

EMMA*-Tema: Chancetræer

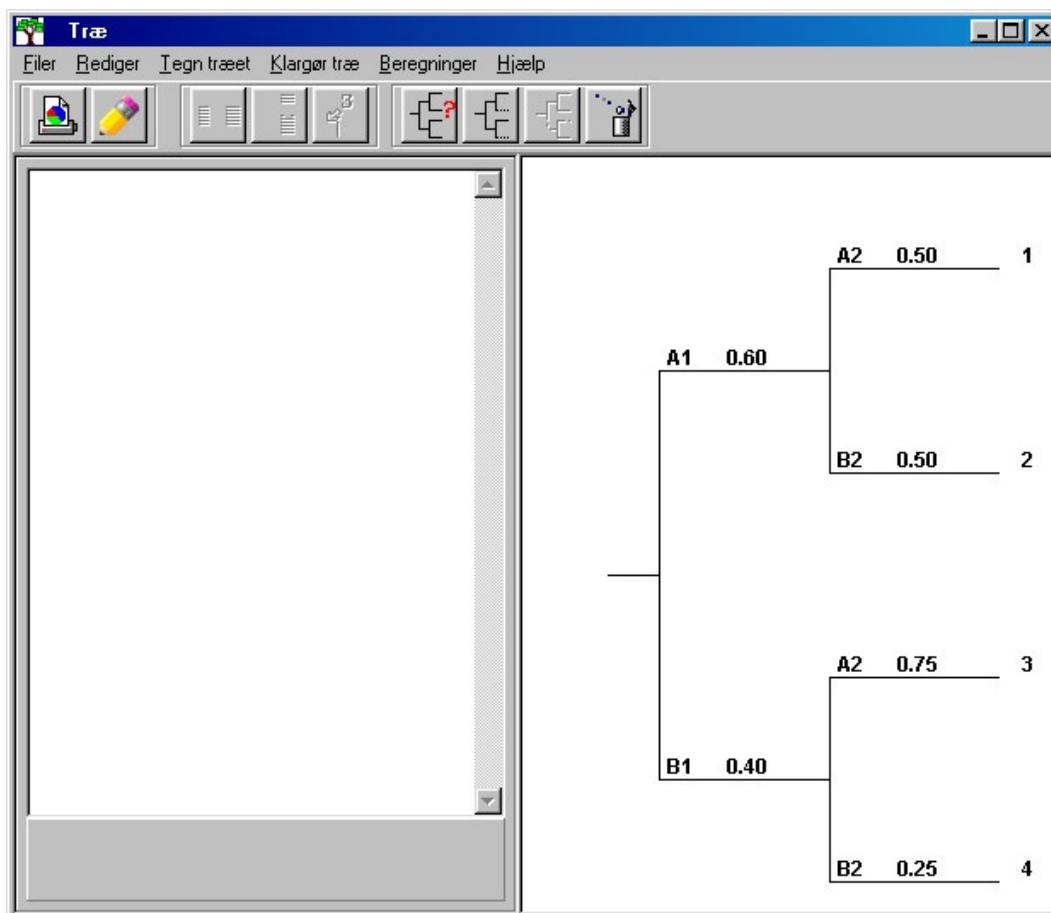
Indhold

1. Vi tegner et chancetræ
2. Lidt om programmet TRÆ
3. Udtagelse med tilbagelægning
4. Programmet ÆSKE
5. Opgaver
6. Reducerede chancetræer
7. Hvor sikker er diagnosen?
8. Hvordan afslører man ulykkesfugle?
9. Opgaver til Reducerede chancetræer

NB. Chancetræer tager sig bedst ud i en skærmopløsning på 800x600.

1. Vi tegner et chancetræ

Her har programmet TRÆ tegnet et chancetræ med to forgreninger. I hver forgrening er der to grene.



Vi har sat chancer på de enkelte grenstykker i træet. Træet kan fx svare til en situation hvor vi fra en pose skal udtage to kugler. I posen er der 3 hvide kugler og 2 sorte kugler. Udtagelsen foregår uden tilbagelægning, en udtaget kugle lægges ikke tilbage i posen forud for næste udtagelse.

Grenstykket A1 svarer til at vi udtager en hvid kugle i første udtagelse. Da der er 3 hvide kugler blandt de 5 kugler i posen, er chancen for at udtage en hvid kugle $3/5$ eller 0.60. Det er denne chance der er anført på A1.

På det øverste grenstykke A2, som svarer til en hvid kugle i anden udtagelse, står der 0.50. Hvis vi udtager en hvid kugle i første omgang, så er der jo i posen 2 hvide og 2 sorte kugler. Chancen for en hvid kugle i anden omgang er derfor $2/4$ eller 0.50.

Grenstykket B1 svarer til at der udtages en sort kugle i første udtagelse, og B2 svarer til at der udtages en sort kugle i anden udtagelse. Du kan let kontrollere at de chancer der er anført på de to grene, er korrekte.

Det tegnede træ indeholder fire grene. Det er dem der er sat numre på. En gren strækker sig altid helt inde fra "roden" til venstre og ud til grennummeret til højre på figuren. Gren nummer 1 består således af de to grenstykker A1 og A2.

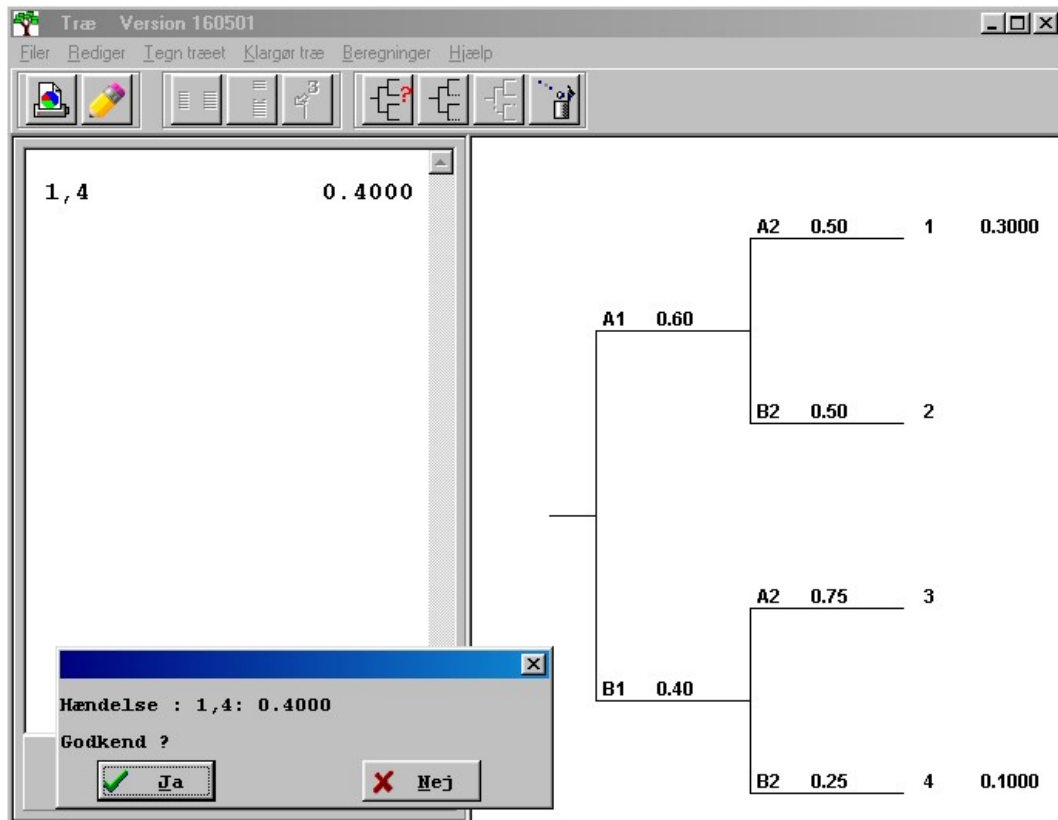
Hver gren i træet svarer til et bestemt forløb af kugleudtagelserne. Gren nr. 3 svarer således til at den første udtagelse giver en sort kugle og den anden giver en hvid kugle.

Hændelser

Træet er nu klar til brug og vi vil beregne chancen for nogle hændelser. En hændelse kan være følgende:

Der udtages to kugler af samme slags

Der udtages altså enten to hvide kugler eller to sorte kugler. I træet svarer denne hændelse til to grene i træet: Den øverste gren svarer til to hvide kugler, og den nederste svarer til to sorte kugler. Vi kalder disse to grene for hændelsens gevinstgrene.



På træet er der foretaget nogle beregninger: Ved den første gren er der skrevet 0.3000 og ved den sidste gren er der skrevet 0.1000. I det lille vindue er beregnet den samlede sandsynlighed for grenene 1 og 4: 0.4000. Hændelsens gevinstgrene har en samlet sandsynlighed på 0.40. Der er altså en chance på 0.40 for at der udtages to kugler af samme farve.

Hvordan beregnes chancerne?

Vi vil nu se på hvordan de 0.30 og de 0.10 beregnet. Det er nemlig afgørende for din forståelse af chancetræer at du ved hvordan programmets beregninger foregår.

Lad os se på træets øverste gren. Her fortæller tallet 0.60 at vi i en lang serie af kugleudtagelser fra den forelagte pose kan forvente at i ca. 60% af tilfældene vil første udtagelse give en hvid kugle. Tallet 0.50 på den næste del af grenen fortæller at i ca. 50% af disse udtagelser kan vi forvente at anden udtagelse giver en hvid kugle.

Heraf har vi da at $0.60 \cdot 0.50 = 0.30$, dvs. 30% af udtagelserne kan vi forvente at eksperimentet giver en hvid kugle både ved første og anden udtagelse. For at finde de chancer der knytter sig til hver gren i træet ganger vi simpelthen de chancer der findes på grenen.

