre en teoretisk behandling af opgaven. Gennem *de mere komplekse situationer* hvor eleverne kan få hjælp hos deres lærer til et eventuelt arbejde med de teoretiske overvejelser. Og til *de vanskelige opgaver* hvor både elever og lærer må støtte sig til de data der kan hentes gennem anvendelsen af LOD, og hvor en teoretisk behandling ikke er inden for deres rækkevidde.

Hvor de teoretiske beregninger lader sig gennemføre, er det en særlig oplevelse for eleverne at erfare hvor gode vurderinger af de ukendte chancer der opnås gennem simuleringen med LOD. Holdningen hos eleverne kan somme tider udtrykkes ved: *Hvorfor dog bruge så megen tid og kræfter på det svære teoretiske, vi kan jo løse opgaverne lige så godt ved hjælp af LOD*.

Modeltænkning med LOD

Det har været naturligt i INFA-projektet at inddrage edb-modeller som et centralt hjælpemiddel i undervisningen i chancelære.

Blandt disse modeller er LOD af særlig interesse da den er så lettilgængelig for eleverne. Alle faser i arbejdet med modellen ligge åbne for dem: *Det er deres opgave at afgøre i en forelagt problemsituation om modellen kan anvendes, og dernæst at fastlægge hvordan den bruges, at bestemme hvilke inddata der skal benyttes, og endelig at fremlægge og fortolke de op-*

nåede resultater fra simuleringen samt at drage eventuelle konsekvenser.

Det fascinerende ved anvendelsen af en model som LOD er at eleverne her får adgang til et hjælpemiddel som sætter dem i stand til at arbejde med et stort repertoire af problemstillinger. Gennem programmets simuleringer kan eleverne beskæftige sig med faglige emner som i en traditionel faglig opbygning ville være utilgængelige på folkeskolens klassetrin. Og vi kan med anvendelse af et sådant program rokke ved den matematiske tradition: Kun at behandle emner der inddrager faglige begreber og metoder som eleverne behersker til bunds.

Med anvendelsen af LOD er det afgørende ikke den faglige matematik der gemmer sig i emnet, men de begrebsmæssige elementer der indgår i sagen. Enhver problemstilling som kan fremlægges for eleverne og forstås af dem, vil også kunne tages op i undervisningen og behandles ved hjælp af LOD. Hvis blot problemstillingerne begrebsmæssigt er tilgængelige, vil eleverne kunne arbejde med dem.

Fra arbejdet med LOD foreligger tilbagemeldinger fra INFAs projektskoler som viser at elever på de højere klassetrin med udbytte kan inddrage hjælpemidler af denne art i deres beskæftigelse med chancelæren.

6. Problemløsning i chancesituationer: KUGLE123

KUGLE-programmerne, KUGLE1, KUGLE2 og KUGLE3, er tilrettelagt med henblik på undervisningen i 7.-10. klasse. De vil kunne finde anvendelse ved arbejdet med begreber fra sandsynlighedsregning og statistik. I programmerne kan eleverne indsamle data fra chancesituationer. De kan efterligne eksperimenter som kan beskrives ved modellen "tilfældig stikprøveudtagelse" fra en population der indeholder elementer af to typer. Stikprøveudtagelsen kan være med tilbagelægning eller uden tilbagelægning.

Arbejdet med KUGLE123 sætter modelbegrebet i spidsen. Til de forelagte chancesituationer opstilles en kuglemodel som afspejler chancesituationen på bedst mulig vis. Derefter "køres" kuglemodellen på datamaskinen ved hjælp af programmet. De opnåede resultater fra datamaskinen fortolkes og føres tilbage til udsagn om den oprindelige chancesituation.

Arbejdet med KUGLE-programmerne kan derfor også give eleverne en indførelse i beskæftigelsen med modeller og deres anvendelse ved løsning af problemer. På dette punkt supplerer programmerne behandlingen af de emner der er indført i forbindelse med programmet LOD.

De tre KUGLE-programmer handler alle om udtagelse fra en æske med kugler. Nogle af kuglerne i æsken er røde.
Programmerne opstiller modeller for kugleudtagelsen og giver oplysning om chancer vedrørende følgende problemer:

KUGLE1: Hvor mange røde kugler udtages?
KUGLE2: Hvornår udtages den første røde kugle?
KUGLE3: Hvornår er alle de røde kugler udtaget?

De tre kugleprogrammer er nærmere beskrevet i tre EMMA-temaer:

Hvad er chancen? Brug KUGLE1
Hvad er chancen? Brug KUGLE2
Hvad er chancen? Brug KUGLE3

Om programmet: Hvad KUGLE123 kan

De tre Kugle-programmer udtager kugler fra en æske. I æsken er der et antal kugler hvoraf nogle er røde. Udtagelsen kan være med tilbagelægning eller uden tilbagelægning. I KUGLE1 tæller programmet op hvor mange røde kugler der udtages i hvert eksperiment. I KUGLE2 tælles op hvor mange kugler der udtages til og med at den første røde kugle foreligger. Og i KUGLE3 tælles op hvor mange kugler der udtages før alle røde kugler er udtaget.

Sumtabel

De tre Kugle-programmer foretager en databehandling af de opnåede resultater. De laver en liste over de opnåede resultater i serien af eksperimenter og opstiller en sumtabel over dem.

```
Antal udtagne      Antal        Antal    Kumuleret
   kugler      eksperimenter     i %         %

     1              4          20.00       20.00
     3              3          15.00       35.00
     4              1           5.00       40.00
     5              2          10.00       50.00
     7              1           5.00       55.00

     8              1           5.00       60.00
     9              1           5.00       65.00
    10              1           5.00       70.00
    11              2          10.00       80.00
    12              1           5.00       85.00

    14              1           5.00       90.00
    27              1           5.00       95.00
    35              1           5.00      100.00

Udført: 20 eksperimenter Gennemsnit: Antal kugler pr.
eksperiment:  8.55
```

Her er sumtabellen fra en serie på 20 eksperimenter med KUGLE2. I æsken findes der 50 kugler, hvoraf 5 er røde. Fra æsken udtages kugler indtil der udtages en rød kugle. Udtagelsen er med tilbagelægning. Sumtabellen viser hvor mange kugler der blev udtaget i de enkelte eksperimenter.

Vi ser at der i fire eksperimenter kun var behov for at udtage én kugle for at få en rød kugle. Men vi kan også se at der var et eksperiment hvor vi måtte udtage hele 35 kugler før vi fik en rød kugle. - Vi ser at der i gennemsnit i de 20 eksperimenter måtte udtages 8.55 kugler før vi fik en rød kugle.

Statistik-modul
Vi har herefter foretaget en kørsel af en serie på 100 eksperimenter med den samme situation: Der er 50 kugler i æsken og 5 af dem er røde.

Vi viser nu en anden af de faciliteter der findes i Kugle-programmerne, den såkaldte Statistik-modul der giver os en liste over fraktilværdier i de indsamlede data.

Til højre i udskriften nedenfor ser vi at der i gennemsnit måtte bruges 10.23 udtagelser for at få en rød kugle. Det højeste antal udtagelser der forekommer er 51, og det mindste antal er 1 som vi også så det i den korte serie fra før.

Af tabellen over fraktilværdier kan vi fx se at 50%-fraktilen (medianen) svarer til 6 udtagelser. Det vil sige at vi i 50% af eksperimenterne kunne klare os med fra 1 til 6 udtagelser for at få en rød kugle.

Statistik over 100 eksperimenter:

Talområde	Fraktil	
1..1	1 %	
1..1	5 %	
1..1	10 %	
1..2	25 %	Gennemsnit: 10.23
1..6	50 %	Maximum : 51
1..14	75 %	Minimum : 1
1..25	90 %	
1..34	95 %	
1..38	99 %	

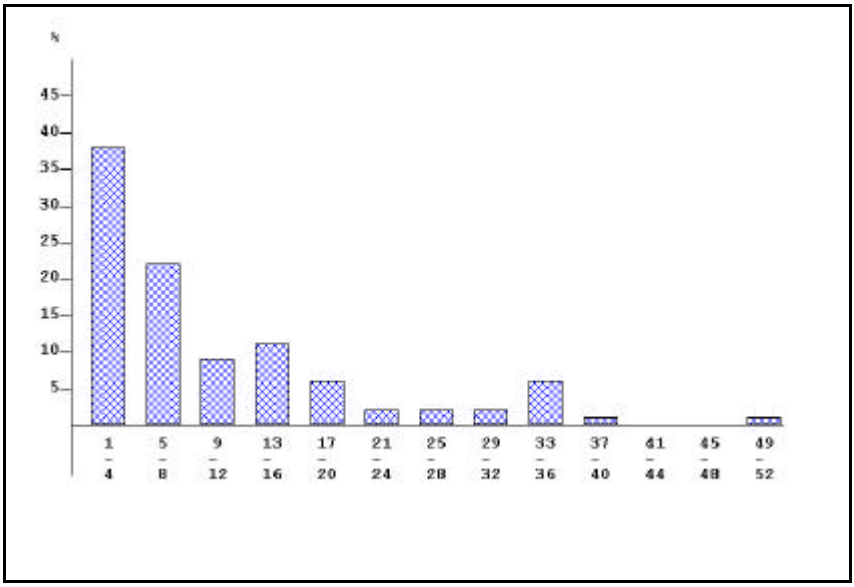
	Talområde	Frekvens
*	1..5	49.0 %
*	1..10	64.0 %

Talområde-feltet kan vi benytte hvis vi vil have oplysninger ud over dem der står i tabellen. I talområde-feltet indtastede vi først området 1..5. Programmet svarede med tallet: 49%. Det vil sige at vi i 49% af eksperimenterne kunne klare os med op til 5 udtagelser for at få en rød kugle. - Vi har derefter indtastet området 1..10 og får her svaret: 64% Det betyder at vi har 64% chance for at klare os med op til 10 udtagelser.

Statistik-modulen er et vigtigt redskab ved elevernes vurdering af de opnåede resultater. Med det til rådighed kan der let gives en karakteristik af de indsamlede data i serien af eksperimenter.

Søjlediagram

I Kugleprogrammerne er endvidere indlagt en mulighed for opstilling af et søjlediagram over udtagelsernes forløb. En sådan grafisk fremstilling kan supplere de informationer der gives gennem sumtabel og Statistik-modul.



6.1 EMMA-tema: Hvad er chancen? Brug KUGLE 1

Klassetrin:	7-10
Omfang:	3-5 lektioner
Programmel:	Kugle123
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, information gennem eksperimenter, stikprøver

Baggrund

Programmet KUGLE123 (som indeholder KUGLE1) udgør sammen med LOD et værktøj til arbejdet med bestemmelsen af sandsynligheder gennem data fra eksperimenter. Det statistiske sandsynlighedsbegreb er derfor også i centrum i arbejdet med KUGLE1.

KUGLE1 bygger på en arbejdsform hvor eleverne eksperimenterer og afprøver. Med dette program kan eleverne med indsigt behandle chancesituationer som ellers ville ligge uden for deres teoretiske rækkevidde.

Fagligt indhold
Med KUGLE1 kan eleverne efterligne udtagelsen af kugler fra en æske. I æsken er der et antal kugler, nogle af dem er røde. Fra æsken udtages kugler, én ad gangen, og programmet holder rede på hvor mange røde kugler der findes blandt de udtagne kugler. Udtagelsen kan være med eller uden tilbagelægning.

Med KUGLE1 kan man altså efterligne "tilfældige stikprøveudtagelser" fra en population der indeholder elementer af to typer. De to matematiske modeller der simuleres, er den *binomiale* ved udtagelse med tilbagelægning og den *hypergeometriske* ved udtagelse uden tilbagelægning.

Gennem arbejdet med KUGLE1 kan eleverne beskæftige sig eksperimentelt med chancesituationer som ved en teoretisk behandling ville kræve kendskab til de to nævnte matematiske modeller.

I KUGLE123 foretages der – i modsætning til hvad der gælder for LOD – en automatisk databehandling af de opnåede resultater. Eleven skal ikke som i LOD studere de mange udskrifter og selv udføre optællinger og udfærdige tabeller. Det gør programmet.

Dermed stiller KUGLE123 større krav til eleven om faglig modenhed og fagligt overblik. Eleven skal til stadighed være klar over hvordan den givne statistik i tabellen fra KUGLE123 skal læses og fortolkes. Han skal huske hvad de røde kugler står for, og han skal være helt sikker på hvad et eksperiment går ud på, og hvad der optælles ved eksperimenterne.

Der er derfor en risiko for at eleverne i arbejdet med KUGLE123 mister jordforbindelsen og begynder at benytte programmet uden at være fuldt klar over hvad de foretager sig. Det er her lærerens opgave at sikre at den automatik der er indlagt i KUGLE123, ikke tager magten fra eleverne. I arbejdet

med LOD er denne fare ikke til stede, her bliver databehandlingen jo foretaget manuelt af eleven selv.

Arbejde med EMMA- temaet:
Hvad er chancen? Brug KUGLE 1

Indhold

1. En kuglemodel
2. Hvilken kuglemodel?
3. Opgaver

En kuglemodel. Her indføres eleverne i KUGLE1-programmets mange faciliteter. Gennem et indledende eksempel illustreres opbygningen af en kuglemodel og der indføres en kort notation for kuglemodellerne under KUGLE1.

I arbejdet lægges vægt på at eleverne bliver i stand til at uddrage informationer fra programmets sumtabeller. Her kan aflæses oplysninger om de ukendte chancer, såvel chancer for enkelthændelser, som fx chancen for at der netop udtages én rød kugle, eller chancen for sammensatte hændelser, som fx chancen for at der udtages mindst 5 røde kugler.

Det er vigtigt at eleverne bliver fortrolige med at oversætte mellem kuglemodel og den forelagte chancesituation. Teksten skifter derfor til stadighed mellem disse to scener.

