

---

# **INFA-Småtryk 1998 - 1**

*Allan C. Malmberg*

**Induktivt arbejde med edb**

***INFA Matematik - 1998***



## **Et faglig-pædagogisk forskningsprogram ved Danmarks Lærerhøjskole**

**Danmarks Lærerhøjskole, Emdrupvej 115B, 2400 København NV**

**Telefon: 3969 6633, lokal 2682 • Telefax: 3969 6626**

**E-mail-adresse: [infa@infa.dk](mailto:infa@infa.dk)**

**URL-adresse: <http://www.infa.dk>**

Tekst: Allan C. Malmberg

Layout: Leif Glud Holm

© INFA 1998

## Indholdsfortegnelse

1. Induktivt arbejde med Indukto .....	4
2. Elevernes arbejde med Indukto .....	10
3. Erfaringsindsamling .....	12
4. lagtagelser fra arbejdet med Indukto .....	19
5. Heuristiske regler .....	25
6. Induktivt arbejde i skolens matematik .....	28
Litteraturhenvísninger .....	30

# 1. Induktivt arbejde med Indukto

Indukto er et program udviklet til en undervisning der ønsker at indføre eleverne i en arbejdsform hvor de gør observationer, foretager gæt, udfører eksperimenter, afprøver antagelser, foretager nye gæt...

Kort sagt: Et program hvor eleverne arbejder på en eksperimenterende, afprøvende og udforskende måde.

Det fremhæves adskillige steder i den nye undervisningsvejledning for matematik (fra 1995) at der bør gives eleverne gode muligheder for at blive fortrolige med sådanne arbejdsformer. Vejledningen samler imidlertid ikke sine forslag under en generel beskrivelse af elevernes arbejdsformer. En sådan beskrivelse finder vi i den foregående vejledning fra 1976 [1] (side 10):

„Det må i den forbindelse anses for at være et mål, at den enkelte elev kommer til at indtage en eksperimenterende holdning ved indlevelsen i matematiske områder, som er nye for ham. Eleven bør nå til erkendelse af, at det ikke blot er tilladeligt, men særdeles hensigtsmæssigt, at man i en sådan indlevelsperiode eksperimenterer med de forelagte faglige situationer.

Eleven skal fra sit praktiske møde med de mangfoldige indlærings-situationer kunne uddrage et arbejdsmønster som kort kan karakteriseres således: Gennem eksperimenter får man erfaringer, og disse erfaringer kommer en til gode, når man gætter på en løsning på et problem i forbindelse med det behandlede emne, eller når man gætter på sammenhænge inden for emnet; enhver gætning kan afprøves ved supplerende eksperimenter, og man kan derved blive ført til viden om, at gættet var forkert, eller yderligere bekræftelse på, at man er på rette spor.

En sådan eksperimenterende holdning til arbejdet i indlærings-situationer eller i problemløsningssituationer - en sådan induktiv arbejdsform - svarer meget nært til den holdning, hvormed man i mangfoldige praktiske situationer angriber det ukendte eller uvante, og den svarer også særdeles godt til den holdning, hvormed man arbejder i andre fag, eksempelvis i de fag, hvor iagttagelse af og systematisering vedrørende vor omverden er centralt placeret.

En induktiv arbejdsform svarer også meget nært til den måde, hvorpå opdagelse og udvikling har fundet sted inden for matematikken som videnskab.“

## **1. Indukto-programmet**

For mange lærere har det været en vanskelig pædagogisk opgave at tilrettelægge en undervisning som på passende og lethåndterlig måde kunne lade eleverne stifte bekendtskab med den beskrevne induktive arbejdsform.

Den induktive arbejdsform rendyrkes i Indukto. Med dette program får læreren et hjælpemiddel i hænde som sætter eleverne i stand til at arbejde med induktive situationer af problemmæssig karakter. Indukto er derfor et program som giver fine muligheder for etablering af et aktivt og inspirerende læremiljø hvor eksperimenter og undersøgelser inden for et område fra den matematiske begrebsverden er sat i spidsen.

Indukto har følgende egenskaber:

- Det er enkelt og lettilgængeligt
- Det er udfordrende for elever på alle klassetrin  
- og for deres lærere
- Det giver eleverne mulighed for at være kreative  
både i opgaveløsning og i opgaveudformning
- De faglige forudsætninger er få .

Hertil kommer at Indukto giver pædagogiske muligheder som næsten ikke ville kunne opbygges uden brug af datamaskine.

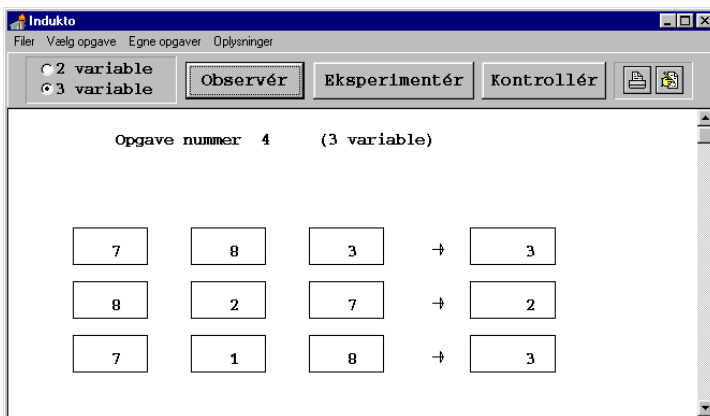
Da Indukto arbejder med hele tal og med beregninger der udføres på disse tal, vil eleverne i beskæftigelsen med programmet få lejlighed til at udbygge deres talindsigt og talforståelse - foruden deres kreativitet og opfindsomhed.