For den nederste gren ganger vi tallene 0.40 og 0.25, og får her en chance på 0.10.

Prøv selv

1. Tegn et træ der svarer til den situation vi lige har set på: Gå ind i menupunktet "Tegn træ" og vælg 2 forgreninger. Derefter skal du klikke på hvor mange grene der er i første forgrening, du klikker på 2, og derefter klikker du igen på 2 når der spørges om antallet af grene i anden forgrening. Træet tegnes nu på skærmen.
2. Sæt chancer på grenene: Gå ind i menupunktet "Klargør træ" og vælg "Sæt chancer på første grene". Her åbner sig et vindue hvor du indtaster 0.6 og klikker på OK. Der kommer nu tal på både gren A1 og gren B1. De to tal skal jo give 1.00 tilsammen.

Derefter går du igen ind i "Klargør træ" og vælger "Indtast sandsynligheder". Her indtaster du 0.5, det tal der skal stå på gren A2 i den øverste gren. Der sættes nu tal på A2 og B2 i den øverste forgrening. Til sidst vælger du igen "Klargør træ" og "Indtast sandsynligheder", og du indtaster nu 0.75 til gren A2 i den nederste forgrening.

Der findes også en knap "Indtast sandsynligheder" som du kan benytte.

3. *Afrund til 2 decimaler.* På træet står chancerne med 4 decimaler. Hvis du vil have dem angivet med to decimaler, går du igen ind under "Klargør træ" og her vælger du det næstsidste menupunkt: Decimaler.
4. *Hændelser.* Gå ind i menupunktet "Beregninger" og vælg "Hændelser". Eller klik på knappen med det røde spørgsmålstegn. Eller klik på bogstavet H. I vinduet nederst til venstre kan du nu indtaste en hændelse. Prøv fx med 1,4, dvs. den hændelse der består af den øverste gren i træet og den nederste. Klik på OK. På skærmen kommer nu beregningen, og på træet anføres de chancer vi så før. Hvis du godkender resultatet ved et klik på Ja, overføres det til resultatavlen til venstre på skærmen. Her kan du opbygge en oversigt over alle de beregninger du udfører.
5. *Eksempler på hændelser.* Prøv at beregne chancen for hændelsen: *Der udtages to kugler af hver sin slags, altså én hvid og én sort kugle.* Afgør første hvilke grene i træet der svarer til denne hændelse og indtast derefter grennumrene.

Beregn også chancen for hændelsen: *Der udtages en sort kugle i anden udtagelse.*

Prøv derefter at beregne chancen for hændelsen: *Der udtages mindst én hvid kugle i de to udtagelser.*

Hvordan hændelser kan angives

Vi har indtil nu angivet hændelser ved hjælp af numrene på træets grene. Vi kan her fx bruge angivelserne:

3 1,2 1,2,5 1..4

Den sidste angivelse omfatter alle grene fra nr.1 til nr. 4.

Men vi kan også benytte de *bogstaver* der står på træets grene. Sætter vi et komma mellem to bogstavbetegnelser:

B1,A2

betyder det at vi angiver den hændelse som indeholder alle de grene der er mærket med betegnelsen B1 eller med A2 (eller med dem begge), dvs. de grene der er gevinstgrene for

B1 eller for A2.

Skriver vi derimod

B1A2

uden komma imellem, betyder det at hændelsen kun omfatter de grene der *både* indeholder et B1 og et A2.

Vi kan også benytte tegnet * når vi angiver hændelser:

$A1*B2$ er det samme som $A1B2$

Regnetegnet * kan kun bruges ved bogstavangivelser.

I angivelser af hændelser kan du kombinere grennumre med bogstaver som fx i angivelsen

3..7, A1B2

Et minus er også tilladt:

- A1

som kan oversættes med: "A1 indtræffer ikke". Tilsvarende kan

A1-B2

oversættes ved: "A1 indtræffer, men ikke B2"

Et minus dækker kun over det tegn der følger umiddelbart efter. I hændelsen -A1B2 er minusset derfor knyttet til A1. Hændelsen kan altså oversættes til:

"A1 indtræffer ikke, men B2 indtræffer".

Der kan også bruges parentes, som fx i følgende udtryk:

$A1(B1,B2)$ $(A1-B2),C1$ $A1, (B2-C3)$

Der må ikke sættes minus umiddelbart foran en parentes. Og der må ikke forekomme parenteser inden i parenteser. Programmet vil fortælle dig når du anvender udtryk som ikke er tilladt.

Prøv selv

1. Brug chancetræet fra før og beregn chancen for følgende fire hændelser:

(1) B2 (2) A2 (3) B1,A2 (4) $-B1*A2$

Inden du foretager beregningen bør du overveje hvilke grene du forventer der indgår i hændelsen.

2. Giv en sproglig beskrivelse af de fire hændelser.
3. Prøv selv med nogle beskrivelser af hændelser hvor du bruger bogstavudtryk. Kontroller at du har opfattet bogstavudtrykkene rigtigt.

2. Lidt om programmet TRÆ

Træernes størrelse

Programmet kan klare træer med to eller tre forgreninger. En forgrening må højst indeholde 6 grene, og det samlede antal grene i et træ må højst være 27. Til eksempel kan programmet klare følgende træer:

4*6-træer 2*3*4-træer 3*3*3-træer

Chancer på grenene

Til lettelse af indtastningen af chancer i store træer er programmet forsynet med en mulighed for at chancer fra en forgrening kan kopieres til en anden forgrening. Under "Klargør træ" vil du finde muligheden for at kopiere sandsynligheder vandret i træet og muligheden for at kopiere sandsynligheder lodret.

Der findes også to knapper du kan klikke på når du vil kopiere sandsynligheder.

Chancer kan også indtastes som brøker. Til eksempel kan chancen for en sekser i et terningkast indtastes om $1/6$. I en angivelse med to decimaler vil chancen blive noteret som 0.17, men i programmet regnes med flere cifre som blot ikke vises på skærmen.

Nye navne på grene

Når træet tegnes, vil grenene indeholde betegnelserne A, B, C... Du kan ændre disse bogstaver til andre. Hvis det fx drejer sig om hvide og sorte kugler kunne du ønske at skifte A ud med H og B med S.

Under "**Klargør træ**" finder du:

Udskift navne på hele træet

Her kan du bede om at A udskiftes med H og B med S.

Der findes endvidere en mulighed for at du kan lave dig en oversigt over hvad de enkelte grene står for. Gå ind under "**Klargør træ**" og vælg "**Navn og tekst på grene**". Her kan du skifte grenes navne ud med nye navne, men du kan også lave en kort tekst som forklarer hvad grenene i træet står for. Oversigten vil komme frem på skærmen så du har den ved hånden når du skal fastlægge beregningen af hændelser eller når du skal fortolke opnåede resultater. Oversigten kommer i øvrigt med ved udprintning af træ og resultatliste.

Ved fastlæggelse af nye navne på træets grene skal du være opmærksom på at du kun kan bruge navne som består af et bogstav eller af et bogstav og et ciffer.

Resultattavlen

Hvis du klikker på en hændelse i resultattavlen, bliver hændelsen vist i chancetræet til højre på skærmen. Du kan nu se hvilke grene der indgår i hændelsen og hvilke sandsynligheder de har. - Du kan fjerne en hændelse fra resultattavlen ved at markere den. Programmet vil derefter spørge om du vil slette hændelsen.

Kopiering af resultater og chancetræ

Under menupunktet "Rediger" finder du muligheden for at kopiere resultatlisten til klippebordet eller at kopiere det tegnede chancetræ. Du kan derefter indsætte den kopierede liste eller træet i et tekstdokument.

Træer kan gemmes som filer

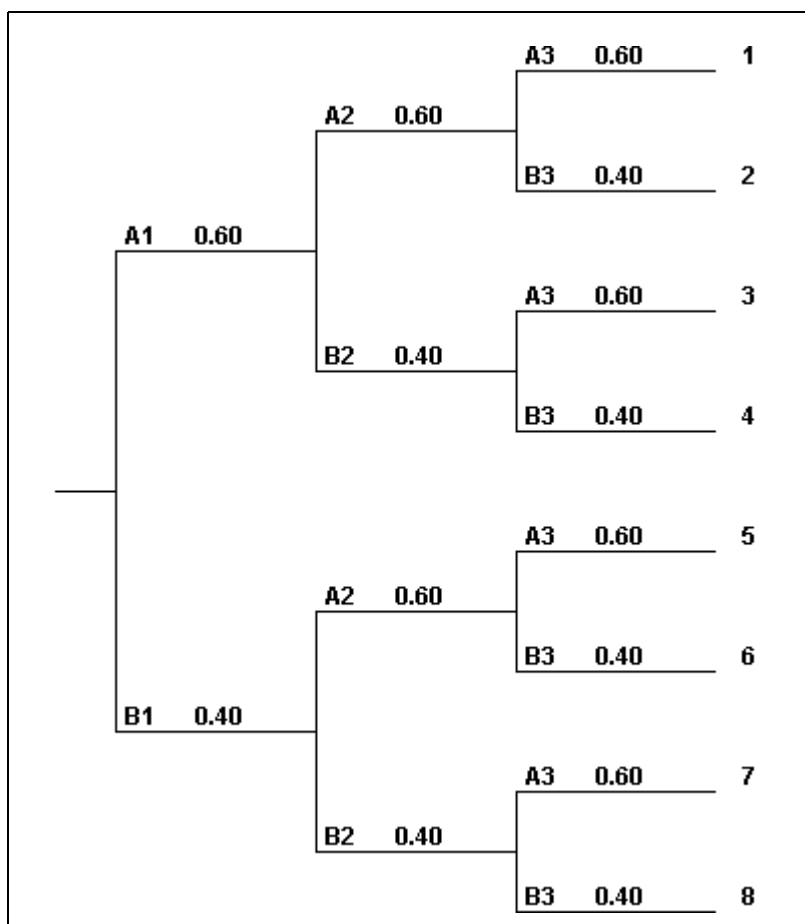
Vælg menupunktet "Filer" og indtast et filnavn. Det skal afsluttes med ekstensionen tr3 som angivet på skærmen. Klik derefter på "Gem". Træet fra skærmen er nu gemt. Filen kan hentes igen ved valg af "Hent" under menupunktet "Filer".

