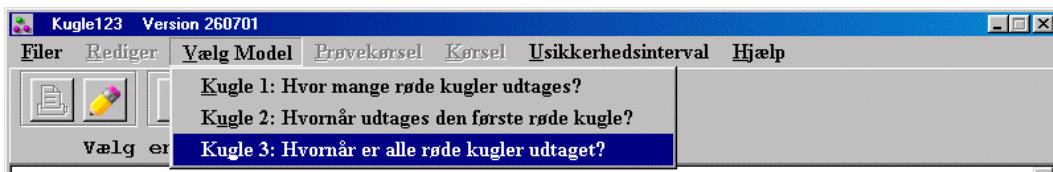


Hvad er chancen? Brug KUGLE3

Indhold

1. Modellen KUGLE3
2. Udtagelse uden tilbagelægning
3. Alle kugler er røde
4. Anvend KUGLE3



1. Modellen KUGLE3

I et terningspil skal spillerne kaste med en terning. Hver spiller skal kaste terningen indtil han har opnået at få både en ener og en toer. Det er ligegyldigt hvilket af de to øjental der kommer først. For hvert kast der udføres, skal spilleren betale med et spillemærke.

Hvad er mon chancen for at en spiller kan nøjes med at betale 5 spillemærker? Og hvad er risikoen for at han må af med mere end 10 spillemærker for at opnå de to eftertragtede øjental?

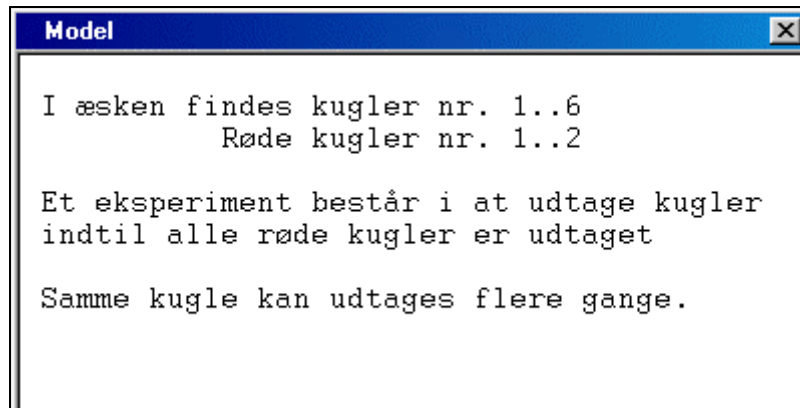
Vi vil undersøge spillechancerne ved hjælp af programmet KUGLE3.

I KUGLE3 foreligger der en kuglemodel med en æske med kugler. Lige som i KUGLE1 og KUGLE2 er nogle af æskens kugler røde.

Fra æsken udtages kugler én for én indtil *alle røde kugler er udtaget*. Så snart alle røde kugler har været udtaget, stopper spillet. Man kan sige at KUGLE3 er en "ventemodel", vi venter på den sidste røde kugle.

Gå ind i programmet KUGLE123 og vælg Ny model: Vælg derefter KUGLE3. På skærmen kan vi nu give oplysninger om den kuglemodel vi vil anvende.

Her har vi fortalt KUGLE3 hvad situationen er: Der er 6 kugler i æsken og 2 af dem er røde. Udtagelsen foregår med tilbagelægning. Samme kugle kan udtages flere gange.

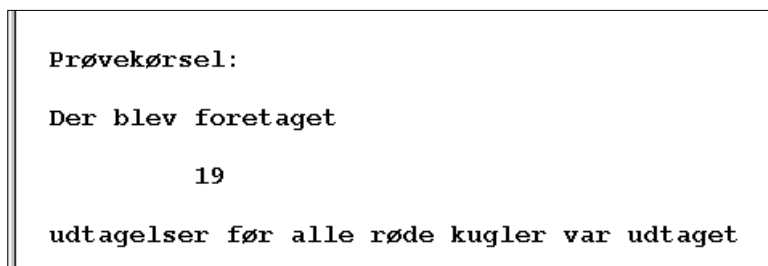


Programmet giver os en meddelelse om hvilken kuglemodel vi har indtastet. Denne model vil vi kort notere ved:

$K3(6,2,ja)$

Det betyder at vi benytter KUGLE3 med 6 kugler hvoraf 2 er røde, og samme kugle kan udtages flere gange.