Hvilken kuglemodel? Gennem tre eksempler illustreres overvejelser som er nødvendige når den rette kuglemodel skal opstilles. I nogle situationer vil der kunne vælges mellem flere modeller, og i elevaktiviteterne sammenlignes resultater fra kørsel af forskellige modeller til behandling af en given chancesituation. – I tilknytning til et eksempel introduceres anvendelsen af programmets beregninger af fraktilværdier for det foreliggende datasæt.

Opgaver. Her gives et udvalg af opgaver som viser anvendelse af de to matematiske modeller der er indlagt i KUGLE1. Eleverne vil let selv kunne foreslå opgaver som kan løses ved hjælp af de kuglemodeller der er til rådighed i programmet.

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. Drøftelse af situationer fra hverdagen som kan beskrives ved en kuglemodel. Samlingen af opgaverne i EMMA-temaerne Kugle 1, 2 og 3 vil kunne give et overblik over de mangeartede situationer der chancemæssigt kan beskrives ved udtagelse af kugler fra en æske.

Som forberedelse til arbejdet med KUGLE1 kan det være en ide at lade eleverne opleve kugleudtagelser som realiseres gennem konkrete udtagelser af kugler fra en pose. Eleverne vil her kunne følge udtagelsen i alle detaljer, de vil selv undervejs kunne gøre de nødvendige notater, og de vil kunne opstille den afsluttende statistik over forløbet.

Efterbehandling. Her kan drøftes værktøjets rolle: Gennem KUGLE1 får eleverne et svar på spørgsmålene om de ukendte chancer, men det er jo klart for dem at der ikke er et bestemt facit som er det rigtige. Denne holdning til arbejdet med matematiske problemer bør tages op i drøftelser i klassen.

I efterbehandlingen kan også drøftes elevernes forslag til egne opgaver som kan løses ved hjælp af kuglemodeller. I den forbindelse vil samspil mellem model og virkelighed være et oplagt samtale-emne.

6.1.1 Et emne med tilknytning til KUGLE1: Stikprøver

I et særskilt EMMA-tema behandles emnet Stikprøver som har en naturlig plads i tilknytning til arbejdet med KUGLE1.

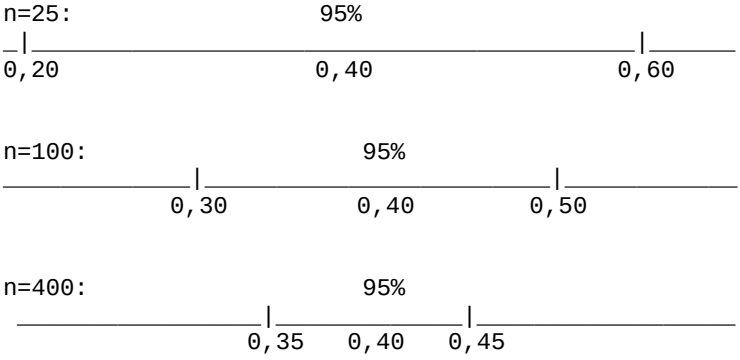
Eleverne vil ofte møde stikprøver i hverdagens anvendelse af statistik og sandsynlighedsregning. Det er derfor vigtigt at de får indsigt i hvad stikprøver kan bruges til, og hvordan resultaterne fra stikprøver skal forstås.

I INFA-projektet har vi udnyttet edb-modellen KUGLE1 i arbejdet med stikprøver. Vi har gjort brug af dette program til at besvare spørgsmålet:

Hvor pålidelige er de oplysninger man får gennem stikprøveundersøgelser?

Hvad betyder stikprøvens størrelse?

Først har vi ladet eleverne undersøge hvad stikprøvens størrelse betyder. De har her arbejdet med små stikprøver der indeholder 25 elementer, større stikprøver der indeholder 100 elementer, og store stikprøver der indeholder 400 elementer. På grundlag af en udtagelse af 100 stikprøver af hver slags fra en population der indeholder 40% røde kugler, kommer de frem til at resultaterne kan gengives således:



I de små stikprøver viser figuren at 95% af stikprøverne havde et indhold af røde kugler der lå fra 0,20 til 0,60. Ved de mellemstore stikprøver var 95%-området indsnævret til området

fra 0,30 til 0,50, og ved de store stikprøver på 400 elementer var 95%-området reduceret til området fra 0,35 til 0,45.

Disse stikprøveaktiviteter er helt centrale for elevernes forståelse af hvad der kan opnås ved stikprøveundersøgelser. Resultaterne kan fortolkes således:

> Med stikprøver på 25 har vi i 95% af tilfældene ramt inden for en afstand af 0,20 fra det rigtige tal.
>
> Med stikprøver på 100 har vi i 95% af tilfældene ramt inden for en afstand af 0,10 fra det rigtige tal.
>
> Med stikprøver på 400 har vi i 95% af tilfældene ramt inden for en afstand af 0,05 fra det rigtige tal.

Vi ser altså at 95%-området bliver smallere når stikprøvestørrelsen sættes op. Det betyder at stikprøvernes "træfsikkerhed" bliver bedre når stikprøvens omfang gøres større. Med en stor stikprøve har vi altså større chance for at få en andel af røde kugler som ligger tæt på populationens. Vi kommer her frem til formuleringen:

> Jo større stikprøve, jo større chance for
> et pålideligt resultat.

Hvordan ændres træfsikkerheden ved større stikprøver?
Vi ser af resultaterne at 95%-området ved en stikprøvestørrelse på 100 kun var halvt så stort som ved stik- prøvestørrelsen 25, og at det ved stikprøvestørrelsen 400 var halvt så stort som ved 100. Det kunne give anledning til en foreløbig formulering:

> Stikprøvens træfsikkerhed bliver dobbelt
> så god når stikprøvens størrelse gøres
> fire gange så stor.

Dette resultat kan let afprøves ved andre stikprøveundersøgelser. Undersøgelser som inddrager andre stikprøvestørrelser og gør brug af andre populationer. Eleverne vil her kunne arbejde eksperimentelt med at undersøge holdbarheden af et matematisk udsagn. Arbejdet udføres ved hjælp af KUGLE1.

Elevernes erfaringer omfatter ikke blot oplevelsen af den større træfsikkerhed ved større stikprøver, men de bliver også til stadighed opmærksom på at der i deres materiale kan indgå stikprøver som afviger en del fra det forventede. Der er altså altid risiko for at få en stikprøve som rammer et stykke fra det rigtige tal. Og det spændende er jo at vi aldrig kan vide i hverdagens anvendelser af stikprøver om vi har en af „de gode stikprøver“ foran os, eller om det er en af afvigerne.

Hvad betyder populationens størrelse?

Herefter vil det være naturligt at lade eleverne se på hvilken betydning det har for stikprøvens træfsikkerhed at populationens størrelse ændres.

Her har vi igen et eksempel på ”en faglig tankevækker“. Resultatet af undersøgelserne vil være overraskende for de fleste - og i øvrigt ikke kun for skoleelever.

De når nemlig gennem deres simulering af stikprøveudtagelser frem til at en stikprøve på 100 elementer stort set er lige så pålidelig ved en undersøgelse af en population af størrelsen 10 000 som ved en population af størrelsen 100 000 eller ved en population på 1 000 000.

En foreløbig formulering kunne her være:

> Populationens størrelse er uden betydning,
> det er alene stikprøvens størrelse der tæller.

Også dette resultat kan efterprøves ved praktiske stikprøveudtagelser. Igen kommer programmet KUGLE1 til sin ret, idet

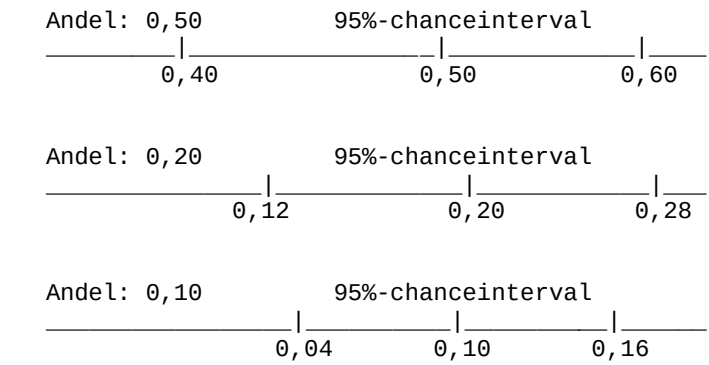
eleverne her kan lade programmet foretage udtagelserne og derefter lade det opstille en statistik over resultaterne.

Hvad betyder populationens sammensætning?

For at give det fuldstændige billede af hverdagens anvendelser af stikprøver må der yderligere foretages undersøgelser af hvad populationens sammensætning betyder: Hvordan ser 95%-områderne ud når populationens indhold af røde kugler ikke er 40%, men måske kun 10%?

Også her kan eleverne skaffe sig erfaringer gennem anvendelsen af KUGLE1. Her er deres undersøgelser med stikprøver af størrelsen 100. Eleverne har set på fire populationer: Med andele af røde kugler på 50%, 20% og 10%.

De fandt følgende 95%-områder:



Eleverne kan her se at der er væsentlig forskel på 95%-områderne alt efter hvilken population der foreligger. Og de vil kunne benytte disse områder til at vurdere den usikkerhed der er knyttet til et stikprøveresultat.

Har de fx en meningsmåling fra dagens avis, vil de gennem simuleringer med KUGLE1 kunne give et skøn over hvad stik-

prøvens 95%-område vil være. De kan dermed på kvalificeret måde tage stilling til de usikkerheder der knytter sig til de fremlagte resultater.

Det er vigtigt at eleverne formår at forbinde statistiske konklusioner med stikprøve-udtagelser. Hvis der i en population er 40% røde kugler, så vil det forventes at en stikprøve på 100 kugler vil indeholde ca. 40 røde kugler.

Dette giver ingen anledning til vanskeligheder. Men her er en anden version af samme sag:

> I en befolkningsgruppe er der 65% chance for at en 20-årig mand lever så længe at han opnår at fejre sin 70-års fødselsdag. Hvor mange af en gruppe på 250 20-årige mænd kan forventes at være i live på deres 70-års fødselsdag?

Her er det en erfaring at det er noget vanskeligere for eleverne at se sammenhængen til deres erhvervede stikprøvekundskaber.

Små stikprøver

Vi har her beskæftiget os med elevernes arbejde med store stikprøver. Der er imidlertid også en indsats at gøre i forbindelse med små stikprøver. Her skulle man måske tro at de fremdragte resultater var så overskuelige at der ikke var anledning til nærmere overvejelser. Men sådan er det ikke. Ved små stikprøver har eleverne ofte en uberettiget forventning til at stikprøven også her giver et godt billede af populationen. I en vis forstand er det egenskaberne ved de store stikprøver som eleverne uden videre overfører til den lille målestok. Ved udtagelse af blot to kugler fra en population der indeholder lige mange kugler af to slags, vil eleverne ofte blive forbavsede hvis de ikke får én kugle af hver slags. Først en undersøgelse, fx ved hjælp af et chancetræ, vil vise dem at ved udtagelse

med tilbagelægning har de to muligheder: „En af hver slags“ og „To ens“ i denne situation den samme sandsynlighed.

Elevernes forståelse af resultaterne af små stikprøver vil kunne støttes gennem arbejdet med chancetræer og med simuleringer ved hjælp af KUGLE1-modeller.

6.2 EMMA-tema: Hvad er chancen? Brug KUGLE 2

Klassetrin:	7-10
Omfang:	3-5 lektioner
Programmel:	Kugle123
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, information gennem eksperimenter.

Baggrund

Programmet KUGLE123 (som indeholder KUGLE2) udgør sammen med LOD et værktøj til arbejdet med bestemmelsen af sandsynligheder gennem data fra eksperimenter. Det statistiske sandsynlighedsbegreb er derfor i centrum i arbejdet med KUGLE2.

KUGLE2 bygger på en arbejdsform hvor eleverne eksperimenterer og afprøver. Med dette program kan eleverne med indsigt behandle chancesituationer som ellers ville ligge uden for deres teoretiske rækkevidde.

Fagligt indhold

Med KUGLE2 kan eleverne efterligne udtagelsen af kugler fra en æske. I æsken er der et antal kugler, nogle af dem er røde. Fra æsken udtages kugler, én ad gangen, og udtagelsen fortsætter *indtil den første røde kugle udtages*. Udtagelsen kan være med eller uden tilbagelægning.

Med KUGLE2 kan man altså efterligne ”en tilfældig stikprøveudtagelse” fra en population der indeholder elementer af to typer. De to matematiske modeller der simuleres, er *pascal-*

fordelingen ved udtagelse med tilbagelægning og den *pascal-hypergeometriske fordeling* ved udtagelse uden tilbagelægning. KUGLE2 er en såkaldt "Ventemodel". Den belyser hvor længe der skal ventes på den *første* røde kugle i kugleudtagelsen.

Gennem arbejdet med KUGLE2 kan eleverne beskæftige sig eksperimentelt med chancesituationer som ved en teoretisk behandling ville kræve kendskab til de to nævnte matematiske modeller og derfor ligge langt uden for elevernes faglige rækkevidde.

Arbejde med EMMA-temaet:
Hvad er chancen? Brug KUGLE2

Indhold

1. Modellen KUGLE2
2. Vi kaster terning
3. Anvend KUGLE2 ved løsning af chanceproblemer
4. Sjældne hændelser
5. Opgaver vedrørende sjældne hændelser

Modellen KUGLE2. Her indføres eleverne i KUGLE2-programmets mange faciliteter. Gennem et indledende eksempel illustreres opbygningen af en KUGLE2-model og der indføres en kort notation for kuglemodellerne under KUGLE2. - Det forudsættes at eleverne er fortrolige med anvendelsen af modellen KUGLE1, og at de dermed kender brugerfladen i KUGLE123-programmerne.

I arbejdet lægges vægt på at eleverne bliver i stand til at uddrage informationer fra programmets grafer og tabeller. Her kan aflæses oplysninger om de ukendte chancer, såvel chancer for enkelthændelser, som fx chancen for at der netop udtages ti kugler før der kommer en rød kugle, eller chancen for sammensatte hændelser, som fx chancen for at der udtages mindst 25 kugler før der foreligger en rød kugle.