3. Udtagelse med tilbagelægning

Vi ser nu på en kugleudtagelse med tilbagelægning. En udtaget kugle lægges tilbage i posen før næste udtagelse finder sted, samme kugle kan altså godt udtages flere gange.

Vi udtager igen kugler fra en pose der indeholder 3 hvide og 2 sorte kugler, men denne gang udtager vi tre kugler fra posen.

Ved hver af de tre udtagelser er der en sandsynlighed på 0.60 for at udtage en hvid kugle og en sandsynlighed på 0,40 for at udtage en sort kugle. Posen indeholder jo ved hver udtagelse 3 hvide og 2 sorte kugler.



Der bliver nu tale om et 2*2*2-træ:

På træet har vi indsat bogstaverne H og S for hvide og sorte kugler. Du kan se at alle forgreninger bærer tallene 0.60 og 0.40.

Prøv selv

1. Tegn chancetræet og sæt chancer på grenene. (Benyt kopiering vandret og lodret).
2. Udskift bogstaverne A med H og B med S.
3. Beregn sandsynligheden for følgende hændelser:
 - A. Der udtages tre hvide kugler
 - B. Der udtages to hvide og én sort kugle
 - C. Der udtages én hvid og to sorte kugler
4. Lad programmet beregne sandsynlighederne for følgende hændelser:
 - (1) H₂H₃
 - (2) H₁,H₃
 - (3) H₁,S₂
 - (4) -S₁-S₂

Giv en sproglig beskrivelse af de fire hændelser.

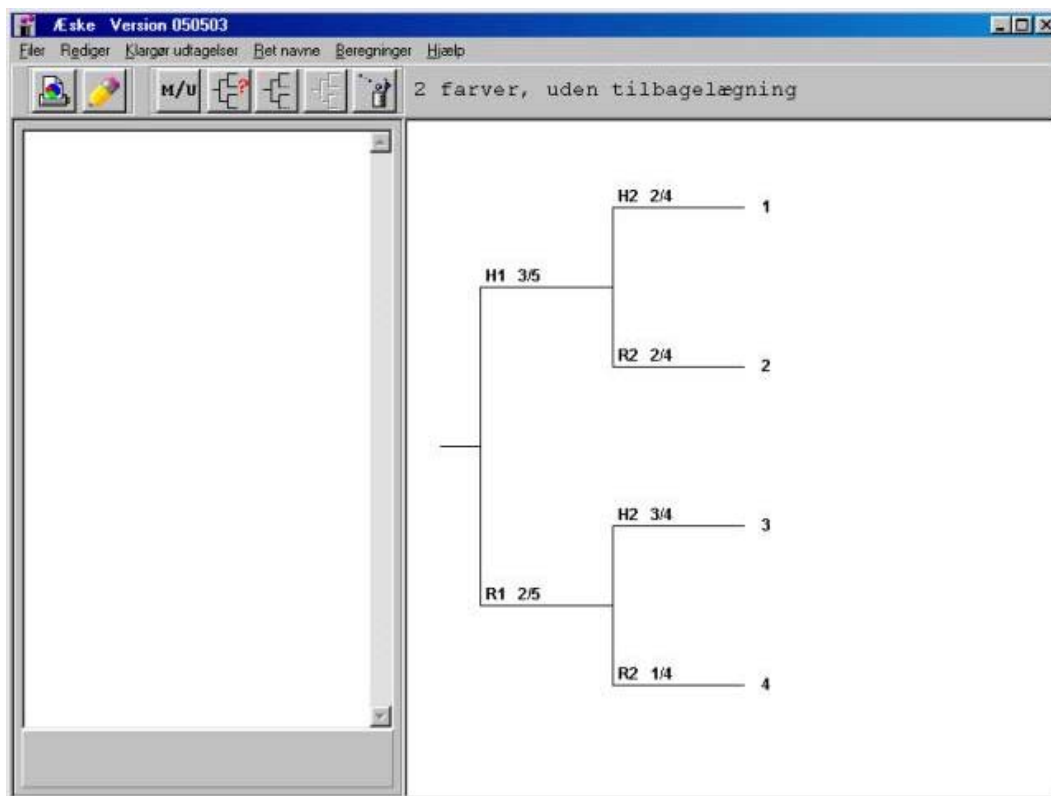
5. Angiv de grene i chancetræet der svarer til følgende hændelser og beregn hændelsernes sandsynlighed:
 - A. Der udtages tre kugler af samme slags
 - B. Første og anden udtagelse giver kugler af samme slags
 - C. Første, anden eller tredje udtagelse giver en sort kugle
 - D. Der udtages kugler af begge slags
6. Angiv følgende hændelser ved hjælp af bogstaverne H og S og beregn derefter deres sandsynligheder:
 - A. De to første udtagelser giver begge en sort kugle
 - B. Den tredje udtagelse giver en hvid kugle
 - C. Første eller anden udtagelse giver en hvid kugle
 - D. Første og anden udtagelse giver kugler af forskellig farve
 - E. Ikke alle tre udtagne kugler er hvide

4. Programmet ÆSKE

Dette program er en forenklet udgave af TRÆ. I programmet ÆSKE kan der arbejdes med udtagelser af kugler fra en æske. Programmets brugerflade ligger tæt op ad den du nu kender fra TRÆ. Men der er indlagt nogle hjælpemidler i ÆSKE som gør det meget let at arbejde med programmet. ÆSKE sætter således selv chancer på chancetræets grene, du skal blot oplyse hvor mange kugler der findes i æsken, hvilke farver de har, og om udtagelsen er med eller uden tilbagelægning. I øvrigt kan der ved et enkelt klik skiftes mellem udtagelse med tilbagelægning og udtagelse uden tilbagelægning.

Her har vi ladet ÆSKE tegne det chancetræ du nu har set nogle gange: I æsken er der 3 hvide og 2 sorte kugler, og der udtages to kugler ved udtagelse uden tilbagelægning.

Du kan se at der er sat chancer på grenene. De er angivet som brøker, og for at du lettere kan kontrollere at det er de rigtige tal der er anført, er brøkerne ikke forkortede. På den øverste gren H2 står således $\frac{2}{4}$ og ikke $\frac{1}{2}$. De $\frac{2}{4}$ fortæller dig at der er 4 kugler i æsken og at 2 af dem er hvide.



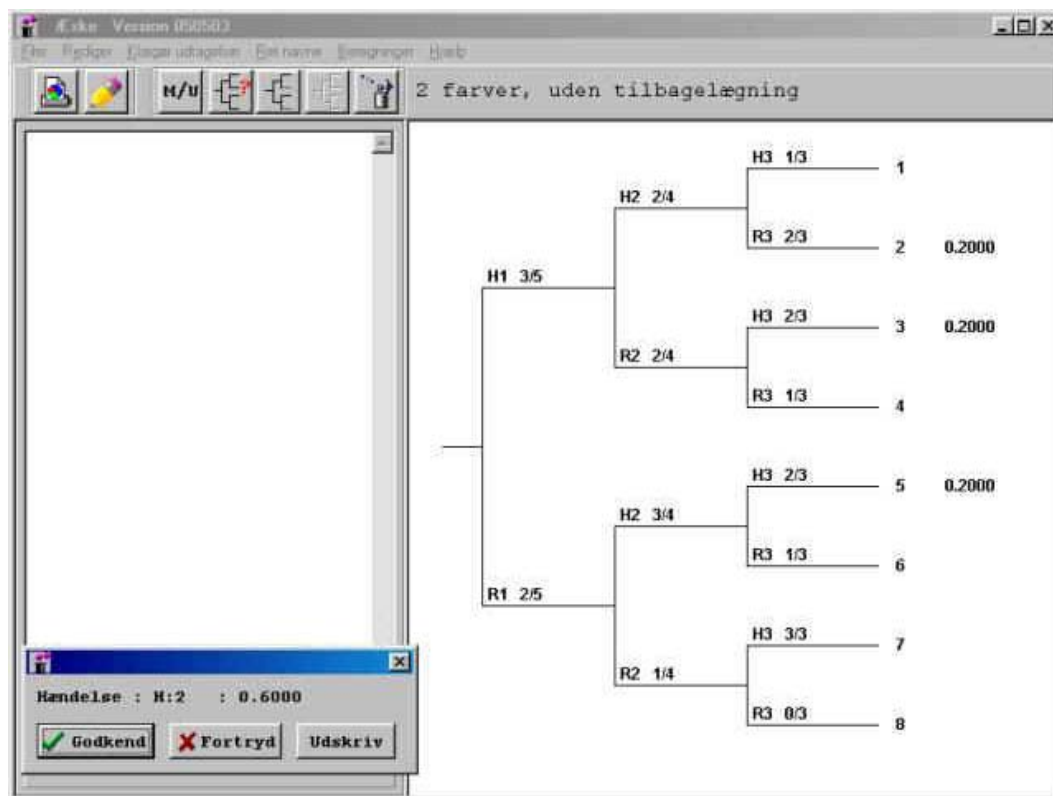
Prøv selv

1. Gå ind i ÆSKE og vælg "Klargør udtagelser". Vælg 2 forgreninger og vælg "Uden tilbagelægning". Fortæl dernæst at der er tale om 2 farver. Udfyld skemaet med 3 hvide og 2 sorte kugler og klik på Enter. Bekræft at det er det rigtige valg af kugler du har foretaget. ÆSKE tegner nu det chancetræ, du så før.
2. Beregn chancen for hændelsen: *Der udtages to kugler af hver sin slags, altså én hvid og én sort kugle.*
3. Beregn også chancen for hændelsen: *Der udtages en sort kugle i anden udtagelse.*
4. Beregn derefter chancen for hændelsen: *Der udtages mindst én hvid kugle.*

En ny slags hændelse

I Æske er der mulighed for at gøre brug af en hændelse som ikke findes i TRÆ.

