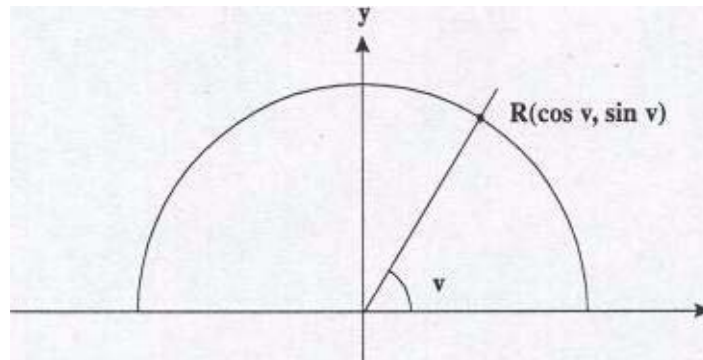


Noter til trigonometri

1. Trekantsvinkler

Vinkler i trekanter kan som bekendt have et gradtal mellem 0 og 180.

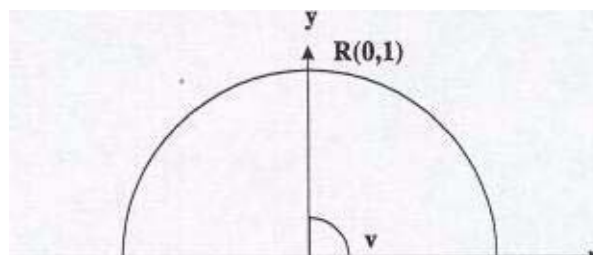
Figuren viser en halvcirkel med radius 1. Cirklen er indlagt i et koordinatsystem, og cirkelns centrum er placeret i punktet (0,0).



På figuren er indtegnet en vinkel af størrelsen v . Vinklen har sit toppunkt i cirkelns centrum og sit højre ben liggende på x-aksen. Det venstre ben skærer cirklen i punktet R. Det kaldes vinklens retningspunkt.

R har et koordinatsæt i det givne koordinatsystem: x-koordinaten kaldes cosinus til v , og y-koordinaten kaldes sinus til v .

For nogle vinkler er det let at finde cosinus og sinus. Er vinkel v fx lig med 90° , så har vi følgende beliggenhed af retningspunktet:



Det ses at x-koordinaten til R er 0 og y-koordinaten er 1:

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

For andre vinkelstørrelser kan vi finde cosinus og sinus ved hjælp af en lommeregner eller ved opslag i en tabel.

Vi kan dog uden regnetekniske hjælpemidler se at sinus til en trekantsvinkel altid vil have en positiv værdi. For cosinus ser vi at en vinkel under 90° har en cosinus som er positiv, og at en vinkel på over 90° har en cosinus som er negativ.

Vi antager nu at du har adgang til en lommeregner der har taster til beregning af cosinus og sinus (enhver lommeregner til gymnasiebrug vil kunne anvendes).

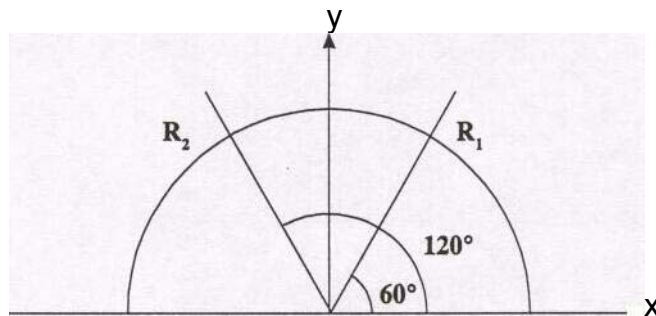
Indtast 60 og tryk på cos-tasten. Du kan da aflæse at cosinus til 60° er 0.5. Tilsvarende kan du ved anvendelse af sin-tasten beregne at sinus til 60° er 0.8660 (resultatet afkortet til 4 decimaler).

Foretag også beregningen for en vinkel på 120° . Her får du:

$$\cos 120^\circ = -0.5$$

$$\sin 120^\circ = 0.8660$$

Hvis du indtegner de to vinkler på 60° og 120° på figuren, vil du let kunne indse at de to retningspunkter må have samme y-koordinat. De to x-koordinater er numerisk set lige store, men den ene er positiv og den anden er negativ. Det fremgår også af beliggenheden på figuren.



Der gælder generelt: To vinkler som tilsammen er 180° har samme sinus, og deres cosinus har samme talværdi, men med modsatte fortegn.