Vi foretager nu en prøvekørsel af den valgte model:



Prøvekørslen viser at der blev foretaget 19 udtagelser før begge de røde kugler var blevet udtaget. Hvis vi oversætter det til terningkast, så betyder det at vi måtte kaste terningen 19 gange før vi havde fået både en ener og en toer.

En serie af eksperimenter

Vi går nu over til *Kørsel*. Vi lader KUGLE3 udføre 20 eksperimenter. Her er tallene fra de 20 eksperimenter:

Kugle123 Version 260701									
Filer Rediger Vælg Model Prøvekørsel Kørsel Usikkerhedsinterval Hjælp									
Kugle 3: Hvornår er alle røde kugler udtaget?									
Antal kugler der blev udtaget i de 20 eksperimenter									
14	3	3	6	11	9	6	13	13	3
15	13	16	10	8	10	7	2	2	15

På skærmen ser vi hvor mange kugler der måtte udtages før begge de røde kugler var udtaget. Vi kan se at det mindste antal var 2 udtagelser, det betyder jo at begge udtagelser har givet en rød kugle. – Det største antal vi måtte udtage var 16 kugler.

Vi vælger nu *Oversigt*:

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
2	2	10.00	10.00
3	3	15.00	25.00
6	2	10.00	35.00
7	1	5.00	40.00
8	1	5.00	45.00
9	1	5.00	50.00
10	2	10.00	60.00
11	1	5.00	65.00
13	3	15.00	80.00
14	1	5.00	85.00
15	2	10.00	95.00
16	1	5.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 8.95

Oversigten fremlægges i en sumtabel. Af tabellen kan vi se at der var 2 af de 20 eksperimenter hvor vi kunne klare os med 2 udtagelser. Tabellen viser også at der var 7 eksperimenter hvor vi måtte udføre mere end 12 udtagelser før begge de to røde kugler var udtaget.

Den nederste linie fortæller at vi i gennemsnit måtte foretage næsten 9 udtagelser før begge de røde kugler var udtaget.

De ti knapper

KUGLE3 er en del af programmet KUGLE123. De to andre programmer KUGLE1 og KUGLE2 har vi behandlet i andre EMMA-temaer.

De tre programmer er bygget op på samme måde, og vi vil her se på de ti knapper som kan anvendes i alle tre programmer.



De to første knapper har med udprintningen at gøre. Første knap aktiverer printeren og du får udskrevet dine resultater. Anden knap giver dig mulighed for at du kan indtaste dit navn, så du kan finde din udskrift hvis den kommer ud på en fælles printer.



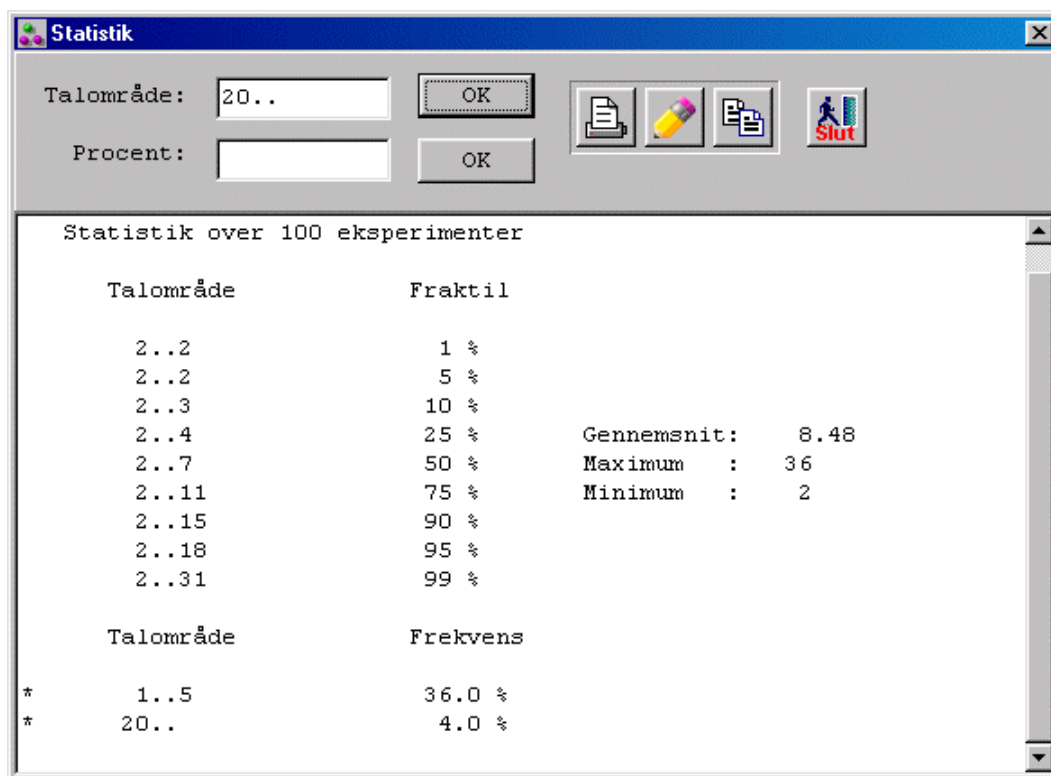
De fire næste knapper kan benyttes når du skal køre en kuglemodel. Den første giver dig mulighed for at sætte en kørsel i gang. - Den næste knap kan bruges når du vil fortsætte