Chancetræet nedenfor viser tre udtagelser af en kugle fra en æske der indeholder 3 hvide og 2 sorte kugler. Udtagelsen er uden tilbagelægning.



Som hændelse har vi her benyttet

H:2

Denne hændelse svarer til de situationer hvor der findes lige præcis 2 hvide kugler blandt de udtagne kugler. På chancetræet kan du finde de grene der svarer til at udtagelsen giver 2 hvide kugler, det er gren nr. 2, 3 og 5. I ingen af de andre grene er der tale om at udtagelsen giver lige præcis 2 hvide kugler.

På samme måde kan du i det tegnede chancetræ arbejde med hændelser af følgende slags:

H:1 H:0 H:3 S:2 S:3

Prøv selv

Tegn chancetræet og beregn chancen for nogle hændelser af den nye slags. Kontroller at det er de rigtige gevinstgrene der markeres på skærmen.

5. Opgaver

1. Udtagelse med tilbagelægning

Fra en pose med 6 hvide og 4 sorte kugler udtages to kugler ved udtagelse med tilbagelægning. Opstil et chancetræ for udtagelsen, og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der udtages to hvide kugler.
2. Der udtages to sorte kugler.
3. Der udtages én kugle af hver slags.
4. Anden udtagelse giver en hvid kugle.

Løs først opgaven ved hjælp af TRÆ og løs den derefter med ÆSKE.

2. Tre kugler udtages

Fra posen i opgave 1 udtages tre kugler ved udtagelse med tilbagelægning. Opstil et chancetræ for udtagelsen og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der udtages tre hvide kugler.
2. Der udtages tre sorte kugler.
3. Der udtages to hvide og én sort kugle.
4. Der udtages mindst én sort kugle.
5. Der udtages kugler af begge slags.

Vælg selv om du vil benytte TRÆ eller ÆSKE.

3. Kuglen er sort

Beregn i tilknytning til opgave 2 sandsynligheden for følgende hændelser:

- B1: Første udtagelse giver en sort kugle.
- B2: Anden udtagelse giver en sort kugle.
- B3: Tredje udtagelse giver en sort kugle.

4. Udtagelse uden tilbagelægning

Fra posen i opgave 1 (6 hvide og 4 sorte kugler) udtages to kugler ved udtagelse *uden* tilbagelægning. Opstil et chancetræ for udtagelser (husk at du i TRÆ kan bruge brøker når du skal indtaste grenstykkernes sandsynligheder, i ÆSKE går dette af sig selv) og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der udtages to hvide kugler.
2. Der udtages to sorte kugler.
3. Der udtages én kugle af hver slags.
4. Anden udtagelse giver en hvid kugle.

5. Tre kugler udtages

Kugleudtagelsen i opgave 4 udvides, så der nu udtages tre kugler. Opstil et chancetræ for udtagelsen og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der udtages tre hvide kugler.
2. Der udtages tre sorte kugler.
3. Der udtages to hvide og én sort kugle.
4. Der udtages mindst én sort kugle.
5. Der udtages kugler af begge slags.

6. Kuglen er sort

Beregn i tilknytning til opgave 5 sandsynligheden for følgende hændelser:

- B1: Første udtagelse giver en sort kugle.
- B2: Anden udtagelse giver en sort kugle.
- B3: Tredje udtagelse giver en sort kugle.

7. Kugler af tre slags

Fra en pose med 5 hvide, 3 sorte og 2 røde kugler udtages to kugler ved udtagelse uden tilbagelægning. Opstil et chancetræ for udtagelsen (vælg mellem TRÆ og ÆSKE) og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der udtages én hvid og en sort kugle.
2. Der udtages to kugler af forskellig farve.
3. Der udtages to kugler af samme farve.
4. Der udtages mindst én hvid kugle.
5. Der udtages mindst én rød kugle.

8. To kast med en terning

I et kast med en terning er vi kun interesseret i følgende hændelser: A: Terningen giver en sekser. B: Terningen giver ikke en sekser. - Opstil et chancetræ for to kast med en terning (indtast $1/6$ som sandsynlighed) og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Begge kast giver en sekser.
2. Ingen af kastene giver en sekser.
3. Mindst ét af kastene giver en sekser.
4. Andet kast giver en sekser.

9. Tre kast med en terning

Eksperimentet i opgave 8 udvides til tre kast med en terning. Opstil et chancetræ for kastene og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der opnås tre seksere i de tre kast.
2. Der opnås netop to seksere i de tre kast.
3. Der opnås netop én sekser i de tre kast.
4. Der opnås mindst én sekser i de tre kast.

10. Et spil. Tre udførelser

I et spil er der 25% chance for gevinst. Opstil et chancetræ for tre udførelser af spillet og beregn sandsynligheden for:

1. Der er gevinst i alle tre spil.
2. Ingen af spillene giver gevinst.
3. Mindst ét af spillene giver gevinst.
4. Der er gevinst i spil nr. 1.
5. Der er gevinst i spil nr. 2.
6. Der er gevinst i spil nr. 3.

11. Et spil. Tre udførelser.

Opstil et chancetræ for tre udførelser af et spil hvor der i hver udførelse er 50% chance for gevinst. Beregn sandsynligheden for:

1. Ingen af spillene giver gevinst.
2. Mindst ét af spillene giver gevinst.
3. Et spil giver gevinst og to giver ikke gevinst.
4. To spil giver gevinst og et giver ikke gevinst.
5. Alle spil giver gevinst.

12. Studenterjubilæum

Statistikken fortæller at en mand på 20 år har 66% chance for at opleve sin 70 års fødselsdag. Tre mænd tager studentereksamen i 20 års alderen, hvad er mon sandsynligheden for at de alle tre vil kunne fejre deres studenterjubilæum 50 år senere?

Tegn et chancetræ der belyser situationen (et $2 \times 2 \times 2$ -træ) og beregn sandsynligheden for:

1. Ingen af de tre dør inden de fylder 70 år.
2. Netop én af de tre dør inden han fylder 70 år.
3. Netop to af de tre dør inden de fylder 70 år.
4. Alle tre dør inden de fylder 70 år.

13. 50 år senere

Statistikken fortæller, som nævnt i opgave 12, at en mand på 20 år har 66% chance for at leve i yderligere 50 år.

Statistikken fortæller også at en kvinde på 18 år har 81% chance for at leve i yderligere 50 år.

En 20-årig mand gifter sig med en 18-årig kvinde. Tegn et chancetræ der belyser parrets chance for at leve i 50 år, og beregn sandsynligheden for:

1. Begge er i live 50 år senere.
2. Ingen af dem er i live 50 år senere.
3. Mindst én af dem er i live 50 år senere.
4. Kvinden er i live, manden er død.
5. Manden er i live, kvinden er død.

14. Møntkast

En mønt kastes fire gange. Tegn (ved håndkraft) et chancetræ der beskriver eksperimentet og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Der opnås fire kronekast.
2. Der opnås tre kronekast og ét platkast.
3. Der opnås to kronekast og to platkast.
4. Der opnås ét kronekast og tre platkast.
5. Der opnås fire platkast.

Et tillægsspørgsmål: Hvad er mest sandsynlig i fire kast med en mønt: At få "to af hver" (altså to plad og to krone) eller at få "tre af én slags og én af en anden slags"?

15. Møntkast igen

(Brug dit træ fra opgave 14). En mønt kastes fire gange. Hvad er sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Alle kast giver plat.
2. De to første giver plat, de to sidste giver krone.
3. De fire kast giver: plat, krone, plat, krone.

16. En spilleautomat

På en spilleautomat er der i hvert spil 35% chance for gevinst. Sanne påtænker at udføre tre spil. Tegn et chancetræ over spillene og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Sanne vinder netop én gang i de tre spil.
2. Sanne vinder mindst to gange i de tre spil.
3. Sanne vinder slet ikke i de tre spil.

17. Ingen defekte pærer?

Fra en kasse med 12 elektriske pærer, hvoraf 4 er defekte, udvælger Sanne tre pærer. Tegn et chancetræ for udtagelsen (brug brøker) og beregn sandsynligheden for:

1. Ingen af de udvalgte pærer er defekte.
2. Alle de udvalgte pærer er defekte.
3. Mindst én af de udvalgte pærer er defekt.

18. Hvor mange røde lys?

Sanne cykler til skole. Undervejs passerer hun tre kryds hvor trafikken reguleres med lyssignaler. Det første lyssignal viser grønt lys i Sannes retning 50% af tiden, det andet viser grønt lys i Sannes retning 70% af tiden, og det sidste viser grønt lys i Sannes retning i 30% af tiden. Lyssignalerne er uafhængige af hinanden. Tegn et chancetræ for situationen og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Sanne når til skole uden standsninger ved lyssignalerne.
2. Sanne når til skole med netop én standsning.
3. Sanne når til skole med netop to standsninger.
4. Sanne når til skole med tre standsninger.