Fra cosinus til vinkelstørrelse

Vi går nu den anden vej: Vi kender en vinkels cosinus og ønsker at finde vinklens størrelse.

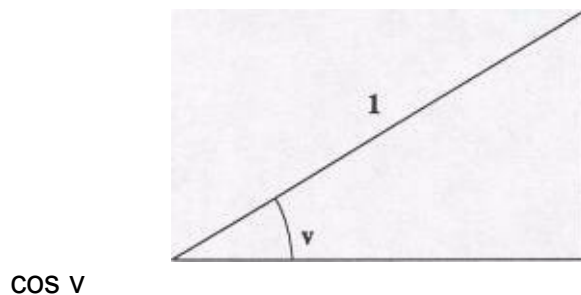
Også her kan lommeregneren benyttes. Indtast 0.5 og tryk på tasten inv cos (tasten kan også være afmærket på anden vis, fx \cos^{-1}). Du får nu på skærmen resultatet 60. Du har dermed at en trekantsvinkel med en cosinus på 0.5 har en vinkelstørrelse på 60° . Men hvad nu med en sinus på 0.5. Der findes jo to trekantsvinkler der har en sådan sinus. Ved indtastning af 0.5 og tryk på tasten inv sin får vi resultatet 30. Vi har altså at en vinkel på 30° har en sinus på 0.5.

Men så ved vi også at en vinkel på 150° må have en sinus på 0.5. Dette fortæller lommeregneren os ikke direkte, men vi kan kontrollere det ved at lade lommeregneren beregne $\sin 150^\circ$.

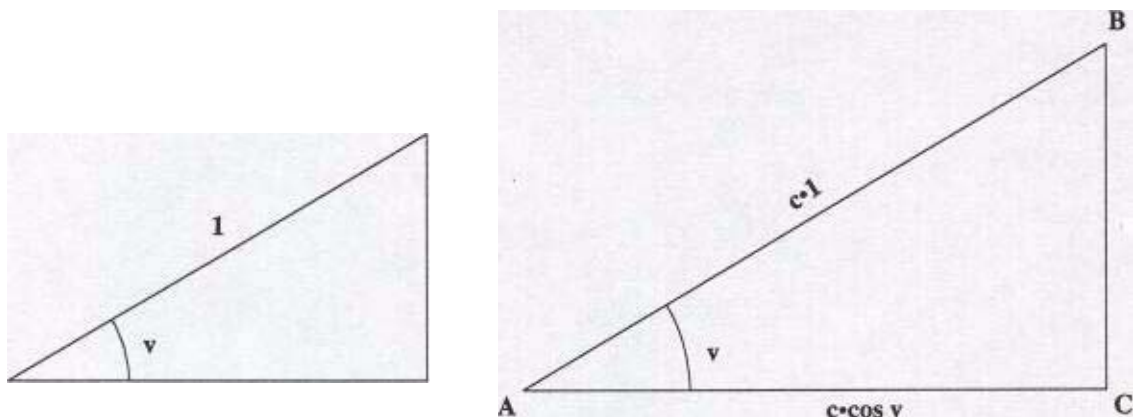
Generelt kan vi sige at til beregningen $\sin v = a$ findes der to trekantsvinkler der kan bruges. De to vinkler er tilsammen 180° (de er supplementvinkler). Ved beregningen $\cos v = a$ findes kun én trekantsvinkel der kan bruges. Hvis a er positiv, er vinklens størrelse under 90° , hvis a er negativ, er vinklens størrelse over 90° .

2. Beregninger i retvinklede trekanter

Vi tegner en retvinklet trekant med hypotenusen af en længde på 1. Da vi kender koordinaterne til retningspunktet R, de er jo $\cos v$ og $\sin v$, har vi at længden af de to kateter i trekanten er som anført på figuren.



Vi tegner nu en vilkårlig retvinklet trekant ABC med sidelængderne a, b og c.



De to trekanter er ligedannede, i den ene har hypotenusen en længde på c, i den anden har den en længde på 1. Det vil sige at hvis vi multiplicerer sidelængderne i den „lille“ trekant med c, så har vi længderne af de tilsvarende sider i trekant ABC.