Det er vigtigt at eleverne bliver fortrolige med at oversætte mellem kuglemodel og den forelagte chancesituation. Teksten skifter derfor til stadighed mellem disse to scener. Det illustreres i afsnittet "Vi kaster terning".

Anvend KUGLE2 ved løsning af chanceproblemer. Her gives et udvalg af opgaver som viser anvendelse af de to matematiske modeller der er indlagt i KUGLE2. Eleverne vil let selv kunne foreslå opgaver som kan løses ved hjælp af de kuglemodeller der er til rådighed i programmet.

Sjældne hændelser. Med KUGLE2 gives der mulighed for at belyse en række forhold vedrørende forekomsten af sjældne hændelser. Dette tages op i et særligt afsnit, og der suppleres med en række opgaver som behandler chancesituationer i tilknytning til sjældne hændelser (se nedenfor i afsnit 6.2.1).

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. Drøftelse af situationer fra hverdagen som kan beskrives ved en kuglemodel. Samlingen af opgaverne i EMMA-temaerne Kugle 1, 2 og 3 vil kunne give et overblik over de mangeartede situationer der chancemæssigt kan beskrives ved udtagelse af kugler fra en æske.

Som forberedelse til arbejdet med KUGLE2 kan det være en ide at lade eleverne opleve serier af kugleudtagelser som realiseres gennem konkrete udtagelser af kugler fra en pose.

Efterbehandling. Her kan drøftes værktøjets rolle: Gennem KUGLE2 får eleverne et svar på spørgsmålene om de ukendte chancer, men det er jo klart for dem at der ikke er et bestemt facit som er det rigtige. Denne holdning til arbejdet med matematiske problemer bør tages op i drøftelser i klassen.

I efterbehandlingen kan også elevernes forslag til egne opgaver som kan løses ved hjælp af kuglemodeller, tages op til

drøftelse. I den forbindelse vil samspil mellem model og virkelighed være et oplagt samtaleemne.

6.2.1 Sjældne hændelser

Emnet „Sjældne hændelser“ har fået en særskilt behandling i temaet. Netop den type af chancesituationer vil ofte få opmærksomhed i medierne, og megen forkert intuition knytter sig til chancevurderinger i forbindelse med sjældne hændelser.

Eleverne har indsamlet deres faglige erfaringer om sjældne hændelser ved hjælp af KUGLE2 hvor kugleudtagelsen fortsætter indtil der første gang udtages en rød kugle. Dette illustrerer situationen hvor et eksperiment gentages indtil den betragtede sjældne hændelse indtræffer. Og hvor hændelsens sandsynlighed ikke ændres undervejs!

Én gang pr. 20 år!

Ved hjælp af KUGLE2 undersøger eleverne en situation hvor der blandt 20 kugler findes én rød kugle. Fra kuglepopulationen udtages kugler, én for én med tilbagelægning, indtil den røde kugle udtages. Programmet holder styr på hvor mange udtagelser der foretages før den røde kugle dukker op.

Eleverne lader fx KUGLE2 udføre 100 eksperimenter, og i hvert eksperiment noteres antallet af udtagne kugler indtil der udtages en rød kugle. Programmet opstiller derefter en statistik over de opnåede resultater.

Statistik over 100 eksperimenter

Talområde	Fraktil	
1..1	1 %	
1..2	5 %	
1..3	10 %	
1..5	25 %	Gennemsnit: 20.18
1..12	50 %	Maximum : 139
1..26	75 %	Minimum : 1
1..41	90 %	
1..60	95 %	
1..87	99 %	

Af statistikken ser de først at der i de 100 eksperimenter kræves i gennemsnit ca. 20 forsøg for at udtage den røde kugle. Det svarer godt til elevernes forventning, chancen i hver enkelt udtagelse for at få den røde kugle er 1 ud af 20, så det er at forvente at der i gennemsnit er behov for 20 forsøg før den sjældne hændelse indtræffer.

Det undrer imidlertid eleverne at der kan være så stor forskel på de enkelte eksperimenter: I et eksperiment blev en rød kugle udtaget allerede i første forsøg. I et andet eksperiment skulle der udføres 139 forsøg før en rød kugle blev udtaget.

Hverdagens omtale af sjældne hændelser

En sjælden hændelse som har en sandsynlighed på 5% for at indtræffe inden for et år, vil ofte i almen tale blive omtalt som en hændelse der vil indtræffe „1 gang pr. 20 år“. Dette er, som eleverne kan se af deres statistik, en betragtning der gælder det gennemsnitlige. Der kan være store individuelle forskelle: Somme tider vil hændelsen allerede indtræffe det første år, i andre tilfælde kan det tage 100 år inden den forekommer.

Eleverne kan ved hjælp af KUGLE2 se nærmere på forekomsten af sjældne hændelser, og de vil ved deres eksperimenter finde at i gennemsnit vil den sjældne hændelse altid pænt

følge det forventede. En hændelse med en sandsynlighed på 1/100 for at indtræffe inden for et år vil i gennemsnit forekomme én gang pr. 100 år, "den forventede periode" er 100 år. Og hvis hændelsens sandsynlighed er 1/200 vil den forventede periode være 200 år.

40-15 reglen

Men eleverne kan få flere nuancer i deres forhold til sjældne hændelser. Af deres statistikker fra KUGLE2 kan de formulere den såkaldte "40-15 regel for sjældne hændelser". Den siger at for sjældne hændelser gælder:

> Der er ca. 40% chance for at hændelsen *forekommer* i løbet af den første halvdel af den forventede periode.
>
> Der er ca. 15% chance for at hændelsen *ikke forekommer* i løbet af det dobbelte af den forventede periode.

Det vil sige at for en sjælden hændelse der har en sandsynlighed på 1/100 for at indtræffe inden for et år, er der en chance på ca. 40% for at den allerede indtræffer i løbet af de første 50 år. Til gengæld er der en chance på 15% for at den slet ikke indtræffer inden for de første 200 år.

Gennem arbejdet med data fra KUGLE2 får eleverne et indblik i chanceforholdene vedrørende sjældne hændelser, og de får nuancer på hverdagens omtale af hændelserne hvor de næsten altid beskrives som hændelser der indtræffer 1 gang på så og så mange år.

Anvendelsen af KUGLE-modellen til belysning af sjældne hændelser giver selvfølgelig anledning til overvejelser om modellens brugbarhed. Dette spørgsmål opfordrer vi derfor lærerne til at drøfte med eleverne:

”Når vi her har belyst sjældne hændelsers forekomst ved anvendelse af kuglemodeller, er der alene tale om hændelser som kan beskrives på passende vis ved modeller af denne art. Det vil sige at hændelsens indtræffen kan efterlignes ved udtagelse af kugler, og ved hver enkelt udtagelse er der samme chance for at den pågældende hændelse indtræffer. Der er altså ikke tale om situationer hvor chancen for at den betragtede hændelse indtræffer ændrer sig fra udtagelse til udtagelse.

Det kan ikke altid umiddelbart afgøres om forekomsten af hverdagens sjældne hændelser kan beskrives ved de benyttede kuglemodeller. Ved ulykker der forårsages af personers træthed eller af materialers nedslidthed, kan det vel tænkes at risikoen for ulykkens indtræffen bliver større og større for hver tidsenhed der forløber. På den anden side kan der opstå en effekt hvor personer bliver bedre og bedre til at håndtere den forelagte chancesituation, og sandsynligheden for den sjældne hændelse bliver som følge heraf mindre og mindre. Der må derfor, som altid hvor der gøres brug af matematiske modeller, foretages overvejelser over modellens rimelighed før den anvendes på den praktiske situation.“

6.3 EMMA-tema: Hvad er chancen? Brug KUGLE 3

Klassetrin:	7-10
Omfang:	3-5 lektioner
Programmel:	Kugle123
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, information gennem eksperimenter.

Baggrund

Programmet KUGLE123 (som indeholder KUGLE3) udgør sammen med LOD et værktøj til arbejdet med bestemmelsen af sandsynligheder gennem data fra eksperimenter. Det statistiske sandsynlighedsbegreb er derfor i centrum i arbejdet med KUGLE3.

KUGLE3 bygger på en arbejdsform hvor eleverne eksperimenterer og afprøver. Med dette program kan eleverne med indsigt behandle chancesituationer som ellers ville ligge uden for deres faglige rækkevidde.

Fagligt indhold
Med KUGLE3 kan eleverne efterligne udtagelsen af kugler fra en æske. I æsken er der et antal kugler, nogle af dem er røde. Fra æsken udtages kugler, én ad gangen, og udtagelsen fortsætter *indtil alle de røde kugler er udtaget*. Udtagelsen kan være med eller uden tilbagelægning.

Med KUGLE3 kan man altså efterligne "en tilfældig stikprøveudtagelse" fra en population der indeholder elementer af to typer. KUGLE3 er lige som KUGLE2 en såkaldt "Ventemodel". Den belyser hvor længe der skal ventes på den *sidste* røde kugle i kugleudtagelsen.

Gennem arbejdet med KUGLE3 kan eleverne beskæftige sig eksperimentelt med chancesituationer som ved en teoretisk behandling ville kræve kendskab til en række sandsynlighedsteoretiske forhold som ligger langt uden for elevernes faglige rækkevidde. Derimod vil eleverne ikke have nogen vanskeligheder med at sætte sig ind i de behandlede problemstillinger.

Arbejde med EMMA-temaet:
Hvad er chancen? Brug KUGLE3

Indhold
1. Modellen KUGLE3
2. Udtagelse uden tilbagelægning
3. Alle kugler er røde
4. Anvend KUGLE3

Modellen KUGLE3. Her indføres eleverne i KUGLE3-programmets mange faciliteter. Gennem et indledende eksempel illustreres opbygningen af en KUGLE3-model, og der indføres

en kort notation for kuglemodellerne under KUGLE3. - Det forudsættes at eleverne er fortrolige med anvendelsen af modellerne KUGLE1 og KUGLE2, og at de dermed kender brugerfladen i de tre kugleprogrammer.

I arbejdet lægges der vægt på at eleverne bliver i stand til at uddrage informationer fra programmets grafer og tabeller. Her kan aflæses oplysninger om de ukendte chancer, såvel chancer for enkelthændelser, som fx chancen for at der netop udtages ti kugler før alle røde kugler er udtaget, eller chancen for sammensatte hændelser, som fx chancen for at der udtages mindst 25 kugler før alle de røde kugler er taget.

Det er vigtigt at eleverne bliver fortrolige med at oversætte mellem kuglemodel og den forelagte chancesituation. Teksten skifter derfor til stadighed mellem disse to scener. Det illustreres i de to første afsnit af EMMA-temaet.

Alle kugler er røde. Nogle af de mest spændende og overraskende problemstillinger optræder i situationer hvor alle kugler i æsken er røde. Udtagelsen skal her fortsættes indtil alle æskens kugler har været udtaget. Disse situationer tages op gennem et udvalg af eksempler og der suppleres i temaets afsnit 4 med en række opgaver som behandler problemer i tilknytning til situationen "Alle kugler er røde".

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. Drøftelse af situationer fra hverdagen som kan beskrives ved en kuglemodel. Samlingen af opgaverne i EMMA-temaerne KUGLE 1, 2 og 3 vil kunne give et overblik over de mangeartede situationer der chancemæssigt kan beskrives ved udtagelse af kugler fra en æske.

Som forberedelse til arbejdet med KUGLE3 kan det være en ide at lade eleverne opleve serier af kugleudtagelser som realiseres gennem konkrete udtagelser af kugler fra en pose.

Efterbehandling. Her kan drøftes værktøjets rolle: Gennem KUGLE3 får eleverne et svar på spørgsmålene om de ukendte chancer, men det vil stå klart for dem at der ikke er et bestemt facit som er det rigtige. Denne holdning til arbejdet med matematiske problemer bør tages op i drøftelser i klassen.

I efterbehandlingen kan også elevernes forslag til egne opgaver som kan løses ved hjælp af kuglemodeller, tages op til drøftelse. I den forbindelse vil samspil mellem model og virkelighed være et oplagt samtaleemne.

7. Problemløsning i chancesituationer: TRÆ

7.1 Om programmet TRÆ

TRÆ er et program som er tilrettelagt med henblik på undervisningen i 7.-10. klasse. Det vil kunne finde anvendelse ved arbejdet med grundlæggende begreber fra sandsynlighedsregning.

Programmet bygger på et af den elementære undervisnings vigtigste hjælpemidler i arbejdet med chancesituationer: Chancetræer. Chancetræer benyttes ved beskrivelsen af sammensatte eksperimenter hvor der foreligger sandsynligheder for hændelserne i de enkelte deleksperimenter.

TRÆ vil endvidere kunne anvendes i et indledende arbejde med betingede sandsynligheder. Gennem såkaldte *reducerede chancetræer* gives en lettilgængelig indførelse i spørgsmål der vedrører betingede sandsynligheder.

De emner der kan behandles under reducerede chancetræer, hører ikke til det faglige indhold i folkeskolen. Den tilhørende elevtekst vil imidlertid vise hvor kort vej der er fra skolens sandsynlighedsregning til en righoldig og spændende emneverden som i udstrakt grad knytter sig til hverdagens anvendelser af faget.