en kørsel, hvis du fx har kørt 100 eksperimenter, men gerne vil udvide med yderligere 400 eksperimenter. – Den tredje knap giver dig mulighed for at gentage en kørsel. Hvis du lige har kørt 100 eksperimenter, så kan du ved et tryk på denne knap køre 100 nye eksperimenter. Du får altså nye resultater, det er kun antallet af eksperimenter der gentages. – Den sidste af de fire knapper lader dig se den model du har indtastet. Hvis du kommer i tvivl undervejs, kan du blot klikke på denne knap.



De fire sidste knapper har med resultaterne at gøre. Den første giver dig en oversigt i form af en sumtabel. – Den næste giver dig en liste over resultaterne fra de enkelte eksperimenter. – Den tredje viser dig et søjlediagram over resultaterne fra kørslen. – Den sidste knap giver dig mulighed for at få nogle værdifulde statistik-oplysninger fra den foretagne kørsel. Denne knap ser vi på i et eksempel.

Vi foretager nu en kørsel af en serie på 100 eksperimenter med modellen: K3(6,2,,ja). Vi springer oversigten over og går direkte til Statistik-knappen:



Til højre i vinduet ser vi at vi i gennemsnit måtte bruge 8.48 udtagelser for at få begge de røde kugler. Det højeste antal udtagelser er 36, det mindste antal er 2.

Af tabellen kan vi se at 50%-fraktilen (medianen) er 7. Det vil sige at vi i 50% af eksperimenterne kunne klare os med op til 7 udtagelser for at få begge de røde kugler. I talområde-feltet indtastede vi området 1..5 og programmet svarede med 36%. Det vil sige at vi i 36% af eksperimenterne kunne klare os med op til 5 udtagelser. Vi har derefter indtastet området fra 20 og opefter. Programmet fortæller at chancen for at skulle foretage 20 udtagelser eller derover er 4%.

Prøv selv

1. Gå ind i KUGLE3 og indtast modellen $K3(6,2,ja)$. Kontroller at programmet viser den rigtige model på skærmen.
2. Gå derefter til knappen *Ny kørsel* og bed om 100 eksperimenter. *Klik på Oversigt-knappen* eller *Statistik-knappen*.
3. Undersøg hvad chancen er for at du kan klare dig med 5 udtagelser? Med 10 udtagelser? Og hvad er chancen for at der skal bruges mere end 20 udtagelser?
4. Foretag en ny kørsel, denne gang med 500 eksperimenter. Besvar igen spørgsmålene om hvad de forskellige chancer er. Print Statistikken ud. Klik på *Graf-knappen*, og print grafen ud.
5. Gentag. Klik på *Gentag-knappen*. Udprint den nye statistik og sammenlign med den tidligere. Er der nogen væsentlig forskel?

2. Udtagelse uden tilbagelægning i KUGLE3

I Malenes klasse laver eleverne et lille lotteri. Der er 25 sedler, og der er gevinst på 3 af dem.

Da Malene køber sin lodseddel, ser hun at der allerede er solgt 13 sedler. Hvad er mon risikoen for at alle gevinstsedler allerede er solgt?