Heraf ser vi at

$$a = c \cdot \sin v \quad \text{og} \quad b = c \cdot \cos v$$

Det kan omformes til følgende:

$$\sin v = a/c \quad \text{og} \quad \cos v = b/c$$

Dette kan udtrykkes således:

„Sinus til en af de spidse vinkler i en retvinklet trekant er lig med længden af vinklens modstående katete divideret med længden af hypotenusen.“

„Cosinus til en af de spidse vinkler i en retvinklet trekant er lig med længden af vinklens hosliggende katete divideret med længden af hypotenusen.“

Forholdet mellem længderne af de to kateter $a:b$ ses at være:

$$a/b = c \cdot \sin v / c \cdot \cos v = \sin v / \cos v \text{ Dette forhold kaldes } \textit{tangens} \text{ til } v.$$

Vi har altså at tangens er fastlagt ved

$$\tan v = \sin v / \cos v$$

Tangens er kun defineret hvor $\cos v$ er forskellig fra 0, dvs. vinklen v må ikke have størrelsen 90° .

Tangensværdier kan beregnes ved hjælp af lommeregneren. Undersøg hvad der sker når du prøver at beregne $\tan 90^\circ$.

Øvelse 1

Udfyld dette skema hvor v er en trekantsvinkel:

v	60°	120°	88°		
$\tan v$				1	-1

Når du indtaster en negativ værdi for tangens, vil lommeregneren give dig en negativ vinkel. Du må da selv omregne den givne vinkel til en trekantsvinkel.

De to sætninger vedrørende beregning af sinus og cosinus i en retvinklet trekant giver os mulighed for at foretage beregninger af de ukendte stykker i en retvinklet trekant ABC, hvor $C = 90^\circ$.

Eksempel 1: To af de tre sider er kendte.

Den tredje side kan beregnes ved hjælp af den pythagoræiske sætning: $c^2 = a^2 + b^2$. Derefter kan vinkel A beregnes ved hjælp af $\sin A = a/c$.

Eksempel 2: En side er kendt og alle tre vinkler.

Lad os antage at siden a er kendt. Vi har da at siden c kan beregnes ud fra $c = a/\sin A$. Herefter kan b let beregnes.

Hvis det er siden c der er kendt, beregnes først a ud fra

$$a = c \cdot \sin A$$

og derefter kan b beregnes som før.

Øvelse 2

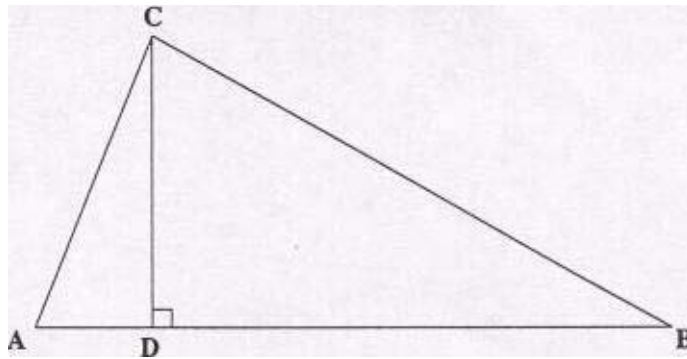
I en retvinklet trekant ABC er $a = 3$ og $b = 4$, Beregn c og de to manglende vinkler.

Øvelse 3

I en retvinklet trekant ABC er $A = 50^\circ$ og $c = 10$. Beregn længden af a og b .

3. Beregninger i vilkårlige trekanter

Figuren viser en trekant ABC. Fra C er tegnet højden CD.



Af resultaterne fra retvinklede trekanter får vi af de to trekanter ACD og BDC:

$$b \cdot \sin A = CD \text{ og } a \cdot \sin B = CD$$

Heraf har vi:

$$a/\sin A = b/\sin B$$

Hvis vi benytter en af de andre højder i trekanten får vi yderligere:

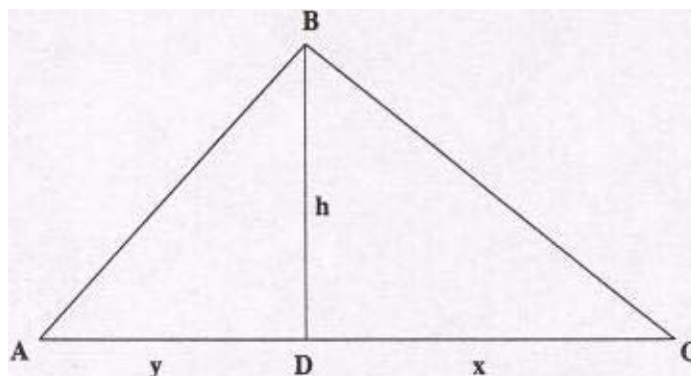
$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$$

Dette kaldes *sinusrelationerne*. De er et af den elementære trigonometris vigtige hjælpemidler ved beregninger i trekanter.