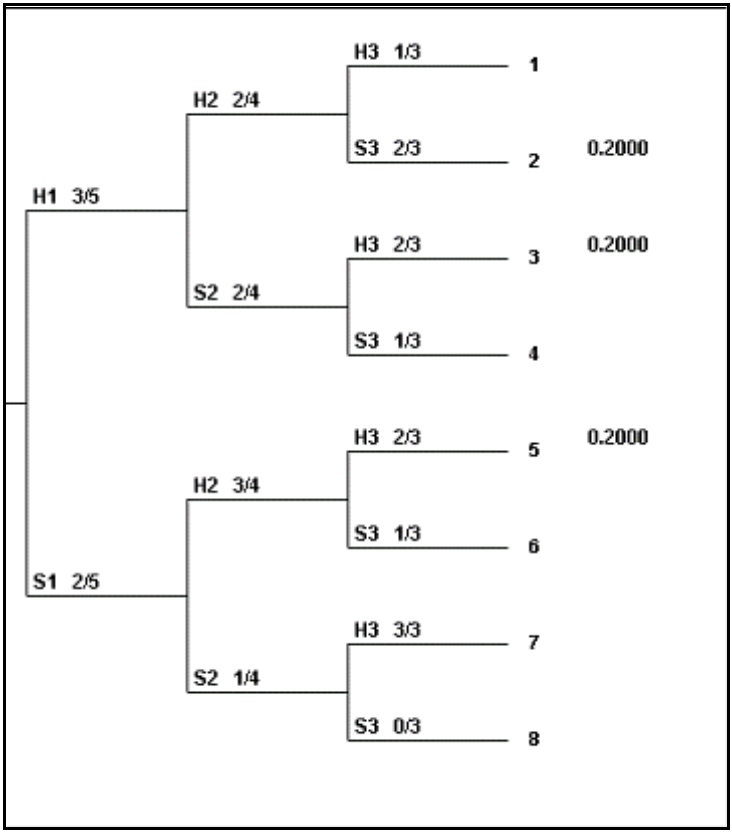
*

Emnerne fra TRÆ er videreført i programmet HYPOTESE. Her kan arbejdes med vurdering af hypotesers troværdighed i lys af forelagte data. Se beskrivelsen i afsnit 4.11 i del 1.

En forenklet udgave af TRÆ findes i programmet ÆSKE. I dette program kan eleverne arbejde med situationer hvor der udtages kugler fra en æske. Når der indtastes oplysninger om æskens indhold af kugler, antallet af kugler der udtages og

udtagelsens art (med eller uden tilbagelægning), vil programmet tegne det færdige chancetræ med påføjede chancer.

Her foreligger en æske der indeholder 3 hvide og 2 sorte kugler. Fra æsken udtages 3 kugler uden tilbagelægning. Chancetræet beskriver chancerne ved udtagelsen.



På træet er markeret de grene der svarer til at der udtages 2 hvide og 1 sort kugle i de tre udtagelser. Den samlede sandsynlighed på disse grene aflæses til 0.60.

7.2 EMMA*tema: Hvad er chancen? Brug chancetræer!

Klassetrin:	8-10
Omfang:	5-8 lektioner
Programmel:	TRÆ og ÆSKE
Faglige områder:	Grundlæggende arbejde med beregning af sandsynligheder

Et EMMA tema henvender sig til elever med særlig interesse og evne for matematik*

Indhold

1. Vi tegner et chancetræ
2. Lidt om programmet TRÆ
3. Udtagelse med tilbagelægning
4. Programmet ÆSKE
5. Opgaver
6. Reducerede chancetræer
7. Hvor sikker er diagnosen?
8. Hvordan afslører man ulykkesfugle?
9. Opgaver til Reducerede chancetræer

Temaet behandler et af den elementære undervisnings vigtigste hjælpemidler i arbejdet med chancesituationer. Chancetræer benyttes ved beskrivelsen af sammensatte eksperimenter hvor der foreligger sandsynligheder for hændelserne i de enkelte deleksperimenter En lang række af eksempler fra skolens sandsynlighedsregning vil netop kunne behandles som eksperimenter sammensat af nogle få enkle deleksperimenter.

I arbejdet benyttes programmet TRÆ som er specielt tilrettelagt med en indledende undervisning for øje.

I de tre første afsnit af elevteksten gives en introduktion til opbygningen og anvendelsen af et chancetræ. Eksemplerne knytter sig til simple udtagelser af kugler fra en æske.
Udtagelsen kan være med tilbagelægning eller uden tilbagelægning.

I afsnit 4 i EMMA-teksten introduceres programmet ÆSKE, der er en forenklet udgave af TRÆ. I programmet ÆSKE skal brugeren ikke tildele sandsynligheder til de enkelte grene i chancetræet, det gøres af programmet ud fra de givne oplysninger om den forelagte kuglesituation.

Afsnit 5 indeholder en række opgaver som alle kan løses ved hjælp af TRÆ, nogle tillige ved hjælp af ÆSKE.

Afsnit 6 behandler reducerede chancetræer. Disse træer benyttes når der foreligger yderligere data til belysning af den givne chancesituation. Træer af denne type giver på en lettilgængelig måde mulighed for at behandle spørgsmål der vedrører brugen af betingede sandsynligheder.

Afsnit 7 og 8 giver to større eksempler på anvendelsen af reducerede chancetræer. Disse eksempler vil give et billede af hvorledes nye data giver anledning til nye beregninger af sandsynligheder.

Afsnit 9 indeholder en række opgaver der har med betingede sandsynligheder at gøre.

Anvendelsen af chancetræer er nærmere beskrevet i afsnittene 4.6 - 4.10 i del 1 af CHANCE.

8. Arbejde med databaser og chancer

Her arbejdes med to databaser der indeholder data som er lettilgængelige for fortolkninger. Den ene database (afsnit 8.1) indeholder oplysninger om danskernes levetid.

Den anden database (afsnit 8.2) indeholder oplysninger om det danske vejr måned for måned fra 1920 og fremefter. Denne database lader eleverne foretage chancemæssige overvejelser i tilknytning til meningsfulde data.

Det er sigtet med disse to databaser at eleverne skal blive fortrolige med at anvende statistik og sandsynlighed som naturlige værktøjer ved beskrivelser og problemløsning.

8.1 EMMA-tema: Levetid

Klassetrin:	6-10
Omfang:	2-3 lektioner
Programmel:	Demografi
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, samfundsbeskrivelse

Baggrund

Der arbejdes med problemstillinger som vedrører levetider for den danske befolkning. Emnet belyser en række spørgsmål om befolkningsudviklingen i Danmark. Der gives grundlag for et arbejde med temaet *Befolkningsprognose* hvor fremskrivningen af befolkningstallet i Danmark tages op.

I temaet foretages sammenligninger med tidligere tiders levetidstabeller, og der vi være gode muligheder for at inddrage tal som belyser levetider i andre lande. I tilknytning til de historiske data vil der være lejlighed til at drøfte tidligere tiders levevilkår med hensyn til sundhed og sygdom.

Emnet kan belyse samfundsbeskrivelsens muligheder: Den giver statistiske billeder, "gennemsnit", af befolkningen, men den må afstå fra at give udsagn som gælder for den enkelte person.

Fagligt indhold

Temaet bygger helt og holdent på overvejelser som er af statistisk art. Temaet kan derfor give en udmærket indledning til et arbejde med statistiske sandsynligheder i skolens 6.-10. klasser.

De spørgsmål der behandles i temaet *Levetid*, har særlige muligheder for at belyse det statistiske sandsynlighedsbegreb på en tilfredsstillende måde. Det vil her være klart for eleverne at sandsynligheder kommer til veje på grundlag af et stort datamateriale, og det vil være indlysende for dem at beregninger af sandsynligheder ikke med lovmæssighed er gyldige for det enkelte individ.

Der bygges på et intuitivt sandsynlighedsbegreb, eller chancebegreb, hos eleverne. Der forudsættes således ikke et forudgående arbejde med sandsynligheder.

Der vil i arbejdet med *Levetid* være gode muligheder for at illustrere enkle metoder til beregning af sandsynligheder, herunder også sandsynligheder for sammensatte hændelser. Temaet kan således lægge op til et senere mere systematisk arbejde med sandsynligheder. Det vil tillige være oplagt at knytte udsagn om chancer sammen med informationer der hentes fra forelagte datamaterialer.

Arbejde med EMMA-temaet: Levetid

Indhold

1. Hvor længe lever vi – i gennemsnit?
2. Programmet Levetid
3. To personer sammenlignes
4. Opgaver

Hvor længe lever vi – i gennemsnit? Her introduceres begrebet levetidstabel. Der bygges på en forenklet udgave, og i tilknytning til den udføres nogle grundlæggende beregninger af levechancer. - Beregningerne i disse indledende eksempler foretages ved håndkraft, en lommeregner vil være tilstrækkelig hjælp.

Det betones at tallene i levetidstabellen giver et gennemsnitsbillede for den danske befolkning og at tallene ikke kan bruges på enkeltpersoner.

Programmet Levetid. Her anvendes programmet på et eksempel hvor der beregnes levetidschancer for en enkelt person. Programmets tabel og graf kommenteres. I tilknytning til tabel og graf omtales begrebet medianlevetid.

To personer sammenlignes. Her behandles programmets mulighed for at fremlægge tabeller og grafer for to personer A og B. Der er frit valg af køn og alder for de to personer. - I tilknytning til sammenligningen beregner programmet chancen for at person A overlever person B. Der gøres ikke i elevteksten rede for hvorledes denne beregning fore tages .

Opgaver. Et udvalg af opgaver som belyser anvendelsen af beregningerne i Levetid. I opgaverne fremlægges nogle levetidstabeller fra forrige århundrede, og der foretages sammenligninger mellem tidligere tiders levechancer og nutidens.
Også begreber som overdødelighed og underdødelighed tages op.

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Indledning. Drøftelse af problemer der har med befolkningsudvikling at gøre. Der kan tages udgangspunkt i tabeller over danskernes levetid gennem de sidste 100 år. En sådan tabel er til rådighed i programmet Demografi, hvori Levetid er placeret:

Danmark 1840 - 1999

Middellevetid for nyfødte danskere

	Drenge	**Piger**
1840-49	42.9	45.0
1850-59	43.1	45.4
1860-69	43.7	45.6
1870-79	45.5	47.2
1880-89	46.8	48.9
1890-99	48.6	51.4
1900-09	53.9	57.1
1910-19	56.0	58.5
1920-29	60.6	62.3
1930-39	62.8	64.8
1940-49	66.7	68.9
1950-59	70.1	73.2
1960-69	70.5	74.9
1970-79	71.1	76.9
1980-89	71.9	77.7
1990-99	72.7	78.0

Spørgsmål om dødelighed kan tages op i tilknytning til en tabel over spædbørnsdødeligheden i Danmark gennem de sidste 100 år. Også denne tabel findes i programmet Demografi.

Efterbehandling. Nogle af de behandlede opgavesituationer vil sikkert give anledning til drøftelser i klassen. Det vil endvidere være oplagt at drøfte internationale tabeller over leveti-

der, fx en sammenligning først på nordisk plan og derefter med inddragelse af tabeller fra udviklingslande.

Også en drøftelse af fremtidens levechancer vil kunne tages op: Hvordan vil levetiderne udvikle sig i fremtiden? Hvad vil der ske med spædbørnsdødeligheden? Vil Danmark rette op på sine faldende levetider i forhold til en række europæiske lande? Hvilken indflydelse har miljøet på vore levetider? Hvad betyder vor levevis?

8.2 EMMA-tema: Vejrdata

Klassetrin:	6-10
Omfang:	3-5 lektioner
Programmel:	Vejrdata
Faglige områder:	Statistisk sandsynlighed, fortolkning af data, brug af en database

Baggrund

Det primære sigte med temaet Vejrdata er at gøre eleverne fortrolige med at anvende en database, og at gøre dem bekendt med at det er én ting at hente data fra en sådan base, en anden ting at uddrage information fra disse data.

Temaet gør overalt opmærksom på den proces der består i at fortolke de opnåede resultater. En fremlæggelse af data, hvad enten de er i form af tallister, tabeller, mærketal eller grafer, er i sig selv ikke noget værd. Brugeren må kunne fortolke de fremlagte data og må kunne lægge et meningsindhold i dem. Først da er der tale om at der er hentet information fra basen, information som kan føre til viden og indsigt.

Fagligt indhold

Databasen i Vejrdata indeholder oplysninger om fem vejrvariable for hver måned fra 1920 og op til i fjor. Databasen og programmet opdateres hvert år med de seneste tal. Gennem anvendelse af en database af denne art som indeholder me-

ningsfyldte data der knytter sig til letforståelige situationer fra elevernes hverdag, vil fortolkningen af opnåede resultater føles ganske naturlig for eleverne. Det siger sig selv at fortolkningsprocessen ikke på rimelig vis ville kunne indgå i arbejdet såfremt der blev benyttet kunstige databaser med pseudodata som måske er frembragt af computeren. I en sådan situation vil arbejdet med databaser gå glip af den pædagogisk værdifulde del der består i oversættelsen fra data til (meningsfyldt) information.

I fortolkningen af de hentede data gøres i Vejrdata brug af hjælpemidler fra statistikken, hjælpemidler som hører til det faglige indhold i folkeskolen. Der sigtes mod at eleverne gennem dette arbejde kan se at statistikken er et godt værktøj ved beskrivelse og fortolkning af datamaterialer. En indsigt som ikke har gode vilkår når skolens brug af statistik kulminerer med udregning af en median, uden at denne gøres til genstand for fortolkning eller indsættes i en sammenhæng.

Faglige forudsætninger for arbejdet med Vejrdata

Det er en fordel hvis eleverne har mødt begreber fra den deskriptive statistik. Hvis dette ikke er tilfældet, vil læreren dog let kunne introducere disse begreber gennem eksemplerne i temaet. Især må der da arbejdes med de faciliteter der er tilgængelige i Vejrdata under anvendelse af Statistik-knappen. Eleverne vil gennem arbejdet med eksempler fra temaet kunne blive fortrolig med begreberne fraktiler og fraktilværdier, og de vil gennem opstilling af vejrprofiler få rig anledning til at fortolke de forelagte talværdier.

Også elevernes indsigt i brugen af grafiske fremstillinger vil kunne støttes gennem arbejdet med eksempler og opgaver fra temaet Vejrdata.

Arbejde med EMMA-temaet: Vejrdata

Indhold

1. Hvad Vejrdata kan
2. En kørsel af programmet
3. Programmets variable
4. Andre enheder
5. Vejrprofiler
6.-9. Opgaveafsnit
10. Vejrrekorder

Hvad Vejrdata kan og **Kørsel af programmet.** Gennem nogle eksempler og øvelser gives her en introduktion til hvordan Vejrdata kan anvendes. I tilknytning til eksemplerne illustreres de forskellige faciliteter: Tabeller, pindediagrammer, kurvegrafer og fordelingsdiagrammer.