19. Et udvalg nedsættes

I en skoleklasse går der 9 piger og 6 drenge. Klassen skal ved lodtrækning vælge et udvalg på 3 elever. Tegn et chancetræ for lodtrækningen (brug brøker) og beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Udvalget kommer til at bestå af tre piger.
2. Udvalget kommer til at bestå af to piger og én dreng.
3. Udvalget kommer til at bestå af én pige og to drenge.
4. Udvalget kommer til at bestå af tre drenge.

20. Tre kast med en terning

Beregn sandsynligheden for at få mindst én sekser i tre kast med en terning:

Tegn et chancetræ og beregn derefter den søgte sandsynlighed. (Indtast $1/6$ som brøk).

Beregn også sandsynligheden for at netop to af de tre kast resulterer i seksere.

21. Tennisturnering

Søren og Thomas udfordrer Sanne til en tennisturnering. Hun skal spille 3 kampe mod dem, og hun er vinder af turneringen hvis hun vinder to kampe i træk. Hun kan selv vælge om hun i de tre kampe vil møde modstanderne i rækkefølgen:

Søren - Thomas - Søren,

eller i rækkefølgen:

Thomas - Søren - Thomas.

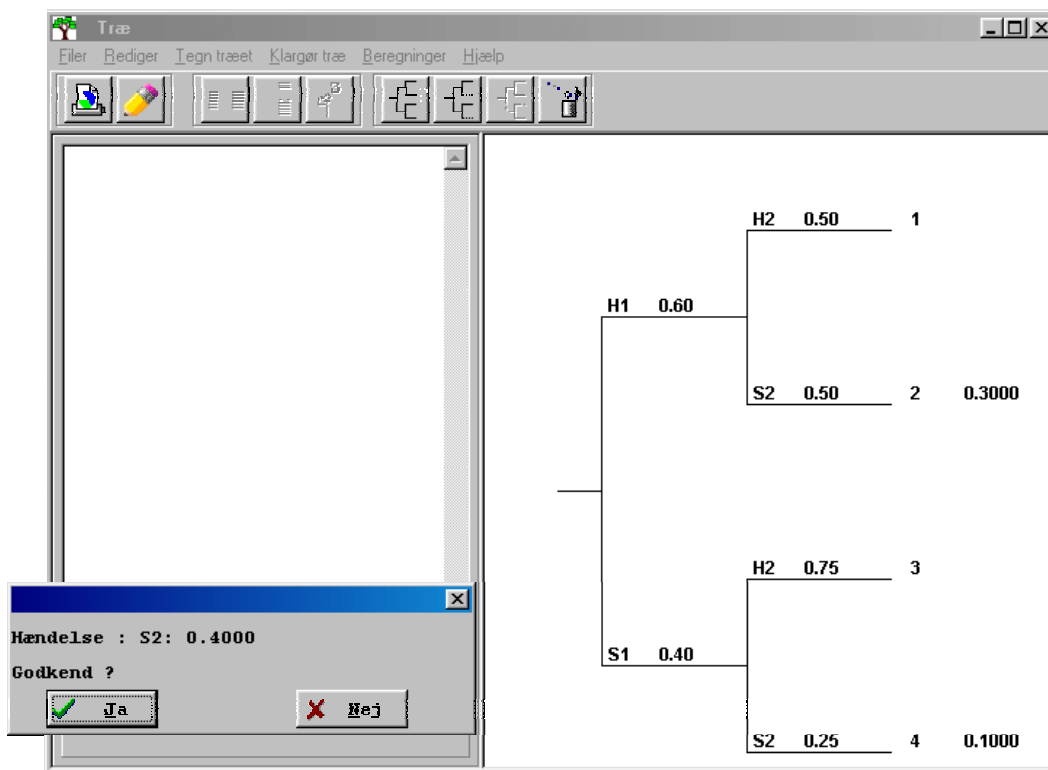
Sanne véd fra tidligere kampe at hendes chance for at slå Søren i en tenniskamp er så gode som 80%.

Hendes chancer for at slå Thomas er derimod kun 40%. - Hvilken af de to spillerækkefølger bør hun vælge?

Tegn chancetræer for de to rækkefølger og beregn sandsynligheden for at Sanne vinder turneringen.

6. Reducerede chancetræer

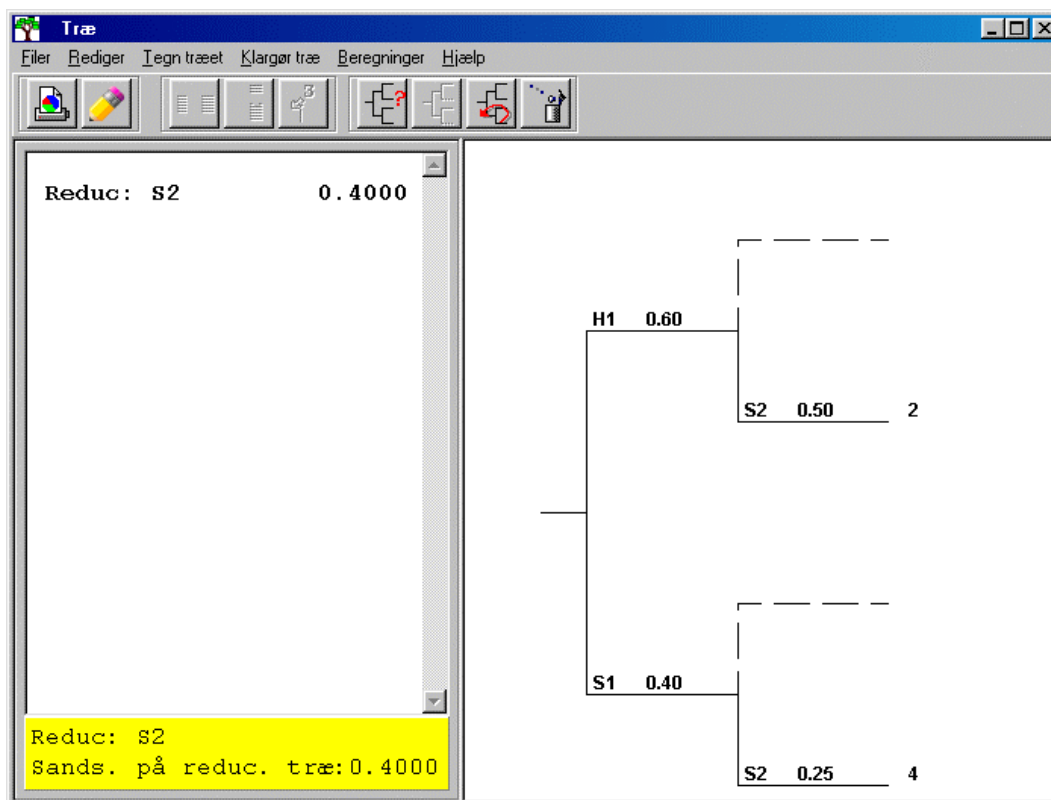
Vi ser igen på en situation hvor vi udtager to kugler fra en pose der indeholder 3 hvide og to sorte kugler.



Af chancetræet kan vi se at chancen for at der udtages en sort kugle ved den anden udtagelse er 0.40. Denne hændelse svarer jo til gren 2 og gren 4. I en lang serie af eksperimenter kan vi derfor forvente at ca. 40% af udtagelserne vil give en sort kugle ved anden udtagelse.

Nu vil vi kun se på de situationer hvor anden udtagelse giver en sort kugle. Vi vil altså se på de situationer der svarer til gren 2 og 4. Hvad er da sandsynligheden for at første udtagelse gav en hvid kugle?

Her kan vi nu gøre brug af et reduceret chancetræ. Vi ser på et træ hvor det kun er gren 2 og 4 der er aktive.



Et sådant træ kalder vi et reduceret chancetræ. Det er her *reduceret* eller fortyndet ved hjælp af hændelsen: *Anden udtagelse giver en sort kugle*, dvs. ved hændelsen S2

I vinduet til venstre ser vi at vi har benyttet hændelsen S2 ved reduktionen. Og vi ser at den samlede sandsynlighed på det reducerede træ er 0.40. Det kan vi også se på tegningen af træet. Her fremgår at sandsynligheden 0.30 stammer fra gren 2 og sandsynligheden 0.10 fra gren 4.

I dette træ kan vi nu beregne chancen for at første udtagelse gav en hvid kugle. Denne hændelse svarer jo til H1. Vi lader derfor programmet beregne chancen for hændelsen H1.

Vi får her at chancen er 0.75. Det svarer jo til at 0.30 af den samlede sandsynlighed på 0.40 stammer fra gren 1. Og $0.30/0.40 = 0.75$.

Vi har derfor: Når det vides at anden kugleudtagelse giver en sort kugle, så er der 75% chance for at den første udtagelse gav en hvid kugle.

Vi har her beregnet sandsynligheden ved at tage hensyn til nye oplysninger: Når vi ved at anden udtagelse gav en sort kugle, da kan vi ikke umiddelbart bruge det oprindelige chancetræ, vi må i stedet foretage beregninger i et træ der er reduceret så det passer med de nye oplysninger der foreligger.

Prøv selv

1. Tegn chancetræet der svarer til udtagelse af to kugler fra en pose der indeholder 3 hvide og 2 sorte kugler. Sæt chancer på træet og skift bogstaver til H og S.
2. Gå ind under "Beregninger" og Vælg "Reducer træ" . Du kan også klikke på knappen "Reducer træ". Indtast hændelsen S2.
3. Beregn i det reducerede træ chancen for hændelsen H1.
4. Gå tilbage til det ureducerede træ: Vælg "Gendan træ" enten under "Beregninger" eller ved brug af knappen "Gendan træ".