Sinusrelationerne er her udledt for en spidsvinklet trekant. Hvis trekanten er stumpvinklet, falder to af trekantens højder uden for trekanten. Det kan imidlertid vises at også i sådanne trekanter gælder sinusrelationerne.

Et andet hjælpemiddel i trekantsberegninger er de såkaldte *cosinusrelationer*.

Figuren viser en trekant ABC hvor C er en vinkel hvis størrelse er under 90° .



Af figuren har vi:

$$h = a \cdot \sin C \quad \text{og} \quad x = a \cdot \cos C$$

Heraf følger: $y = b - x = b - a \cdot \cos C$

Den pythagoræiske sætning anvendes nu på trekant ABD:

$$c^2 = y^2 + h^2$$

$$c^2 = (b - a \cdot \cos C)^2 + (a \cdot \sin C)^2$$

Ved omformninger fås:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$$

I en trekant hvor vinkel C er større end 90° kan det vises at det samme resultat er gældende. Hvis vinkel C er 90° , ses resultatet også at gælde. Det reduceres da blot til udsagnet i den pythagoræiske sætning: $c^2 = a^2 + b^2$.

Vi kan nu foretage en tilsvarende udledning for de andre vinkler i trekanten. Vi får da:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$$

Dette kaldes *cosinusrelationerne*.

Ved hjælp af sinusrelationerne og cosinusrelationerne kan beregningerne af de ukendte stykker i en vilkårlig trekant nu gennemføres. Vi ser på de fire situationer der er behandlet i afsnit 1 i Geometri med beregninger.

Eksempel 1: a, b og c er kendt

Her beregnes de ukendte vinkler ved hjælp af cosinusrelationerne, fx findes vinkel A ud fra:

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$$

Når A og B er fundet ved cosinusrelationerne, kan vinkel C findes af $C = 180^\circ - (A + B)$.

Eksempel 2: A, b og c er kendt

Længden af siden a kan findes ved hjælp af cosinusrelationen. Derefter kan vinkel B og C findes som under eksempel 1.

Eksempel 3: A, B og c er kendt

Vinkel C findes af $C = 180^\circ - (A + B)$. Derefter findes a og b ved hjælp af sinusrelationerne.

Eksempel 4: A, a og b er kendt

Vinkel B findes af sinusrelationerne. Derefter findes C af $C = 180^\circ - (A + B)$. Endelig findes c af sinusrelationerne.

NB Ved beregningen af B kan der være to løsninger, v og $180^\circ - v$, som begge kan give en trekant der er i overensstemmelse med de givne værdier for A, a og b.

Øvelse 4

I trekant ABC er $a = 5$, $b = 6$ og $c = 7$. Beregn A, B og C.

Øvelse 5

I trekant ABC er $A = 50^\circ$, $b = 6$ og $c = 8$. Beregn B, C og a.

Øvelse 6

I trekant ABC er $A = 50^\circ$, $B = 60^\circ$ og $c = 8$. Beregn C, a og b.

Øvelse 7

I trekant ABC er $A = 40^\circ$, $a = 10$ og $b = 8$. Beregn B, C og c.

Øvelse 8

I trekant ABC er $A = 40^\circ$. $a = 8$ og $b = 10$. Beregn B, C og c.

Andre beregninger vedrørende trekanter

Ud over beregningerne af trekantens sider og vinkler kan der være behov for beregninger af andre størrelser.

Her skaf blot gives de færdige formler til beregningerne. For nogle af beregningerne anføres alternative formler. Udledningen af formlerne vil kunne findes i lærebøger i trigonometri.

Vi benytter her forkortelserne:

T = trekantens areal

$$s = (a+b+c)/2$$

Arealet T af trekant ABC

$$T = \frac{1}{2}ab \sin C \quad (\text{og tilsvarende})$$

$$T = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Radius R i den omskrevne cirkel

$$2R = a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$$

$$R = abc/(4T)$$

Radius i den indskrevne

$$r^2 = (s-a)(s-b)(s-c)/s$$

Højder

Højden h på a:

$$h = 2T/a$$

Medianer

Medianen m til a:

$$2m^2 = b^2 + c^2 - a^2/2$$

Vinkelhalveringslinier

Halveringslinien v fra A:

$$v^2 = 4bcs(s-a)/(b+c)^2$$

Øvelse 9

Opstil formler til beregning af højden på b, medianen til b og vinkelhalveringslinien fra B.