Endvidere vises hvorledes den indbyggede statistik-modul kan benyttes ved udregning af fraktiler og fraktilværdier.

Programmets variable. Her gives en lidt mere detaljeret beskrivelse af de fem vejrvariable der indgår i programmet: Middeltemperatur, maksimumtemperatur, minimumtemperatur, nedbørmængde, soltimetal.

Andre enheder. I programmet kan opereres med forskellige tidsmæssige enheder, såsom enkeltmåneder, flere måneder, årstider, kalenderår, og et løbende antal måneder. Gennem eksempler gives en indføring i brugen af det fulde repertoire af programmets tidsmæssige enheder.

Vejrprofiler. En særlig bekvem og hurtig måde til at skaffe sig overblik over vejret i en bestemt periode foreligger i programmets beregning af vejrprofiler. Her vil der være gode muligheder for at lade eleverne foretage fortolkninger af de beregnede værdier.

Opgaveafsnit. Her findes et rigt udvalg af opgaver som lærer og elever kan plukke fra. Opgaverne er opdelt i de fire afsnit 6-9: 6. Lav en statistik – og giv dit svar! 7. Hvornår var det nu det var? 8.Opstil en vejrprofil – og fortolk den! 9. Søg og find!

Vejrrekorder. Temaet afsluttes med en oversigt over danske (og nogle få internationale) vejrrekorder. I tilknytning hertil gives oplysninger om særlige vejrfænomener på den danske arena: Stærke storme, hvid jul, isvintre, hede- og varmebølger.

Forslag til supplerende aktiviteter i klassen

Det danske vejr giver mange muligheder for drøftelser i klassen. I tilknytning til aktuelle vejrsituationer vil Vejrdata kunne belyse hvor ofte dette forekommer i de danske statistikker.

Aviserne bringer hver måned en kommentar til den foregående måneds vejr. Gennem Vejrdata kan disse kommentarer sættes ind i en større sammenhæng.

I en efterbehandling af temaet vil det være naturligt med eleverne at drøfte anvendelsen af et værktøj som bygger på data der er indsamlet fra virkelighedens verden. Hvordan kan sådanne data benyttes i vurderingen af aktuelle og fremtidige vejrsituationer?

9. Chancer i spil

EMMA - tema: Chancespil

Programmel:	Statspil, Tyv, Roulette, Poker, Yatzy
Faglige områder:	Arbejde med sandsynligheder i spil-situationer

Klassetrin og omfang:

Statspil	Klassetrin: 5+	Omfang: 1-2 lektioner
Tyv	Klassetrin: 6+	Omfang: 1-2 lektioner
Roulette:	Klassetrin: 7+	Omfang: 2-3 lektioner
Poker	Klassetrin: 8+	Omfang: 1-2 lektioner
Yatzy	Klassetrin: 8+	Omfang: 1-2 lektioner

Indhold

1. Statspil
2. Enarmet tyveknægt
3. Roulette
4. Pokerterning
5. Yatzy

De fem spil

I temaet arbejdes med fem af INFAs matematikspil. Det er sigtet med temaet at give eleverne mulighed for at arbejde med chancer og chancevurderinger i tilknytning til situationer af spillemæssig art. Arbejdet vil kunne supplere de faglige emner der tages op i de øvrige EMMA-materialer inden for området sandsynlighed.

Spillene er ovenfor nævnt i rækkefølge efter deres krav til modenheden af elevernes chancebegreb. Mindst krævende i chancemæssig henseende er Statspil og mest krævende er Yatzy. Spillene kan i øvrigt anvendes uafhængigt af hinanden, og bortset fra familieskabet mellem Pokerterning og Yatzy er der ingen fælles træk mellem spillene.

Statspil
Dette spil kan spilles på alle folkeskolens klassetrin. Det er blevet benyttet som grundlag for en undersøgelse af hvordan elever i 1.-10. klasse håndterer chancesituationer.

I undervisningsmæssig sammenhæng kan Statspil anvendes i et indledende arbejde med sandsynlighed. Eleverne kan her – i overskuelige situationer - blive opmærksom på chancesituationer, og de kan gennem spillet få afprøvet og styrket deres fornemmelser for chancer.

Hvor de fleste selskabsspil styrer spillets chancer gennem terningkast som spilleren er uden indflydelse på, kan spilleren i Statspil vælge mellem tre "terninger". Terningerne giver spilleren forskellige chancer på de mulige øjental. Spilleren i Statspil skal således foretage en vurdering af hvilken terning der giver ham de bedste chancer for at opnå et godt kasteresultat. Dermed er spilleren i Statspil under hele spillet aktiv i en vurdering af chancer. Sådanne overvejelser over chancer i Statspil kan med udbytte foregå i drøftelse mellem to eller tre elever.

I Statspil er endvidere indlagt en mulighed for at spillerne selv bestemmer over en af de tre terninger. De kan her vælge deres egen sammensætning af øjentallene på en af de tre terninger der kan vælges.

Statspil foreligger i to versioner: Statspil 30 med 30 felter på spilleplanen og Statspil 43 med 43 felter. Statspil kan spilles af op til fire spillere, heraf kan den ene være computeren. Når der spilles med computeren som deltager, kan de øvrige spillere med udbytte iagttage computerens valg af terning i de foreliggende spillesituationer.

Roulette og Tyv
Programmerne Roulette og Tyv beskæftiger sig med to af hverdagens aktuelle spilletilbud: det typiske kasinospil, *Roulette*, og det typiske spil fra spillehaller, *Enarmet Tyveknægt*.

Gennem afprøvningen af de to programmer vil eleverne blive bekendt med forhold som er karakteristiske for spil der udføres i et regi med en spiller på den ene side og "et system" på den anden. Ved Roulette udgøres systemet af de regler kasinoet opstiller for deltagelse og gevinstudbetaling, ved de enarmede tyveknægte er systemet de chancer og gevinstkombinationer der er indbygget i spillemaskinerne.

Sigte
Sigtet med de to programmer, Tyv og Roulette, er at gøre eleverne fortrolige med nogle af de lovmæssigheder som foreligger ved spil af denne slags: *Spil foregår efter regler som er givet på forhånd, og de kan ikke forhandles*. Går man ind som deltager i spillene, anerkender man samtidig de opstillede regler. Og man må bære de tab der opstår ved deltagelse i spillene.

Reglerne indebærer at store gevinster forekommer sjældent, og små gevinster forekommer hyppigt. Spilleren kan være heldig i det korte løb, men held er ikke noget han kan bygge på i det lange løb i spil hvor han er oppe imod en indbygget skævhed i vinderchancer. Og dette er jo situationen både i spil på Roulette og spil på spillemaskine. Held er ikke noget der er fast knyttet til en spiller så han altid kommer ud med overskud. Og det er uheld i øvrigt heller ikke.

Sigtet med de to kasino-spil er ikke at uddanne folkeskoleelever til kasinospillere, men at give dem et indblik i spillenes natur. Spillene kan derved bidrage til at justere deres intuitive opfattelse af chancer og risikoer i spil der er styret af tilfældighedens love. Og arbejdet med Tyv og Roulette kan måske pille ved nogle af de myter der ofte knyttes til spil og spilleforløb og fjerne lidt af kasinomiljøets mystik.

Faglige forudsætninger
I materialerne til Tyv og Roulette er givet eksempler på hvorledes chanceberegninger og gevinstudregninger foretages. Hvis eleverne skal få det fulde udbytte af arbejdet med programmerne, er det vigtigt at de får kendskab til disse beregninger.
Uden behandling af de chancemæssige forhold vil beskæftigelsen med programmerne kunne blive ren underholdning.

En nærmere behandling af chanceforhold i tilknytning til spil er givet i hæftet i INFAs Chancelæreserie:

Spil - Chancer gennem tællemetoder, INFA 1993

I hæftet omtales de to spil, Roulette og Enarmet Tyveknægt, i henholdsvis afsnit 4.3 og afsnit 4.9.

Forberedelse
I forbindelse med Roulette må de forskellige muligheder for indsats tages op, og eleverne må være helt klar over forholdet mellem bred dækning / lille gevinst og smal dækning / stor gevinst.

Gevinstudbetalingerne i Roulette kan sikkert bedst gennemgås ved hjælp af enkeltspil som køres i demo-udgave for hele klassen. Her kan eventuelle uklarheder drøftes og forklares.

Først når gevinstudbetalingerne er helt forstået gennem kørsel af enkeltspil, bør eleverne gå videre til spilleserier. Her foregår alt så hastigt at den elev der ikke har forstået enkeltspillene, vil blive hægtet af.

Eleverne må gennem deres afprøvninger nå til forståelse af at alle indsatsmuligheder i Roulette giver samme gevinstchance. Om man i en lang spilleserie fx vælger at spille på *Nummer* eller på *RØD*, er en afgørelse som mere er af psykologisk end matematisk art. Den ene indsats vil give store, men sjældne gevinster, den anden vil give små, men hyppige gevinster.

Max-tab kørslerne, både i Roulette og i TYV, giver eleverne mulighed for at opleve kasinospillenes grundlov: *Før eller senere har du tabt alle dine penge!* - Men kørslerne viser også at nogle afblankninger er seje og langvarige affærer, måske så langvarige at tålmodigheden hos eleverne ikke slår til. Men lad ikke dette påvirke sandheden i den citerede grundlov.

I programmet TYV er indlagt en mulighed for at brugeren designer sin egen spillemaskine. Han kan her bestemme opbygningen af spillemaskinens hjul og han kan (inden for givne grænser) fastlægge de regler der skal gælde for gevinstudbetalingen.

Pokerterning og Yatzy

Disse to spil ligner hinanden en del. De udføres begge ved kast med fem terninger, og de involverede chanceovervejelser er stort set de samme.

I spillene skal opnås så godt et kasteresultat som muligt i tre kast med fem terninger. Terninger kan låses efter ét eller to kast, så der kun kastes videre med de terninger som skal "forbedres".

I den foreliggende udgave af de to spil er der i spillet indbygget en chanceberegning. Programmet kan her fortælle spilleren hvad chancen fx er for at der opnås "Tre ens" eller "Fuldt hus" i det næste kast. Spilleren kan foretage chanceberegninger efter behag, og han kan på dette grundlag bestemme sig for hvilke terninger der skal deltage i de næste kast.

Den indbyggede chanceberegning vil give eleverne mulighed for at afprøve deres chanceintuition. Selv erfarne Yatzy-spillere vil sikkert komme ud for at beregningen af chancer vil give resultater der går på tværs af deres umiddelbare opfattelse af hvad der er let og hvad der er svært at opnå i det næste kast.

I Pokerterning er indlagt en mulighed for at brugeren kan indtaste et kast efter eget valg og få beregnet de chancer der hø-

rer til dette kast. Programmet kan dermed være et alment værktøj i forbindelse med vurdering af chancer i spil der udføres ved kast med fem terninger. Programmets chanceberegninger kan eventuelt tjekkes ved hjælp af INFA-programmet Terning.

Efterbehandling

Det vil være afgørende for elevernes udbytte af arbejdet med de fem spil at der foretages en efterbehandling i klassen. Her må drøftes de erfaringer der er indhentet, og der må sættes fokus på de oplevelser eleverne har haft vedrørende chancer. Det er vigtigt at spillene ikke blot fremtræder som underholdning, men at de sættes ind i en sammenhæng med de aktiviteter der i øvrigt har været i læremiljøet CHANCE.

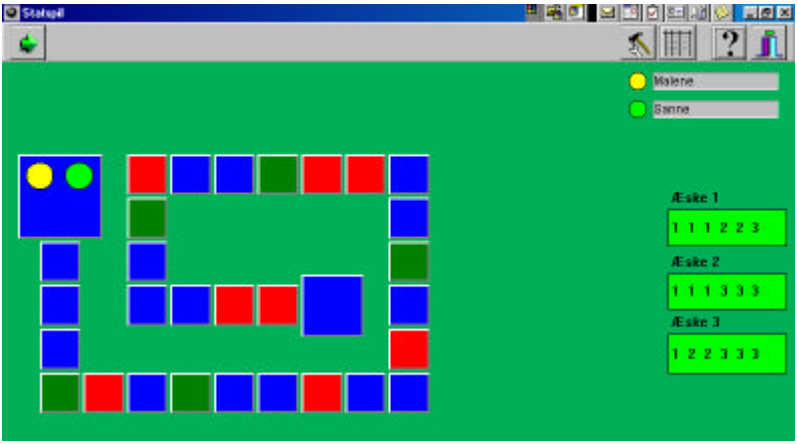
I det følgende gives en kort indføring i hvordan spillene er opbygget. Et forslag til anvendelse af de fem spil i tilknytning til læremiljøet CHANCE er givet i EMMA-temaet Chancespil.

9.1 Statspil

Spillets regler

Spillet kan spilles af op til 4 spillere. Den ene af disse spillere kan være computeren. Hver spiller skal føre sin spillebrik gennem felterne, og den der først når målet, har vundet.

Nogle af spillepladens felter er grønne. En spillebrik der lander på et grønt felt, rykker 2 felter frem. Andre felter er røde. En spillebrik der lander på et rødt felt, rykker 2 felter tilbage.



Chanceelementet i Statspil

Spillebrikkernes flytning bestemmes ved at der udtages kugler fra tre æsker der hver indeholder seks kugler. Kuglerne er forsynet med tallene 1, 2 eller 3, og det er den udtagne kugles tal der afgør hvor meget spillebrikken skal flyttes.

Den spiller der skal flytte en brik, vælger en af de tre æsker. Programmet udtager derefter tilfældigt en af de seks kugler i denne æske, og spillerens brik flyttes 1, 2 eller 3 felter, alt efter hvilken kugle der blev udtaget.

Hvad drejer spillet sig om?

Statspil er et spil som både opfordrer til almindeligt spil og til strategiovervejelser. Spillet kræver at spillerne overvejer hvilke valg der skal gøres - hvilke valg der er mest hensigtsmæssige i den givne situation. Der skal tages hensyn til chancen for at få udtrukket den kugle som spilleren gerne vil have for at komme videre.