5. Reducer træet svarende til hændelsen "Anden udtagelse gav en hvid kugle". Beregn i dette træ chancen for hændelsen H_1 .
6. Opstil det reducerede træ svarende til hændelsen "Der udtages to kugler af samme slags". Beregn i dette træ chancen for at der udtages to hvide kugler.
7. Opstil det reducerede træ der svarer til hændelsen: "Der udtages mindst én sort kugle". Beregn i dette træ chancen for at der udtages en kugle af hver slags.
8. Du får at vide at der blev udtaget mindst én hvid kugle. Hvad er chancen for at begge kugler var hvide?

7. Hvor sikker er diagnosen?

En kvinde har observeret en knude i det ene bryst. Hendes læge véd fra tidligere erfaringer at i 95% af tilfældene er der tale om godartede knuder, kun i 5% af tilfældene udvikler de sig til kræft.

For at kunne stille en bedre diagnose sender lægen sin patient til røntgenundersøgelse. En sådan prøve kan være *positiv*, dvs. den påstår at sygdommen er til stede, altså at knuden indeholder kræftceller. Prøven kan også være *negativ*, dvs. den påstår at sygdommen ikke er til stede.

Nu er der ingen prøver der er fejlfri, der er altid en risiko for at prøven giver et falsk billede af situationen. For røntgenundersøgelsen i dette tilfælde véd man fra medicinske statistikker at den er *positiv-korrekt* i 80% af tilfældene. Det vil sige: når sygdommen er til stede, så vil prøven i 80% af tilfældene være positiv.

Om prøven vides også at den er *negativ-korrekt* i 90% af tilfældene. Det vil sige: når sygdommen ikke er til stede, så vil prøven i 90% af tilfældene være negativ.

Ved prøven er der altså to muligheder for fejlbedømmelser. Prøven kan være positiv selv om sygdommen ikke er til stede. Dette sker som vi kan se af tallene i 10% af tilfældene. I disse situationer kommer patienterne altså ud for det ubehagelige at blive erklæret syge uden at være det. Først ved mere detaljerede undersøgelser vil det blive afsløret at der var falsk alarm.

Værre er det imidlertid med den anden type af fejl: Prøven kan være negativ, selv om sygdommen er til stede. Dette sker i 20% af tilfældene. I disse situationer vil sygdommen ikke blive afsløret, og behandlingen vil derfor ikke blive sat i gang på det rigtige tidspunkt.

For den betragtede røntgenundersøgelse har vi altså følgende sandsynligheder:

Sygdommen er ikke til stede.

Prøven negativ: 0,90 (Negativ-korrekt)

Prøven positiv: 0,10 (Fejlagtig positiv)

Sygdommen er til stede.

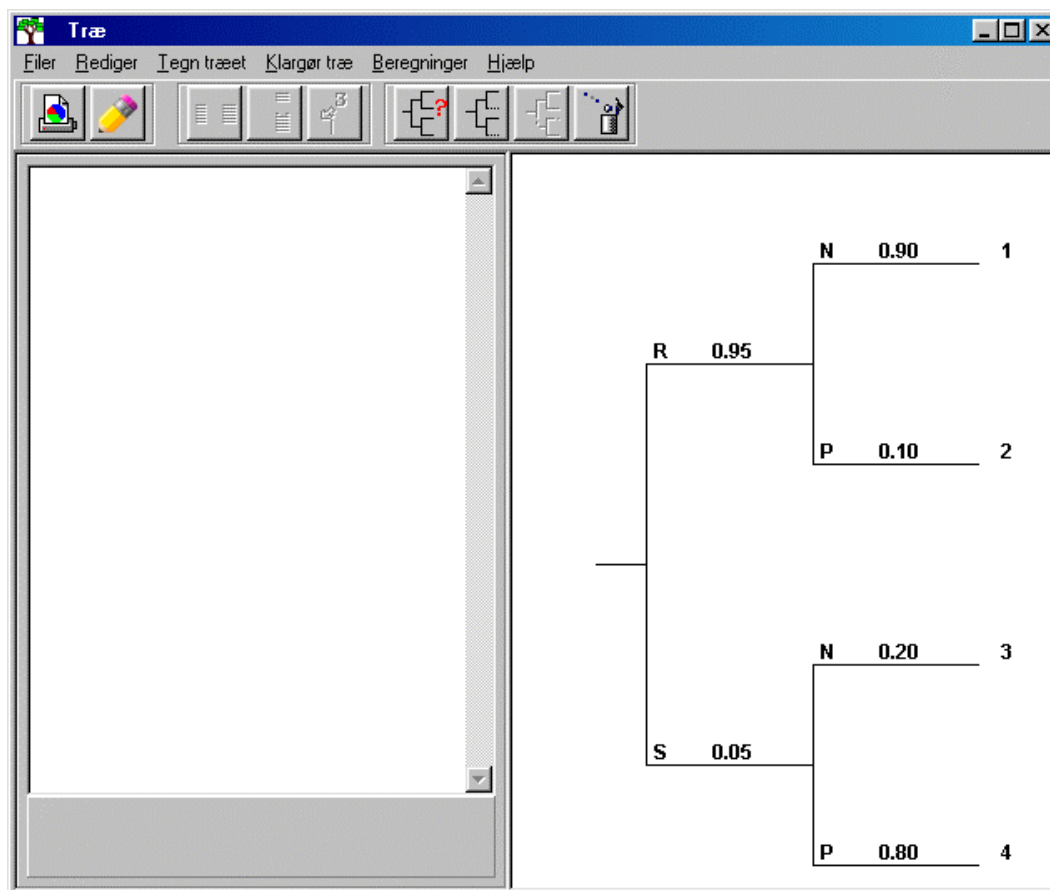
Prøven negativ: 0,20 (Fejlagtig negativ)

Prøven positiv: 0,80 (Positiv-korrekt)

I praksis er det resultaterne af prøverne der er kendte, derimod vides det jo ikke om sygdommen er til stede eller ikke til stede. Vi vil derfor nu undersøge hvor sikker den benyttede prøve er når der skal træffes beslutninger ud fra den. De to helt afgørende spørgsmål er:

1. Hvis prøven er negativ, hvad er da sandsynligheden for at sygdommen ikke er til stede?
2. Hvis prøven er positiv, hvad er da sandsynligheden for at sygdommen er til stede?

Vi tegner et chancetræ som beskriver røntgenundersøgelsens sandsynligheder. På træets første forgrening er patientens to muligheder angivet. R betyder: Sygdommen er ikke til stede, patienten er rask, S betyder: Sygdommen er til stede. På grenstykkerne er anført lægens vurdering af patientens sandsynligheder for at høre til de to grupper. På de efterfølgende grenstykker betyder N at prøven er negativ, og P betyder at prøven er positiv.



Hvis prøven er negativ

Vi ser at gren nr. 1 og nr. 3 svarer til at prøven er negativ, vi reducerer derfor træet ved hjælp af hændelsen

N

I det reducerede træ beregner vi nu sandsynligheden for hændelse R, altså sandsynligheden for at patienten er rask. Vi får her:

Hændelse: R. Sandsynlighed: 0,9884

Sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt, altså at sygdommen ikke er til stede når prøven er negativ, er altså næsten 99%. Der er således en meget stor sandsynlighed for at den negative prøve taler sandt. Hvis patienten får at vide at røntgenundersøgelsens resultat er negativt, kan hun derfor føle sig ret sikker på at sygdommen ikke er til stede.

Hvis prøven er positiv

Vi ser nu på den situation at prøven er positiv. Hvad er da sandsynligheden for at prøven taler sandt?

Vi vender tilbage til det oprindelige chancetræ og foretager nu en udtynding af træet ved hjælp af hændelsen "Prøven er positiv", altså ved hændelsen

P

I det reducerede træ beregner vi sandsynligheden for hændelsen S, altså sandsynligheden for at sygdommen er til stede.

Hændelse: S. Sandsynlighed: 0,2963

Sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt er derfor kun ca. 30%. Hvis prøven er positiv er der altså stadig gode chancer for at sygdommen slet ikke er til stede. Sandsynligheden herfor er på ca. 70%. Patienten kan altså fortolke prøvens resultater således:

Et negativt resultat er næsten et sikkert tegn på at sygdommen ikke er til stede.

Et positivt resultat giver stadig gode muligheder for at sygdommen ikke er til stede.

Prøv selv

1. Undersøg hvilken betydning det har at lægen vurderer at patientens risiko for at sygdommen er til stede sættes op fra 5% til 10%. Hvad er nu sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt, og hvad er sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt?
2. Undersøg endvidere hvilken betydning det har at lægen vurderer at patientens risiko for at sygdommen er til stede sættes ned fra 5% til 1%. Hvad er nu sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt, og hvad er sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt?
3. Undersøg hvilken betydning det har at lægen vurderer at patienten hører til en særlig risikogruppe hvor sandsynligheden for at sygdommen er til stede er 25%. Hvad er i dette tilfælde sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt, og hvad er sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt?
4. Undersøg også hvordan det går hvis lægens vurdering sættes helt op til 50%.