Vi vil besvare spørgsmålet ved hjælp af KUGLE3. Denne gang benytter vi modellen

$K3(25, 3, \text{nej})$.

Der er jo 25 sedler og 3 af dem er med gevinst. Samme seddel kan ikke sælges flere gange, så vi benytter kugleudtagning uden tilbagelægning.

Vi lader nu KUGLE3 udføre 20 eksperimenter. Her er oversigten:

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
8	1	5.00	5.00
10	1	5.00	10.00
12	2	10.00	20.00
13	1	5.00	25.00
16	1	5.00	30.00
17	1	5.00	35.00
19	2	10.00	45.00
20	2	10.00	55.00
21	1	5.00	60.00
22	2	10.00	70.00
24	1	5.00	75.00
25	5	25.00	100.00
Udført i alt: 20 eksperimenter			
Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 19.00			

Af oversigten kan vi se at 8 er det mindste antal udtagelser der skulle til før alle tre røde kugler var udtaget. Men der var også fem eksperimenter hvor der måtte hele 25 udtagelser til. Flere end 25 udtagelser kan vi i øvrigt ikke komme ud for, der er jo kun 25 kugler i æsken.

Oversigten fortæller os at i 25% af eksperimenterne var alle de røde kugler udtaget allerede når vi havde foretaget 13 udtagelser. Her har vi så et svar på Malenes problem: Der er en risiko på ca. 25% for at alle gevinstsedler er solgt blandt de 13 første sedler.

Prøv selv

1. Lad KUGLE3 udføre 100 eksperimenter, og giv på grundlag heraf et svar på Malenes problem. Brug Statistik-knappen.

2. Gentag kørslen og sammenlign resultaterne fra de to kørsler.
3. Undersøg Malenes chancer hvis der havde været 5 gevinster på de 25 sedler.

3. Alle kugler er røde

Ved nogle chancesituationer vil vi kunne anvende kuglemodellen i KUGLE3 til at undersøge hvor mange udtagelser der skal til for at udtage *alle* kugler i æsken. En sådan udtagelse er selvfølgelig med tilbagelægning. Ved udtagelse uden tilbagelægning ville vi jo på forhånd vide, hvor mange udtagelser der skulle til for at udvælge alle æskens kugler.

Vi ser på en chancesituation hvor alle kugler skal udtages.

Sanne er medlem af en bogklub. Hver gang hun køber en bog, modtager hun „en lykkepose“ med en nummerseddel i. På sedlen står et af tallene 1,2,3...,10. Når Sanne har samlet et helt sæt af nummersedler, vil hun kunne udvælge sig en bog fra et af klubbens kataloger. Hvor mange bøger skal Sanne mon købe før hun har et helt sæt af nummersedler?

Der findes 10 forskellige nummersedler, så det kan selvfølgelig tænkes at Sanne allerede efter at have købt 10 bøger har fået fat på alle 10 sedler. Men så heldig kan hun nok ikke regne med at være. Hun er da også mere interesseret i at vide hvor mange bøger man i gennemsnit skal købe for at få et helt sæt nummersedler.

Bogklubben oplyser at sedlerne er tilfældigt fordelt i lykkeposerne, og at der ikke er nogen skævhed i antallet af de forskellige sedler. Sanne kan derfor gå ud fra at hver af de 10 sedler har samme chance for „at komme ud“ når hun køber en ny bog.

Sanne vil nu efterligne bogkøbene ved hjælp af en kuglemodel. Hun benytter her modellen

$K3(10, 10, \text{ja})$.

I kugleæsken er der 10 kugler, og de er alle røde. Fra æsken skal udtages kugler indtil alle kugler har været udtaget.

Vi lader KUGLE3 foretage to prøvekørsler Ved den første blev resultatet at der skulle udtages 17 kugler før alle røde kugler var udtaget.

Ved den næste prøvekørsel var resultatet ikke så opmuntrende. Her skulle der udtages 54 kugler før alle røde kugler var udtaget.

Af de to prøvekørsler kan Sanne jo ikke få særlig meget at vide om chancerne ved bogkøbene. Hun udfører derfor 20 eksperimenter.