Der kan benyttes en strategi som bringer spilleren hurtigt videre i spillet, mod målet, eller der kan anlægges en strategi som slår de andre spillere tilbage på spillepladen imens man selv sikkert nærmer sig målet.

Det kan være en god idé på forhånd at overveje hvilken strategi der skal spilles efter, men der kan naturligvis også blot spilles helt frit.

Børns chanceintuition belyst gennem Statspil

Statspil har i en speciel version været benyttet til en undersøgelse af børns chanceintuition. Resultaterne fra dette arbejde har dannet udgangspunkt for tilrettelæggelsen af INFAs undervisningsmaterialer til arbejdet med sandsynlighed i skolen.

Det var undersøgelsens sigte at denne belysning skulle foregå i tilknytning til meningsfyldte aktiviteter, hvor eleverne er motiverede til at arbejde seriøst med de forelagte situationer. Der skulle altså ikke benyttes kliniske miljøer hvor eleverne skal forestille sig at de var i en nærmere beskrevet situation.

Det var endvidere et sigte at elevernes intuition belyses gennem deres handlinger og ikke gennem verbale udsagn i spørgeskemaer eller interviews. Netop chancer og chanceforståelse kan være et område hvor en handle-intuition hos eleverne tidsmæssig går langt forud for deres evne til at give en verbal forklaring af handlemønstre.

En tilrettelæggelse af undersøgelsen ud fra disse forudsætninger kan gøres i regi af et matematikspil udført ved hjælp af computer. Fra INFAs mange edb-spil har vi erfaret hvor engageret elever på alle alderstrin går ind i beskæftigelse med dem. Ved et passende spil-design kan det opnås at elevernes handlinger i beslutningssituationer kan belyse deres intuitive vurdering af chancer.

Ved at lade spillet udføre på computer er der mulighed for at foretage en automatisk dataindsamling til beskrivelse af de beslutninger eleverne udfører undervejs i spillet, uden at der gribes forstyrrende ind i spillet. Det er således ikke *udsagn* fra eleverne der udgør undersøgelsens data, men alene deres handlinger i beslutningssituationer.

Undersøgelsen blev foretaget med en specielt tilrettelagt udgave af Statspil. Af spilleplanes felter blev 12 felter udtaget til nærmere observation, og her registrerede computeren hvilket valg af spilleæske der blev foretaget i spillet når elevens brik skulle videre fra det valgte felt.

Set fra et fagligt synspunkt var der for hvert af de udvalgte 12 felter et optimalt valg af spilleæske. Et valg som i følge chancebetragtninger ville give spilleren den bedste mulighed i det videre forløb. I undersøgelsen blev for hver elev ført statistik over hans eller hendes valg af den korrekte spilleæske.

Undersøgelsens resultater er fremlagt i INFA-Småtryk 1995-1: *Børns chanceintuition belyst gennem matematikspil* [Litteraturlisten afsnit E].

Her skal gengives en del af undersøgelsens konklusion:

Klassetrin 1 - 4
Elevernes valg af korrekt æske er præget af stor usikkerhed. Valget bliver gradvis sikrere med højere klassetrin, men selv i 4. klasse er der valgsituationer hvor elevernes foretrukne valg er en anden æske end den korrekte.

Klassetrin 5 - 9
Elevernes valg af korrekt æske bliver mere og mere sikkert op gennem klasserne. I alle de undersøgte situationer er det den korrekte æske der hyppigst vælges af eleverne.

En kort karakteristik af elevernes chanceintuition givet på grundlag af de indsamlede data kunne derfor være:

Klassetrin 1-3:	Usikker intuition
Klassetrin 4-6:	Voksende sikkerhed
Klassetrin 7-9:	Ganske sikker intuition

I alle tre grupper gælder det at intuitionen generelt bliver sikrere op gennem klasserne.

Det skal understreges at de formulerede udsagn har deres baggrund i materialet som helhed. De er altså "statistiske udsagn", og de kan ikke umiddelbart overføres på den enkelte elev i fx 3. klasse, 5. klasse eller 9. klasse.

Der findes således i materialet eksempler på elever fra begyndertrinnene som allerede i 7-8 års alderen har en meget sikker intuition med hensyn til de oplevede chancesituationer, og der findes elever på de afsluttende klassetrin som tilsyneladende står meget famlende over for de beslutninger der skal tages undervejs i spillet.

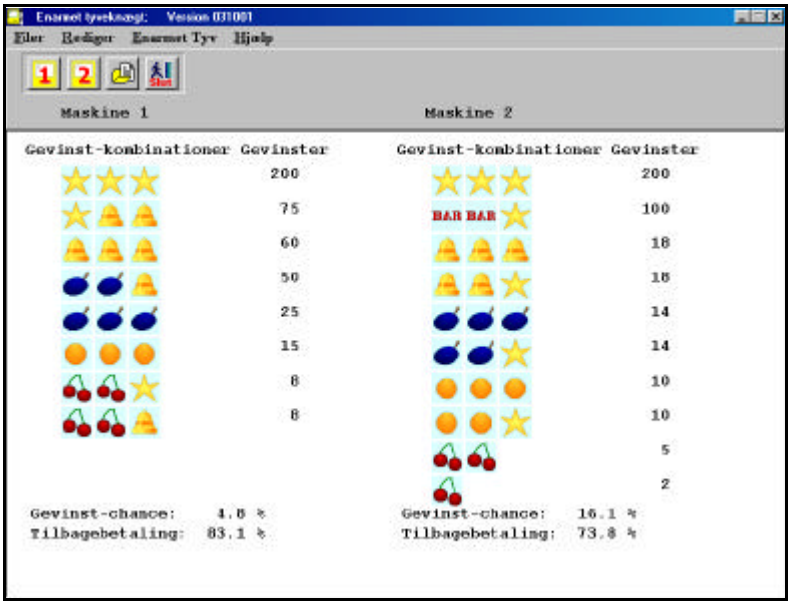
Undersøgelsens data kan give et fingerpeg om hvilken grad af modenhed i chancesituationer af den forelagte art der almindeligvis forekommer på de forskellige klassetrin i folkeskolen. Men undersøgelsen er selvfølgelig ikke så omfattende og professionelt designet at der med den som grundlag kan opstilles en "chance-modenhedsprøve" for folkeskolens elever hvor den enkelte elevs resultater indplaceres på en skala ud fra de data der er fremlagt her.

I undersøgelsen er foretaget en opgørelse der sammenligner pigers og drenges chance-intuition som den er målt ved hjælp af Statspil. Der henvises til afsnit 6.2 i ovennævnte publikation.

I undervisningsmæssig sammenhæng vil undersøgelsens resultater kunne give læreren en information om aktiviteter der kan inddrages i arbejdet med sandsynlighed i skolen. Undervisningsaktiviteter som indebærer elevernes omgang med chancesituationer i tilknytning til stikprøveudtagelse fra små overskuelige mængder, vil efter undersøgelsen kunne støtte udviklingen af elevernes chancebegreb.

9.2 TYV - Enarmede tyveknægte

Spilleautomaten, den enarmede tyveknægt, kom til verden i Californien i 1890'erne. Den har skiftet udseende gennem årene, men dens opbygning er i princippet uændret.



Spilleautomaten har et antal tromler eller hjul, som oftest tre eller fire, der bevæger sig uafhængigt af hinanden, og som hver kan standse i et antal positioner, fx 20 eller 30. Positionerne på hjulene er forsynet med en række symboler. I programmet TYV ser vi på to spillemaskiner som har tre hjul der hver kan standse i 20 positioner.

På skærmbilledet fra programmet TYV kan man se de regler der gælder for udbetalingen af gevinster på de to maskiner.

I programmet TYV er indlagt de to spillemaskiner Maskine 1 og Maskine 2. Der er mulighed for at man kan ændre i de to maskiner, så der kan arbejdes med en maskine hvor man selv fastsætter gevinstreglerne.

I TYV kan der vælges mellem forskellige typer af spil:

- Der kan udføres enkeltspil
- Der kan udføres en serie af spil
- Der kan spilles indtil en given kapital er opbrugt

EMMA-temaet Chancespil går nærmere ind på disse spillemuligheder.

9.3 Roulette

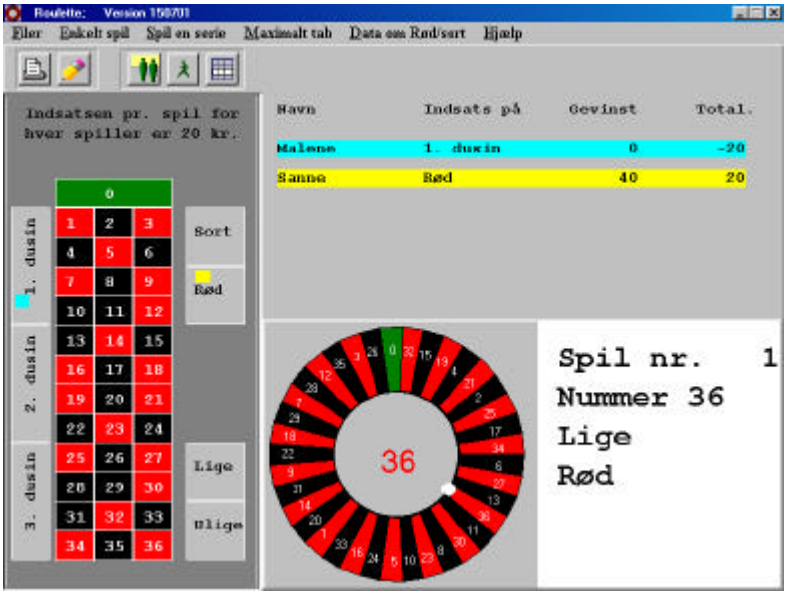
Roulette er det klassiske kasinospil. I INFAs udgave af spillet er der foretaget nogle forenklinger: Hver spiller kan kun spille med et enkelt spillemærke, som er sat til en værdi af 20 kr. Endvidere er udeladt nogle få af de indsatskombinationer som findes i den professionelle udgave. Alligevel er der så mange faciliteter at ROULETTE vil give et godt billede af kasinospillet.

Der kan i ROULETTE spilles på tre måder:

- Der kan udføres enkeltspil
- Der kan udføres en serie af spil
- Der kan spilles indtil en given kapital er opbrugt

I spillet er endvidere indlagt en mulighed for at studere spilleforløbet nærmere. Her er det specielt spilleresultaterne Rød/ Sort der undersøges.

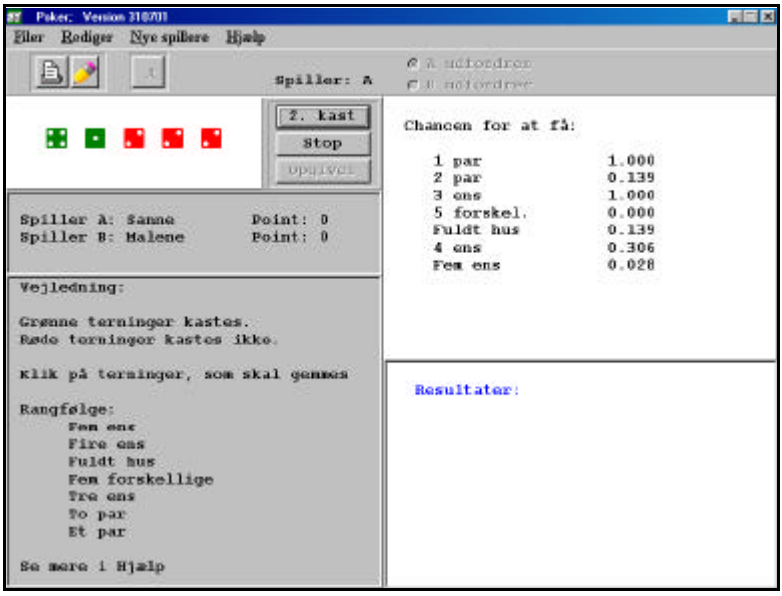
Eleverne vil kunne se på forekomsten af de to farver, og de vil kunne se på hvor hyppigt de enkelte numre udtrækkes. De vil også kunne afsløre om der er hold i spilovertroen som fx siger at efter tre gange rød i træk er der større chance for sort (eller for rød).



9.4 Pokerterning

Pokerterning spilles med fem terninger. I den version vi her anvender, kan der deltage to spillere, spiller A og spiller B. Den spiller der kaster først, kaldes udfordreren. Han prøver i løbet af tre kast at opnå så godt et resultat som muligt, den anden spiller skal så i sine kast prøve at overgå udfordreren.

Nedenfor vises en situation hvor Sanne (udfordreren) i sit først kast har fået 4-1-2-2-2. I rammen nederst til venstre på skærmen kan man se den rangfølge der gælder for kastene i Pokerterning: Bedst er ”Fem ens”, dvs. alle terninger viser samme øjental. Derefter følger ”Fire ens”, hvor fire af de fem terninger viser samme øjental. - Rækkefølgen af øjentallene er uden betydning.



Efter ”Fire ens” kommer ”Fuldt hus”, dvs. tre terninger viser ét øjental og de to andre terninger viser et andet øjental, fx 2-2-2-5-5. Altså ”Tre ens” plus ”Et par”.

Herefter følger så ”Fem forskellige” hvor der ikke er to terninger der viser det samme. Efter ”Fem forskellige” følger ”Tre ens” og ”To par” (dvs. to forskellige par, som fx 2-2-4-4-6) og til sidst ”Et par”, som fx 2-2-3-4-5.

Jo højere oppe på listen et kast er placeret, jo bedre er det. Og jo sværere er det at opnå det pågældende kast.

De røde terninger

Sanne har valgt at klikke på de tre terninger der viser 2. De bliver nu markeret med rødt. De terninger der markeres med rødt, låses fast og deltager ikke i næste kast. Det er altså kun de grønne terninger der kastes i næste kast.