8. Hvordan afslører man ulykkesfugle?

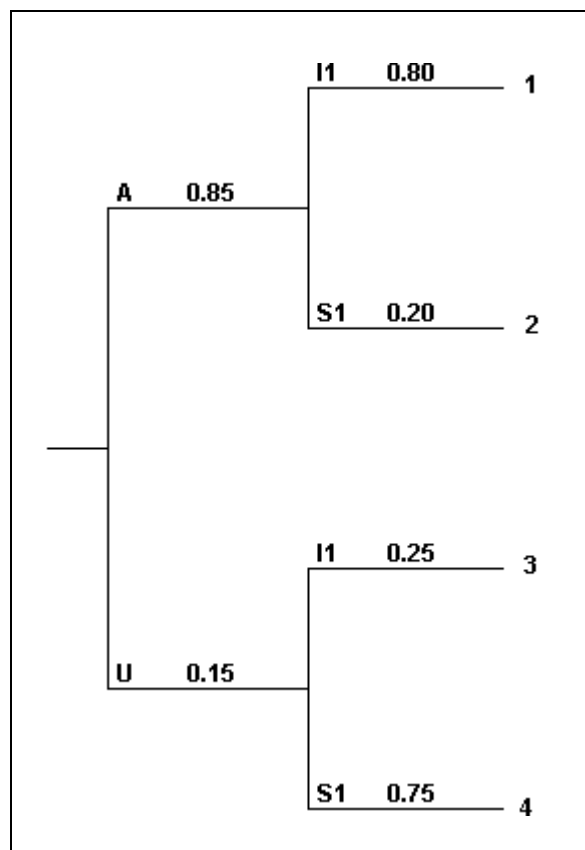
Mandlige bilister kan opdeles i to grupper: Den almindelige bilist og ulykkesfuglen. Den almindelige bilist kommer kun ud for et beskedent antal skader, og hans risiko for i løbet af et år at få skader som forsikringsselskabet skal dække, er kun ca. 20%.

Ulykkesfuglen er derimod ofte indblandet i uheld, og hans risiko for inden for en periode på et år at skulle gå til forsikringsselskabet med anmeldelse af en skade, kan sættes til ca. 75%. Af statistikker synes det at fremgå at ca. 85% af bilisterne er "almindelige" og at de øvrige 15% hører til gruppen af ulykkesfugle.

Det er selvfølgelig ethvert forsikringsselskabs drøm kun at have almindelige bilister som kunder. Ulykkesfuglene påfører selskabet store udgifter, og det gælder derfor om hurtigst muligt at slippe af med forsikringstagere af den slags. Men hvornår skal man opsige en kundes forsikring? Det kan vel ikke være nok at han et enkelt år har en skade. Enhver kan jo være uheldig. Og en sådan opsigelsespolitik ville sikkert ikke være god reklame for forsikringsselskabet.

Det vil derfor ikke være nogen god ide at opsige forsikringen efter kundens første år med skade. Spørgsmålet er da: Hvornår kan man føle sig tilstrækkelig sikker på at kunden er en ulykkesfugl? Hvor mange år med skade skal der til?

Problemet minder om det vi så på i det foregående afsnit. Ud fra de forelagte data ønsker vi at stille den rigtige diagnose. I den foreliggende situation er de to muligheder: Er der tale om en almindelig bilist, eller er der tale om en ulykkesfugl?



Vi vil også her belyse problemet ved hjælp af et chancetræ. Vi lader programmet tegne et træ over situationen:

På træet betyder A at der er tale om "en almindelig bilist", U betyder at der er tale om en ulykkesfugl. I1 betyder "Ingen skade", S1 betyder "Skade".

Chancetræet viser situationen for en ny kundes første år i forsikringselskabet.- Vi ser nu på de grene i træet der svarer til at bilisten har haft en skade i løbet af det første år, det er grenene nr. 2 og nr. 4. Denne hændelse kan også angives som S1. Træet reduceres derfor ved angivelse af hændelsen:

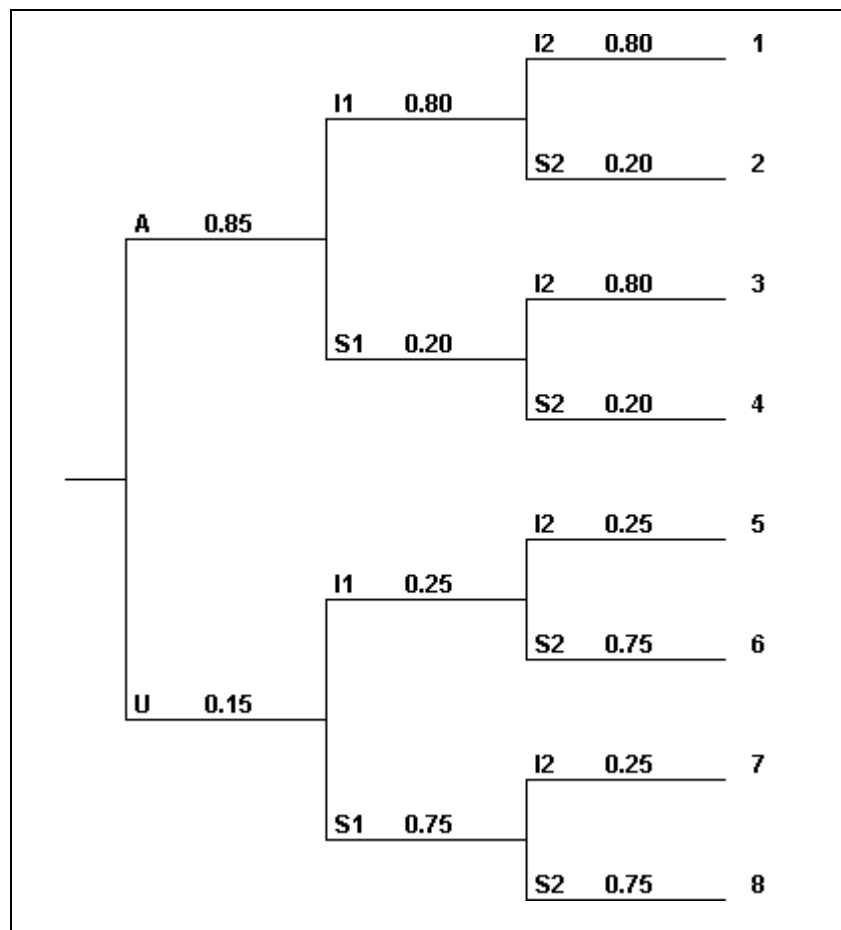
S1

og i det reducerede træ beregner vi sandsynligheden for hændelse U, altså sandsynligheden for at der er tale om en ulykkesfugl.

Hændelse: U Sandsynlighed: 0,3982

Der er altså en sandsynlighed på knap 40% for at bilisten er en ulykkesfugl. Dette tal viser os at der ikke med rimelighed kan træffes nogen beslutning efter kundens første år. Selv om han kommer ud for skade, er der alligevel over 60% chance for at han ikke er en ulykkesfugl.

Vi ser nu på yderligere et år. I chancetræet forudsætter vi at der ingen påvirkning er fra det ene år til det andet. Vi benytter derfor de samme sandsynligheder for skade og for ikke-skade i de to år.



Vi har nu et chancetræ med 8 grene. De to grene der svarer til at bilisten har skade både i det første og det andet år er gren nr. 4 og gren nr. 8. Denne hændelse kan også angives som S1S2. Træet reduceres derfor ved angivelse af hændelsen:

S1S2

og i det reducerede træ beregner vi sandsynligheden for U:

Hændelse: U. Sandsynlighed: 0,7128

Nu er nettet ved at trække sig sammen om bilisten. Efter skade hvert af de første to år er der en sandsynlighed på over 70% for at han hører til gruppen af ulykkesfugle. Det er nu forsikringsselskabets afgørelse om det vil opsige hans forsikring, eller om det vil se tiden an et år mere.

Prøv selv

1. Beregn sandsynligheden for at en bilist der har kørt uden skade de to første år hører til gruppen "almindelige bilister".
2. En bilist har haft skade i det første år, men ikke i det andet år. Beregn sandsynligheden for at han hører til gruppen af ulykkesfugle.
3. Beregn endvidere sandsynligheden for at en bilist der har haft skade det andet år, men ikke det første år, hører til gruppen af ulykkesfugle.

Programmet TRÆ giver ikke mulighed for at du kan inddrage mere end to år i undersøgelsen over bilisternes skade eller ikke skade. Hvis du vil se på en længere periode, kan du benytte INFA-programmet HYPOTESE.

9. Opgaver til Reducerede chancetræer

1. Sanne og Malene trækker lod

Sanne og Malene afgør en lodtrækning på følgende måde: De kaster en mønt tre gange. Hvis der bliver flest kronenkast vinder Sanne, bliver der flest platkast vinder Malene.

1. Hvad er sandsynligheden for at Malene vinder?
2. Hvad er sandsynligheden for at Sanne vinder når det vides at første kast giver krone?
3. Hvad er sandsynligheden for at Sanne vinder når det vides at første kast giver plat?

2. To krone i træk

En mønt kastes tre gange. Der er gevinst hvis der kommer to (eller tre) kronenkast i træk. Tegn et chancetræ over eksperimentet og beregn følgende:

1. Sandsynligheden for gevinst.
2. Sandsynligheden for gevinst når det vides at 1. kast giver krone.
3. Sandsynligheden for gevinst når det vides at 3. kast giver krone.
4. Sandsynligheden for gevinst når det vides at 2. kast giver krone.

3. Tre terningkast

En terning kastes tre gange. Spilleren får gevinst hvis mindst to af kastene giver en sekser.

1. Hvad er spillerens chance for at få gevinst?
2. Hvad er spillerens chance for gevinst når det vides at det første kast gav en sekser?
3. Hvad er spillerens chance for gevinst når det vides at mindst ét af kastene gav en sekser?
4. Hvad er spillerens chance for gevinst når det vides at ikke alle tre kast gav seksere?

4. En speciel terning

På en terning er tre af siderne forsynet med øjentallet 1, to af siderne med øjentallet 2, og den sidste side med øjentallet 3. Der udføres to kast med terningen og de to opnåede øjental lægges sammen.