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
18	1	5.00	5.00
20	4	20.00	25.00
21	1	5.00	30.00
22	3	15.00	45.00
23	1	5.00	50.00
25	2	10.00	60.00
27	1	5.00	65.00
28	1	5.00	70.00
29	1	5.00	75.00
30	1	5.00	80.00
40	1	5.00	85.00
42	1	5.00	90.00
45	1	5.00	95.00
46	1	5.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 27.25

Af oversigten ser vi at antallet af kugleudtagelser varierer fra 18 til 46. I gennemsnit er der udtaget 27.25 kugler pr. eksperiment. Det svarer til at bogklubbens medlemmer må regne med i gennemsnit at skulle købe ca. 27 bøger for at få et fuldstændigt sæt af nummersedler.

Oversigten viser at chancen for at Sanne kan klare sig med at købe under 25 bøger er 50%. Vi kan også se at risikoen for at hun må købe mere end 40 bøger er 15%. - Men som sædvanlig bør vi ikke stole for meget på et lille talmateriale. Der må udføres nogle flere eksperimenter.

Prøv selv

- Lad KUGLE3 efterligne bogkøbet ved 100 eksperimenter. Giv derefter dit bud på følgende:
 - Hvor mange bøger må Sanne i gennemsnit regne med at købe før et helt sæt nummersedler foreligger?
 - Hvad er Sannes chance for at hun kan slippe med at købe højst 20 bøger?
 - Hvad er Sannes risiko for at hun må købe mere end 30 bøger?
 - Hvad er Sannes risiko for at hun må købe mere end 40 bøger?
- Gentag kørslen og sammenlign resultaterne fra de to kørsler.
- Find ud af hvad det betyder for Sannes bogindkøb at bogklubben sætter antallet af nummersedler op fra 10 til 20:

Hvad bliver nu gennemsnittet af antal bogkøb?

Hvad er chancen for at Sanne kan klare sig med at købe højst 40 bøger?

Hvad er risikoen for at hun må købe mere end 60 bøger?

4. Anvend KUGLE3

I opgaverne skal du nu selv prøve at løse chanceproblemer ved hjælp af en kuglemodel. Vær omhyggelig med opstilling af modellen og overvej nøje om det er en brugbar model du har opstillet. Pas især på om der er tale om en udtagelse hvor samme kugle kan udtages flere gange, eller om dette ikke er tilladt.

Lad derefter KUGLE3 køre den opstillede model. Benyt mindst 100 eksperimenter, og gerne 200 eller flere, før du sætter tal på de søgte chancer.

Prøv også at sammenligne forskellige kørsler af programmet, og undersøg hvor godt resultaterne stemmer overens. Er der væsentlige forskelle, så kør programmet endnu en gang.

1. Banko

Ved et tallotteri udtrækkes tal, et for et og uden tilbagelægning, fra tallene 1,2,3,...,90. På hvert af lotteriets spilleplader findes 15 af disse tal.

Sanne deltager i spillet med en enkelt plade. Beregn følgende chancer ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at alle Sannes 15 tal er med blandt de første 75 tal der udtrækkes.
2. Chancen for at alle Sannes 15 tal er med blandt de første 80 tal der udtrækkes.

2. Mere Banko: En række er fyldt op

På spillepladen i Banko-spillet har Sanne de to første udtrukne tal. De er begge placeret i den øverste række på hendes spilleplade. Hun mangler nu de sidste tre tal i rækken for at få „Banko“.

Hvad er chancen for at de manglende tre tal bliver udtrukket mellem de næste 25 tal?

Hvad er chancen for at de bliver udtrukket mellem de næste 40 tal?

3. Alle seks

Sanne har fundet på et spil som hun kalder „Alle seks“: En terning kastes indtil alle seks mulige øjental er forekommet i kasterækken. Sanne tilbyder dig at deltage i spillet på følgende betingelser:

Hvis du kan få „Alle seks“ med højst 10 kast, får du udbetalt 10 kr. Hvis du bruger mere end 10 kast, skal du betale 10 kr. til Sanne.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel om du vil modtage Sannes tilbud.

4. Mere om „Alle seks“

Sanne tilbyder dig nu at deltage i „Alle seks“ på følgende vilkår:

Du betaler 1 kr. pr. kast. Til gengæld får du udbetalt 10 kr. når du har slået „Alle seks“.

Afgør ved hjælp af en kuglemodel hvor god en forretning dette spil er for Sanne.