I chance-skemaet til højre på skærmen har programmet udregnet Sannes chancer for de forskellige kast. Her kan vi se at der ud for "Et par" er anført en chance på 1.000. Det betyder at Sanne er sikker på at få et resultat der indeholder to terninger der viser ens. Det har hun jo allerede opnået med de markerede røde terninger. Det samme gælder for "Tre ens" hvor chancen også er 1.000.

Men Sanne er mere interesseret i at se hvad chancen er for at hun kan forbedre sit resultat, altså få noget der er bedre end "Tre ens".

Her ser vi i skemaet at chancen for "Fuldt hus" er 0.139. "Fuldt hus" vil hun jo opnå hvis de to grønne terninger i næste kast vil vise samme øjental, og dette øjental må ikke være 2. Denne chance kan udregnes til 5/36: Der er 36 resultater når to terninger kastes, og kun de fem resultater 1-1, 3-3, 4-4, 5-5 og 6-6 vil give "Fuldt hus". Chancen er derfor 5/36 = 0.139.

Vi ser at chancen for "Fire ens" er endnu bedre, her er chancen oppe på 0.306. (Prøv selv at forklare hvordan chancen kan beregnes).

Endelig ser vi at chancen for "Fem ens" kun er 0.028. Sanne skal nok ikke satse på at hun kan opnå "Fem ens" i næste kast.

En ny beregning

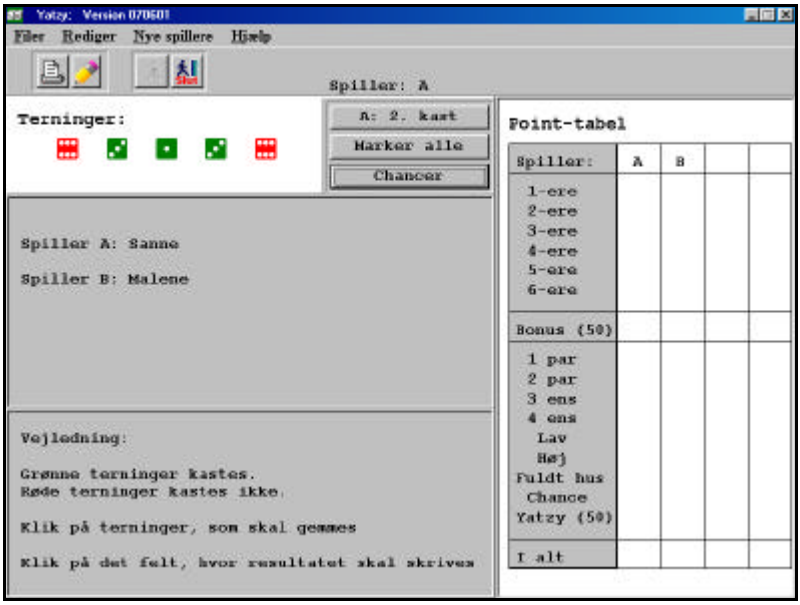
Hvis Sanne ændrer på valget af røde terninger, kommer der straks en ny chanceberegning på skærmen. Hun kan fx vælge kun at låse to af de tre terninger der viser 2 og undersøge hvilke chancer det giver hende.

Sanne kan også vælge fx at låse fire terninger, nemlig de tre fra før samt den der viser 4. Hun vil nu se at det forøger hendes chance for at få "Fuldt hus" i næste kast. Men det formindsker hendes chance for at få "Fire ens". Så det er ikke ganske oplagt hvad hun skal satse på.

Når Sanne har afsluttet sine overvejelser, udfører hun kast nr. 2. Derefter kan hun igen gå ind i chanceovervejelser før hun udfører sit sidste kast. Dette kast noteres på skærmen som en udfordring til Malene.

9.5 Yatzy

Her arbejder vi med det velkendte Yatzy-spil. I den version vi anvender, kan der deltage op til fire spillere.



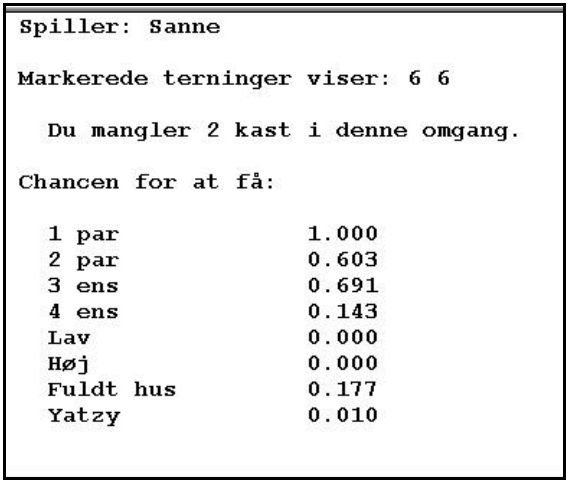
Spillet adskiller sig fra det traditionelle selskabsspil ved at der kan foretages beregninger af chancer undervejs i spilleforløbet. Disse beregninger kan støtte spillerens overvejelser over hvilken kategori af kast der skal satses på.

På spilleplanen ovenfor er gjort klar til et spil mellem Sanne og Malene. Sanne har foretaget sit første kast, og hun har markeret de to terninger der på skærmen er vist med rødt. Dem har

hun tænkt at låse, således at hun kun kaster videre med de grønne terninger.

I Yatzy er to seksere et godt udgangspunkt for mange kast. Det kan føre til "Tre ens" eller til "Fire ens", til "To par" eller til "Fuldt hus". Ja, måske kan det føre til det kast der hedder "Yatzy", dvs. "Fem ens", det bedste kast i spillet.

Med et klik på Chancer kan Sanne nu få foretaget en chanceberegning for de muligheder der foreligger:



Vi kan her se at chancen for at opnå "Tre ens" er 0.691, dvs. næsten 70%. Chancen er beregnet ud fra at Sanne har to kast endnu, og hvis hun udfører de to kast med den markering der nu foreligger, dvs. med de to røde seksere, så er hendes chance for at opnå "Tre ens" enten i det første kast eller i det andet, beregnet til næsten 70%.

Der er mulighed for at ændre valget af røde terninger. Så snart et nyt valg er foretaget, kan der udføres en ny chanceberegning.

Spilleren kan på den måde få en vurdering af sine chance-intuitioner undervejs i spillet og se hvor godt de stemmer med de beregnede værdier.

10. At arbejde i et it-læremiljø

I dette afsluttende afsnit er samlet nogle af de forslag der i det foregående i del 1 og del 2 af CHANCE har været fremsat vedrørende arbejdet med it-læremiljøer i skolens matematik.

De givne kommentarer henvender sig i første række til læreren, men der gives også undervejs forslag som direkte er rettet til eleverne. Det vil dog nok i alle tilfælde være læreren der udlægger teksten og gør brug af de dele af kommentarerne som er relevante i den foreliggende undervisningssituation.

1. Kend værktøjet

Det er helt afgørende at eleverne bliver fortrolige med det edb-programmel der benyttes i arbejdet med de faglige emner. I EMMA-temaerne vil der gennem eksempler blive givet en indføring i it-værktøjets indretning, dets brugerflade og dets anvendelse. I denne fase vil det være naturligt at eleverne arbejder med de eksempler og opgaver der er fremlagt i temaets tekstafsnit. De er nemlig udvalgt med denne indføring for øje.

Ganske vist hævdes det i progressive pædagogiske kredse at elever ikke må udsættes for opgaver som er stillet af andre, de skal kun beskæftige sig med problemer de selv formulerer! Men mon en sådan metode vil føre ret langt ind i det faglige emne? Vil eleverne få noget indblik i hvad værktøjets muligheder er? Og vil de se den faglige dybde i det matematiske emne? – Vi vil foretrække at lade denne frie arbejdsform vente til eleven er blevet fortrolig med værktøjet og har fået indblik i det faglige emne.

Der gives derfor i EMMA-temaerne en ret håndfast indføring som har til formål at fortælle om de muligheder som ligger i de anvendte it-læreværktøjer. Denne indføring belyser samtidig de mere tekniske sider af programmelbrugen. Men hav tålmodighed! Når værktøjet er blevet et naturligt hjælpemiddel, så

kan eleverne frit boltre sig med åbne opgaver og selvformulerede problemer.

Arbejdsgangen er derfor følgende:

(1) Eleverne gøres fortrolige med værktøjet. Gennem eksempler belyses brugen af it-læreværktøjet.

(2) Eleverne får et første kendskab til det faglige emneområde. Gennem strukturerede opgaver får eleverne indblik i faglige problemer som knytter sig til det faglige emne.

(3) Gennem beskæftigelse med åbne opgaver får eleverne mulighed for at uddybe og opøve deres faglige kunnen.

(4) Eleverne støttes i arbejdet med at benytte it-værktøjet i aktiviteter med selvformulerede problemstillinger.

2. Forståelse kommer ofte i små bidder

Det er en erfaring at man i arbejdet med matematik ofte observerer at den fulde forståelse sjældent indtræffer ved første møde med stoffet og de fremlagte problemstillinger. Det er også en erfaring at skoleelever ved den første lille forhindring i læreforløbet er tilbøjelige til at sige "Det forstår jeg ikke noget som helst af!". Og derefter giver de op, mister interessen for sagen og stempler stoffet som "Kedeligt". - I dagens skole er det desværre mere og mere af det faglige stof der overgår til kategorien "Kedelig".

Det vil være en vigtig opgave for læreren at ændre denne indstilling til at lære matematik. Eleverne må opleve at forståelse af matematik ofte kommer i små bidder. Hvert nyt forsøg giver lidt ny indsigt og lidt mere forståelse af det fremlagte problem. Og eleverne må gøres bekendt med at en sådan arbejdsmetode ikke er speciel for fagets nybegyndere, også erfarne fagfolk arbejder på denne måde. At eleverne ikke forstår den fulde sammenhæng ved første møde, er derfor ikke et tegn på at de

skal holde sig fra matematik. De skal måske blot indse at arbejdsmetoder og læremetoder kan være forskellige fra fag til fag.

Også færdighed i anvendelse af edb-programmet kan være noget der må erhverves lidt efter lidt. Hvis der er et ord eller en sætning der ikke umiddelbart forstås, så gå videre! Teksten i EMMA-temaet er bygget på eksempler, og lidt senere kommer der sikkert et eksempel som hjælper til med at fjerne nogle af uklarhederne.

Det må indrømmes at læsefærdighed er et krav til den der beskæftiger sig med matematik. Matematiske ideer, emner og metoder kan ikke fremlægges uden at der gøres brug af tekst. Almindeligvis er teksterne i matematik ofte korte og klare (men til gengæld ganske informationsmættede), så med en seriøs indsats burde budskaberne i teksterne være til at håndtere.

3. Bliv ved! Prøv igen! Giv ikke op!
Selv om eleven er fuldt fortrolig med it-værktøjet og selv om den forelagte problemstilling er fuldt forstået, så kan der alligevel være vanskeligheder med at få taget hul på arbejdet med løsning af problemer. Et råd til eleven vil være: *Gå i gang! Giv ikke op! Prøv med nogle forslag! Brug værktøjet og se hvad det fører til!*

Det gør ikke noget om elevens forslag ser mindre fornuftige ud: Det er bedre at prøve noget end at give helt op. Kun den der prøver, har mulighed for at komme igennem. - Når matematikken driller, gælder det om at kunne tage et initiativ til at komme videre. Selvfølgelig kan læreren spørges til råds, men ofte vil eleven selv kunne overvinde forhindringerne ved hjælp af egne famlende forsøg. Og måske han lærer mere af dem end af at få hjælp fra andre.

Få eleverne til at betragte problemer som udfordringer der har til formål at fremme læreprocessen. Gennem sådanne udfordringer kan eleverne udbygge deres matematikkunnen og op-

nå bedre indsigt i det faglige emne og dets anvendelsesmuligheder. Problemer skal have en passende sværhedsgrad for at kunne bidrage til elevernes faglige udvikling. Et problem som enhver kan løse uden at anstrenge sig, er ikke værd at spilde tid på. Men et problem som kan sætte eleven i gang med en intens tankevirksomhed, kombineret med en aktiv brug af it-læreværktøjet, er en udfordring der er værd at tage op.

4. Arbejd med stoffet: Lav selv opgaver

Hjælp selv med til at få gode matematik-arbejdsvaner: Vær ikke tilfreds med blot at løse de opgaver der stilles til dig. Arbejd videre med stoffet og prøv med dine egne opgaver. I begyndelsen kan du måske blot omforme de stillede opgaver en smule, ændre lidt på de givne inddata og se hvilken virkning det har på løsningerne.

I næste omgang kan opgaverne inspirere dig til at se på problemstillinger af en anden art. Måske de ligner de opgaver du allerede har set på, men du opstiller lidt ændrede krav der skal opfyldes. Eller også slækker du på de stillede krav og undersøger hvad det får af konsekvenser for løsningerne.

Du skal i det hele taget kun opfatte de stillede opgaver som eksempler der kan illustrere hvad værktøjet kan bruges til. Den helt dybe forståelse af det faglige emne og af edb-programmet viser sig i at du selv kan formulere nye opgaver og angribe dem ved hjælp af it-værktøjet.

Når du arbejder med læremiljøet CHANCE, kan du udnytte at der i de daglige aviser ofte vil være omtale af situationer som har med sandsynlighed at gøre. Det kan være vinderchancer i spil eller sport, og det kan være risikoer i forbindelse med sygdom, naturfænomener eller trafik. Sådanne omtaler kan måske give dig inspiration til at formulere problemstillinger som vedrører sandsynligheder.