Opstil et chancetræ over eksperimentet, og beregn følgende:

1. Sandsynligheden for at få et resultat på 4, 5 eller 6.
2. Sandsynligheden for at få et resultat på 4 når det vides at de to kast gav samme øjental.
3. Sandsynligheden for at få et resultat på 5 når det vides at de to kast gav forskellige øjental.

5. Hvid jul

Ifølge statistikken er sandsynligheden for, at der falder sne i København juleaften 0,08.

Lad det endvidere være givet, at Meteorologisk institut, hvis der falder sne i København juleaften, dagen før forudsiger snevejret med sandsynligheden 0,8, og hvis der ikke falder sne i København juleaften, dagen før forudsiger dette med sandsynligheden 0,9.

1. Beregn sandsynligheden for, at Meteorologisk instituts forudsigelser vedrørende snefald juleaften i København er forkerte.
2. Beregn sandsynligheden for, at der falder sne i København juleaften, når Meteorologisk institut dagen før har forudsagt dette.

(Lærereksamen, linjefag 1979)

6. Rafleakademiet i Tønder

Når nye medlemmer skulle optages i det berømte rafle-akademi i Tønder, måtte de igennem en prøve, og kun den der besvarede alle spørgsmål rigtigt, ville blive optaget.

Her er en opgave som mange ansøgere blev sorteret fra på:

På bordet står tre raflebægere. I det ene er der to falske terninger, i det andet er der to ægte terninger, og i det tredje er der én ægte og én falsk terning. Et bæger udvælges tilfældigt og en af dets to terninger rystes ud. Hvis det viser sig at denne terning er falsk, hvad er da sandsynligheden for at den anden terning i bægeret også er falsk? (Svaret er *ikke*: $1/2$).

En variant: I en pose er der tre mønter. Den ene viser krone på begge sider, den anden viser plat på begge sider, og den tredje har én kroneside og én plattsider. En mønt udtages og lægges på bordet. Den synlige side viser krone. Hvad er sandsynligheden for at den anden side også viser krone?

7. De tre gevinster

Her er endnu en opgave fra Tønder Rafleakademi.

Efter endt optagelsesprøve bliver kandidaten stillet over for tre kuverter. I den ene ligger et bevis på at han er optaget i akademiet, i de to andre ligger et trøstebrev som fortæller at han må prøve igen en anden gang.

Kandidaten udvælger en af de tre kuverter, fx kuvert nr. 1. Kuverten forbliver uåbnet. Rektor for akademiet åbner nu en af de andre kuverter, fx nr. 3, og viser kandidaten at den indeholder et trøstebrev. Optagelsesbrevet findes altså i kuvert nr. 1 eller 2. Rektor giver nu kandidaten lov til at ændre sit valg fra kuvert nr. 1 til nr. 2, såfremt han ønsker det.

Skal kandidaten modtage dette tilbud? Hvad er mon hans chance for at få optagelsesbrevet hvis han ændrer sit oprindelige valg fra kuvert nr. 1 til nr. 2?

Besvar dette spørgsmål i følgende to situationer, idet det er givet at rektor altid åbner en kuvert med et trøstebrev (han kender kuverternes indhold). Antag at kandidaten vælger kuvert nr. 1.

Situation 1. Hvis optagelsesbrevet er i kuvert 2, vælger rektor kuvert nr. 3. Hvis optagelsesbrevet er i kuvert nr. 3, vælger rektor kuvert nr. 2. Hvis optagelsesbrevet er i kuvert nr. 1 åbner rektor en tilfældig af kuverterne 2 og 3 ("han trækker lod i hovedet").

Situation 2. Rektor åbner altid kuvert nr. 3, undtagen i den situation hvor optagelsesbrevet findes der. I dette tilfælde åbner han kuvert nr. 2.

8. AIDS-virus

I en risikogruppe antages det at AIDS-virusen, HIV, er til stede hos 1% af gruppens medlemmer.

Prøven for HIV har vist sig at være negativ-korrekt i 99% af tilfældene, og at være positiv-korrekt i 85% af tilfældene.

Opstil et chancetræ for en person fra risikogruppen og beregn følgende sandsynligheder:

1. Sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt.
2. Sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt.

9. En undersøgelse for tuberkulose

Ved en undersøgelse for tuberkulose benyttes en prøve som har vist sig at være positiv-korrekt i 95% af tilfældene og negativ-korrekt i 99% af tilfældene. Sygdommen antages at være til stede hos kun 0,1% af de undersøgte.

Beregn sandsynligheden for at en negativ prøve taler sandt og beregn sandsynligheden for at en positiv prøve taler sandt.

10. Hvor meget ændres sandsynlighederne?

En læge vurderer at sandsynligheden for at patienten har en bestemt sygdom er 1%. Patienten får foretaget en prøve som har vist sig at være positiv-korrekt i 90% af tilfældene og negativ-korrekt i 99% af tilfældene.

Hvis prøven er positiv, hvad er da sandsynligheden for at sygdommen er til stede hos patienten? - Hvis prøven er negativ, hvad er da sandsynligheden for at sygdommen er til stede?

Undersøg dernæst hvad det betyder at lægens vurdering af sandsynligheden ændres. Prøv at sætte den op fra 1% til 5%, 10% og 50%. - Og prøv at sætte den ned til 0,5% og 0,1%.

11. Falsk alarm?

I et privathjem har man installeret en tyverialarm. Ved indbrud er der 99% chance for at alarmen går i gang. I andre situationer (familien glemmer at slå alarmen fra) er der 10% chance for at alarmen går i gang. Et signal fra alarmen er netop indløbet til alarmcentralen. Hvad er sandsynligheden for at der er tale om et indbrud? (Politiets statistik viser at risikoen for indbrud i det pågældende område kan sættes til 1%, dvs. der forekommer indbrud hver dag i ét ud af 100 hjem).

12. Er terningen falsk?

I en æske ligger to terninger. Den ene er falsk og har en sandsynlighed for sekser på 40%. Den anden terning er ægte. Du vælger en af terningerne (du kan ikke se forskel på dem), og udfører et kast. Hvis kastet giver en sekser, hvad er da sandsynligheden for at du har valgt den falske terning?

Undersøg endvidere hvad sandsynligheden er for at du har valgt den falske terning når også det næste kast med terningen giver en sekser.

13. En æske med terninger

Undersøg de to situationer fra opgave 12 når du udvælger terningen tilfældigt fra en æske hvori der findes én falsk og tre ægte terninger.

14. Et vidneudsagn

Ved en trafikulykke på et feriested hvor 15% af bilerne er danske og 85% er udenlandske, udtaler et vidne at hun mener der var tale om en dansk bil. En prøve viser at hun i 80% af tilfældene korrekt kan afgøre om der er tale om en dansk eller en udenlandsk bil. - Hvad er sandsynligheden for at bilen var dansk?

15. Hvilken pose?

Pose 1 indeholder 60% røde kugler og pose 2 indeholder 30% røde kugler. En af de to poser udvælges tilfældigt og fra posen udtages kugler én for én ved udtagelse med tilbagelægning.

Beregn sandsynligheden for at den udvalgte pose er pose 1 når

1. Første udtagelse giver en rød kugle.
2. Både første og anden udtagelse giver en rød kugle.

16. Tre poser

Tre poser med kugler har følgende indhold:

Pose 1:	80% røde kugler, 20% hvide kugler.
Pose 2:	60% røde kugler, 40% hvide kugler.
Pose 3:	40% røde kugler, 60% hvide kugler.

En af de tre poser udvælges tilfældigt og fra posen udtages to kugler ved udtagelse med tilbagelægning. Hvilken af de tre poser har størst sandsynlighed for at være den udvalgte når kugleudtagelserne resulterer i:

1. To røde kugler.
2. En hvid og en rød kugle.
3. To hvide kugler.

17. Er kvaliteten god nok?

Ved en kvalitetskontrol forlanges det at 90% af de producerede enheder skal være fejlfri for at produktionen kan være af klasse A. I klasse B kræves kun at 75% af de producerede enheder er fejlfri.

Fra en produktion udtages to enheder der begge viser sig at være fejlfri. Hvis du forud for udtagelsen var 50% overbevist om at produktionen var af klasse A, hvilken overbevisning bør du så have efter udtagelsen?

18. En multiple-choice prøve

I en multiple-choice prøve er der ved hvert spørgsmål 3 svarmuligheder hvoraf én er den rigtige. En elev har kun sat sig ind i halvdelen af pensum, og her kender han det rigtige svar på de enkelte opgaver med en sandsynlighed på 90%. I de øvrige spørgsmål gætter han tilfældigt mellem de givne svarmuligheder. Hvad er chancen for at eleven gættede svaret i et spørgsmål hvor han har givet det rigtige svar?

19. En passager med pistol?

I lufthavnen undersøges alle passager for våben. Det benyttede apparat afslører et tilstedeværende våben i 90% af tilfældene, og det giver falsk alarm i 2% af de tilfælde hvor der ikke er noget våben til stede.

Antag at 1 ud af hver 5000 passager er i besiddelse af et våben.

Apparatet har lige givet alarm, hvad er sandsynligheden for at der virkelig er tale om et våben?

20. Den forsigtige patient

En patient, der mener at der er 50% risiko for at han lider af en bestemt sygdom, går til sin læge. Lægen vurderer at patienten ikke er syg og oplyser samtidig at han har en chance på 60% for at vurdere korrekt når sygdommen er til stede, og en chance på 95% for at vurdere korrekt når sygdommen ikke er til stede.

Patienten føler sig ikke overbevist og går til en anden læge som har en chance på 80% for at vurdere korrekt når sygdommen er til stede, og en chance på 90% for at vurdere korrekt når sygdommen ikke er til stede. Denne læge vurderer at patienten er syg.

Beregn sandsynligheden for at patienten er syg.