5. Tyggegummi

I tyggegummipakker indlægges nummersedler med numrene fra 1 til 25. Den der har et fuldstændigt sæt kan få en grammofonplade som præmie. Hvor meget tyggegummi må du i gennemsnit købe for at få grammofonpladen?

6. Du mangler 10 sedler

Af nummersedlerne fra opgave 5 har du allerede byttet dig til de 15 sedler. Du mangler nu 10 for at have et fuldstændigt sæt. Hvor meget tyggegummi skal du regne med at købe for at få de 10 manglende sedler?

7. Roulette

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvor mange spil der i gennemsnit skal spilles før alle 37 numre er kommet ud.

Hvad er chancen for at alle 37 numre er kommet ud i løbet af 100 spil? 150 spil?

8. Fødselsdage i alle måneder

I Malenes klasse er der ingen der har fødselsdag i juli, men alle andre måneder er fødselsdagsmåneder i klassen.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad chancen for at alle årets måneder er fødselsdagsmåneder i en klasse med:

(1) 20 elever (2) 24 elever (3) 28 elever

Hvor mange elever skal der være i klassen for at der er 50% chance for at alle årets måneder er fødselsdagsmåneder i klassen?

9. Richsbilleder

I gamle dage samlede børnene på Richsbilleder. I hver pakke Richs (kaffetilsætning) var der et billede. I alt fandtes der 196 billeder i serien.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvor mange pakker kaffetilsætning man i gennemsnit skulle købe for at få alle 196 Richsbilleder.

10. De to røde esser

Fra et sæt spillekort med 52 kort udtages kort, et for et og uden tilbagelægning, indtil begge de røde esser er udtaget.

Hvad er chancen for at de to røde esser er med blandt de første 10 kort der udtages?

Hvad er chancen for at de to røde esser er med blandt de første 26 kort?

11. Alle fire esser

Nu skal alle fire esser i kortspillet fra opgave 10 udtrækkes.

Hvad er chancen for at alle fire esser er blandt de første 26 kort der udtrækkes?

Hvad er risikoen for at der skal trækkes mindst 48 kort før alle 4 esser er udtrukket?

12. Fødselsdage udtrækkes

I et ugeblad udtrækkes hver uge 10 af årets 365 dage. En dag der er udtrukket, kan ikke udtrækkes igen.

I en familie på 5 medlemmer venter man på at deres 5 fødselsdage bliver udtrukket.

Hvad er chancen for at familiens 5 fødselsdage bliver udtrukket i løbet af det første halve år (= 26 uger)?

Hvad er risikoen for at familien må vente i mere end 30 uger før alle 5 fødselsdage er udtrukket?

Hvad er risikoen for at de må vente i mere end 35 uger før familiens 5 fødselsdage alle er udtrukket?

13. Lykkehjulet i Tivoli

Malene spiller på tre af lykkehjulets 24 numre.

Hvad er chancen for at alle Malenes tre tal kommer ud i løbet af de første 10 spil?

Hvad er chancen for at de kommer ud i løbet af de første 20 spil?

Hvad er risikoen for at der skal spilles mere end 50 spil før alle tre tal er kommet ud?

14. De 36 forskellige terningkast

Malene ved fra undervisningen i chancelære i skolen at det er en god ide at arbejde med 36 forskellige muligheder i et kast med to terninger.

Hun stiller sig følgende opgave: Hvor mange gange kan hun forvente at kaste de to terninger før hun har set alle de 36 mulige resultater?

Hvad er chancen for at hun kan klare det med 100 kast?

15. Fødselsdage på skolen

Hvor mange elever skal der i gennemsnit være på en skole hvis der hver eneste af årets 365 dage er en elev på skolen der har fødselsdag?

Hvor mange elever skal der være på skolen hvis der skal være 50% chance for at hver af årets dage er fødselsdag på skolen?

Find ud af hvor mange elever der er på din skole. Hvad er chancen for at hver af skoleårets mandage er fødselsdag for en elev på din skole? - Et skoleår indeholder 40 mandage.

Hvor mange elever skal der være på skolen hvis der skal være 50% chance for at alle skoleårets mandage er fødselsdag på skolen?

Hvor mange elever skal der i gennemsnit være på skolen hvis hver eneste af skoleårets mandage skal være fødselsdag for en elev på skolen?