5. En ny arbejdsform: Der eksperimenteres

Du vil i it-læremiljøerne møde en helt ny arbejdsform: I arbejdet med chancesituationer skal du således skaffe dig oplysninger om ukendte chancer ved hjælp af data som indsamles af edb-programmer. Du vil her arbejde med matematik på en ny måde:

> Der er ikke noget facit der er det eneste rigtige, og du kommer ikke frem til dine resultater ved at foretage beregninger eller omformninger og udledninger.
>
> I stedet udfører du eksperimenter. Du indsamler data fra eksperimenterne, og på grundlag af dine data giver du dit bud på de ukendte chancer. Din kammerat som udfører de samme eksperimenter, kan komme frem til resultater som afviger fra dine. Men det betyder ikke at den ene af jer har "regnet rigtigt" og den anden ikke. I har begge indsamlet data og givet jeres bud på løsningen til det forelagte problem.
>
> Du kan ikke vide hvor gode dine resultater er, men du kan altid afprøve en løsning ved at udføre en ny række af eksperimenter.
>
> I arbejdet med eksperimenterne har du måske brugt et edb-program, men i princippet kunne du selv have udført de mange eksperimenter uden brug af edb. Programmet har blot været et værktøj i arbejdet. Men et stærkt værktøj, som giver dig en række nye muligheder – såvel fagligt som læremæssigt.

Det er vigtigt at eleverne accepterer og fuldt går ind for denne arbejdsmetode som måske vil være ny for dem. Eleverne skal gennem arbejdet med eksempler og opgaver se de muligheder der ligger i denne empiriske måde at "lave matematik" på. Hvor lejligheden findes, vil det empiriske selvfølgelig kunne suppleres med en teoretisk behandling. Men ofte er det kun de mest banale chancesituationer som tillader en sådan supple-

rende teoretisk behandling. Eleverne må derfor vurdere de opnåede problemløsninger på hvor godt de stemmer med den observerbare virkelighed.

6. Vær nysgerrig. Spørg!

Nært knyttet til den nye arbejdsform er en holdning til matematikken som er præget af nysgerrighed og spørgelyst. Hvad sker der hvis jeg vælger andre inddata? Kan det være rigtigt at...? Hvilken betydning får det at vi ændrer betingelserne til...? Hvad bliver chancen når vi stiller det nye krav at ..? Er det muligt at fastlægge en chancesituation hvor chancen bliver ....?

It-læreværktøjet giver eleverne god inspiration til at stille den slags spørgsmål, og det giver dem gode muligheder for at gå i gang med at opstille deres egne svar på de stillede spørgsmål.

Der er her åbnet for en kreativ indsats fra elevernes side. Kreativitet kan bestå i at eleven opdager og udforsker nye hjørner af det faglige emne, og at de nye erfaringer fører til formulering af hypoteser og antagelser som kan give anledning til videre faglig efterprøvning. Og måske til formulering af nogle generelle resultater. Men kreativitet kræver et fagligt fundament. Kun når en solid faglig baggrund er etableret, er det muligt for eleven at udfolde sig kreativt på en seriøs måde.

7. Tænk før – og tænk efter!

I chancesituationer vil det være oplagt at det foreliggende problem tages op til overvejelse inden det angribes nærmere ved hjælp af it-værktøjet. Lad eleven gætte på hvad den ukendte chance er! Lad være med at forlange en præcis talværdi, men vær tilfreds med en opdeling i "Stor chance", "Lille chance" og "Middel chance". Med lidt mere erfaring kan eleverne måske yderligere specificere chancerne til "Lidt over middel", "Noget under middel", osv. Benyt også den indledende overvejelse til at lade eleverne redegøre for deres eventuelle begrundelse for det foretagne gæt.

Når eleverne har benyttet chanceværktøjet og fundet et svar på den ukendte chance, er det igen tid for en overvejelse. De tidligere givne gæt vil kunne holdes op mod de indhentede svar fra programkørslerne, og der kan være lejlighed til at give et forsøg på en forklaring på hvorfor det nu gik som det gjorde. Sådanne forklaringer kan selvfølgelig med fordel fremlægges til almen drøftelse i en større kreds. Ofte kan drøftelserne føre til at der udføres nye eksperimenterende undersøgelser.

8. Ræsonnér og forklar!

Arbejdet med de faglige emner vil ofte give anledning til resultater som kan udfordre til ræsonnementer og faglige forklaringer. Hvorfor fik jeg mon denne værdi på den ukendte chance? Ville chancen have været større hvis ...? Eller hvorfor fik jeg næsten samme chance i de to situationer? Kunne jeg have sagt det på forhånd?

Der kan undertiden ræsonneres i en form som kan komme tæt på et matematisk bevis: Hvis denne betingelse er opfyldt, så vil resultatet blive...

Det er ikke et mål at arbejdet skal føre til at eleverne undervejs forlader den empiriske arbejdsmetode og går over til teoretiske overvejelser. Det ville alt for hurtigt føre til blokeringer, og "Det er kedeligt"-paraden" vil straks komme op hos mange elever. Men det vil være oplagt at lade ræsonnement og argumentation få en plads hvor det kan støtte elevernes arbejde med at opnå faglig indsigt og forståelse.

Ofte må det være læreren som gennem supplerende spørgsmål til arbejdsforløbet sætter fokus på nogle situationer hvor faglige forklaringer kan være rimelige og gennemførlige.

9. Brug samarbejde – hvor det er en god ide

Det vil være oplagt at udnytte samarbejdets muligheder i elevernes beskæftigelse med de faglige emner og it-værktøjerne. Ofte vil der kunne være en stor gevinst at hente gennem udveksling af synspunkter i en mindre gruppe. Et problem kan

her ses fra flere sider og forskellige aspekter i løsningsforslag kan tages op til vurdering og diskussion.

Man skal også være opmærksom på at der kan ligge en læringsmæssig fordel i at en elev skal fremlægge sine ideer for andre og i tilknytning hertil måske ligefrem stå for et lille undervisningsforløb af sine kammerater.

Men det er ikke al matematiklæring der er lige velegnet til samarbejde. Der må derfor foretages en vurdering af hvornår individuel aktivitet er at foretrække frem for den kollektive. Og det er i øvrigt heller ikke alle elever der bryder sig om samarbejde. Undertiden kan samarbejdet stresse den enkelte, der er jo næppe to elever der arbejder i samme tempo og som har behov for de samme tænkepauser undervejs. Ved en forcering af samarbejdet kan et ellers velfungerende arbejdsmiljø slås i stykker.

Så lad samarbejdet udvikle sig ad naturlig vej. Og hold øje med hvordan det forløber.

10. Gør status!

Det vil være en god ide at der jævnligt gøres status i arbejdet med de faglige emner.

EMMA-temaerne er opdelt i relativt korte faglige forløb, og efter hvert forløb opfordres eleven til at gå ind i egne aktiviteter i afsnittene " Prøv selv".

Disse afsnit kan samtidig være et signal til læreren om at lade eleverne gøre en lille status over det hidtidige arbejde. Hvilke emner og metoder har vi benyttet? Hvordan indgår de i det samlede forløb for hele EMMA-temaet? Hvad har vi lært af nyt? Hvad har vi oplevet vedrørende matematikkens anvendelse?

Dette statuspunkt skal gøre det til en naturlig ting for eleven at der reflekteres over det lærte. Elever lærer ikke blot ved at

være aktive, men ved også at tænke over hvad de har været aktive med og ved at tænke over hvad aktiviteterne førte til.

Nogle foreslår at sådanne refleksioner bør foretages i tilknytning til at eleven fører en lære-logbog. En slags dagbog hvor den enkelte elev selv beskriver hvad han har foretaget sig i det faglige område, hvilke metoder han har sat sig ind i, hvilke faglige oplevelser og faglige udfordringer han har mødt og hvilken ny kunnen han har erhvervet sig.

Logbogen kan suppleres med at eleven samler eksempler på de opgaver han synes har været af særlig interesse: Måske opgaver der var mest typiske for emnet, opgaver der var de sværest at knække, eller de opgaver hvor eleven selv havde særlig succes med løsningen.

Og til sidst: ***It-læremiljøer kræver lærerstøtte***

Hvilken rolle skal læreren have i forbindelse med arbejdet med EMMA-temaer? Til alle EMMA-temaer hører en indledende lærerorientering, og i den gives der forslag til at læreren tager hånd i den indledende fase med oplæg til arbejdet med EMMA-temaet. I lærerorienteringen er givet nogle ideer til hvad der kunne indgå af aktiviteter.

Endvidere er det oplagt at læreren har en vigtig opgave i tilknytning til efterbehandlingen af arbejdet med temaet. Her vil lærerens faglige baggrund og hans kendskab til temaets indhold give ham gode muligheder for at fremme elevernes refleksioner over det udførte arbejde.

Det er mere usikkert i hvilken grad læreren skal deltage i elevernes arbejde med EMMA-temaerne. Her må nok spilles efter gehør, ved nogle temaer og for nogle elevgrupper skal der sikkert gives en god lærerstøtte til arbejdet, i hvert fald i de indledende faser.

Læreren vil have en vigtig rolle ved elevernes møde med de faglige oplevelser og de faglige udfordringer. Læreren vil her med sin faglige baggrund kunne vurdere hvor de egentlige faglige oplevelser findes, de oplevelser som giver et indblik i de væsentlige matematiske begreber og ideer og som kan bidrage til at udvide elevernes matematiske univers.

Læreren vil selvfølgelig også have den vigtige rolle at give respons på elevernes arbejde. Denne respons kan gives i små portioner undervejs i arbejdet, men måske den også i nogle tilfælde vil kunne indgå i klassens samlede efterbehandling af arbejdet med temaet.

Hertil kommer lærerens helt afgørende rolle som tilrettelægger af det differentierede arbejde som skal sigte mod at hver af klassens elever får en optimal udfordring. Denne opgave kan virke ganske overvældende, men den løses kun gennem en fortsat indsamling af erfaringer fra det praktiske arbejde i klassen.

Er lærerne fuldt forberedte til en sådan form for undervisning? Næppe, men de vil kunne afprøve den og skaffe sig erfaringer gennem arbejdet. I dagens undervisning der er præget af stadige forandringer, er der ingen lærer der er forberedt til alt hvad der kan opstå af nye ideer. Men man kan være villig til at gå ind i nye overvejelser og være med til at skaffe ny pædagogisk indsigt.

It gør det ikke lettere at være lærer, men gør det måske mere spændende - og i hvert fald mere udfordrende.

Litteratur

A: Sandsynlighedsbegrebet

H. Steinbring: *Zur Entwicklung desWahrscheinlichkeitsbegriffs.* Band 18, Institut für Didaktik der Universität Bielefeld, 1980

L. Rasmussen: *Det statistiske sandsynlighedsbegreb - et naturligt pædagogisk udgangspunkt*. Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole, 1982

L. Rasmussen: *Sandsynlighedsbegrebets oprindelse og præhistorie*. Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole, 1983

A.S. Hawkins, R. Kapadia*:* Children's Conceptions of Probability. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 15, 1984

C. Konold: Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 1989

D. Gillies*: Philosophical Theories of Probability.* Routledge 2000

B: Undervisning i sandsynlighed

J. Neyman: *A First Course in Probability and Statistics.* Holt, Rinehart and Winston, 1950

A.C. Malmberg: *Elementær Sandsynlighedsregning 1-2.* G.E.C. Gad, 1975

Stochastik im Schulunterricht. Beiträge zum 3. internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky, 1980

A. C. Malmberg: *Hvad er Chancen? 1-2.* G.E.C. Gad, 1980

V. Barnett: *Teaching Statistics in Schools throughout the World.* International Statistical Institute, 1982

A. O'Hagan: *Probability. Methods and Measurement.* Chapman and Hall,1988

R. Kapadia, M. Borovcnik (edit.): *Chance Encounters: Probability in Education.* Kluwer, 1991

A. Hawkins m.fl. : *Teaching Statistical Concepts.* Longman, 1992

H. Kütting: *Didaktik der Stochastik.* B.I. Wissenschaftsverlag, 1994

S. Lajoie (edit.): *Reflections on Statistics: Learning, Teaching, and Assessment in Grades K-12.* Lawrence Erlbaum Associates, 1998

C: Stokastisk tænkning

E. Fischbein: *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.*D. Reidel, 1975

R. Scholz: *Stochastische Problemaufgaben.* Band 23, Institut für Didaktik der Universität Bielefeld, 1981

D. Kahnemann m.fl.: *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge University Press, 1982

H.J. Bentz, M. Borovcnik*:* Zur Repräsentativitätsheuristik - eine fundamentale statistische Strategie*. MNU,* 1986

R.W. Scholz: *Cognitive Strategies in Stochastic Thinking*. D. Reidel, 1987

E. Fischbein m.fl*.: Factors Affecting Probabilistic Judgements in Children and Adolescents. Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 1991

M. Borovcnik: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik.* B.I. Wissenschaftsverlag, 1992

M. Borovcnik, R. Peard: *Probability.*
International Handbook of Mathematics Education, Chapter 7. Kluwer, 1996

D: It-læremiljøer

C. Hoyles, R. Noss: A Pedagogy for Mathematical Microworlds*. Educational Studies in Mathematics,* Vol. 23, 1992

Y.Kafai, M. Resnick (edit.): *Constructionism in Practice. Designing, Thinking, and Learning in a Digital World*. Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

D.H. Jonassen m. fl. : *Learning With Technology. A Constructivist Perspective.* Merill, Prentice Hall, 1999

D. H. Jonassen, S. Land (edit.): *Theoretical Foundations of Learning Environments.* Lawrence Erlbaum Associates, 2000.

D.H. Jonassen: *Computers as Mindtools for Schools. Engaging Critical Thinking.*
Merill, Prentice Hall, 2. udg., 2000

A. Oldknow , R. Taylor: *Teaching Mathematics with ICT*. Continuum, 2000

E: INFA-publikationer

Inge B. Larsen m.fl. : *Edb-modeller i matematikundervisningen* INFA-Rapport 1992

Inge B. Larsen m.fl.: *Læremiljøer i en edb-støttet matematik-undervisning.*INFA-Rapport 1994

Allan C. Malmberg: *Sandsynlighedsregning og statistik i skolen. Erfaringer fra et forskningsarbejde.* INFA-Småtryk 1994-2

Allan C. Malmberg: *Børns chanceintuition belyst gennem matematikspil.* INFA-Småtryk 1995-1

Inge B. Larsen m.fl.: *EMMA Elektroniske Materialer til Matematik.* INFA-Småtryk 1999-1

Allan C. Malmberg*: Hvorfor IT i skolens matematik?* INFA-Småtryk 1999-2

ISBN 87-7701-988-1