Det kan anbefales at eleverne stilles frit med hensyn til brugen af lommeregner i arbejdet. Det er en erfaring at langt de fleste elever foretrækker at arbejde uden tekniske hjælpemidler.

## En beskrivelse af Indukto

Ideen i Indukto er at eleven skal afsløre en skjult regel som til givne inddata beregner et resultat. Matematisk set er der tale om en ukendt funktionforskrift som til givne inddata knytter en funktionsværdi. Eleverne skal gennem deres arbejde give et kvalificeret gæt på hvordan funktionsværdierne beregnes.

I Indukto er indlagt et antal opgaver som eleverne kan arbejde med, men herudover kan de formulere deres egne opgaver og stille dem som udfordring til de andre elever i klassen.



### **Observér**

Eleverne vælger en af programmets opgaver og går derefter til menu-punktet Observér. Programmet udskriver nu fire tal:

a b c x

hvor x er det resultat der fremkommer når den valgte - og for eleverne ukendte - beregningsregel anvendes på tallene a, b og c. For eksempel kan opgave 1 i Indukto give følgende udskrift:

5 4 7 16

Når den ukendte regel anvendes på tallene 5, 4 og 7, bliver resultatet altså 16. Nye observationer af den samme regel kan fx give:

4 8 8 20

3 2 5 10

De fleste elever vil allerede nu have en sikker formodning om hvad der gemmer sig i den skjulte regel:  $x$  er summen af  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

Et sæt observationer fra opgave 4 i Indukto:

9 6 2 1

4 4 6 6

7 8 5 3

Her er der næppe nogen af eleverne der kan nøjes med disse tre observationer. Der må flere til før en formodning om den skjulte regel kan formuleres og afprøves.

Eleverne kan i fred og ro studere de observationer der leveres fra programmet, idet der er mulighed for printerudskrift af alle uddata fra Indukto. En granskning af disse data vil måske give eleverne en ide om den matematiske regel der er på tale. De kan derefter afprøve deres formodning ved at gå over til menupunktet *Kontrollér*.

### ***Kontrollér***

Programmet leverer her et prøvesæt bestående af fem eksempler hvor eleverne skal give deres svar. Derefter giver programmet de rigtige svar på de fem opgaver. Er kontrollen forløbet fejlfrit for alle fem eksempler, kan eleverne have en vis tillid til den opstillede antagelse. En større sikkerhed kan opnås gennem yderligere en eller flere kontrol-omgange. Men som i virkelighedens udforskning får man aldrig fuld vished, en fortsat kontrollering kan på et eller andet tidspunkt afsløre at den hidtidige hypotese må vige for en ny.

Det er selvfølgelig logisk set korrekt at selv nok så mange observationer eller kontrollerer ikke kan garantere at den rigtige regel er fundet. Der er altid risiko for at den næste observation vil kunne afsløre at den givne løsning er falsk. Men der er ingen tvivl om at ens tillid til rigtigheden af den opstillede regel forøges med hver ny observation der er i overensstemmelse med den opstillede regel. Og det er jo netop situationen i videnskabens bestræbelser på at opstille hypoteser til beskrivelse af lovmæssigheder i vor fysiske og biologiske verden.

### ***Eksperimentér***

Ved vanskelige regler kan eleverne gøre brug af en mere systematisk indsamling af data. Det gøres gennem valg af menupunktet *Eksperimentér*. Eleverne kan nu selv fastsætte to af de tre værdier for tallene a, b og c. Når disse to værdier er indtastet, vælger programmet den manglende værdi for det tredje tal og udskriver derefter det resultat der svarer til at anvende reglen på de tre givne tal. Denne eksperimenteringsform hvor kun to af de tre tal kan fastsættes af eleven, skal afspejle situationer fra virkeligheden: *Man kan almindeligvis styre nogle af de variable i et eksperiment, men ikke dem alle.*

### **Et svar formuleres**

Eleverne vil i arbejdet med Indukto kunne skifte mellem anvendelsen af Observér, Kontrollér og Eksperimentér. Når de føler sig rimeligt sikre på at have afsløret den skjulte regler, kan de prøve at udtrykke deres antagelse i matematisk sprog. Dette er dog ikke noget krav, den afgørende test er at den opstillede antagelse kan klare kontroleksemplerne. Derfor kan en mere uformel beskrivelse af reglen i jævnt dansk være lige så god som en matematisk angivelse, blot beskrivelsen er entydig og dækkende for alle forekommende tal-eksempler.

Elevernes lærer er ikke bedre stillet end eleverne selv i arbejdet med Indukto. Der er ingen facitliste, og lærer og elever må sammen overveje om den fundne regel er god nok, eller om der må nye iagttagelser til. Også de sproglige formuleringer kan give anledning til drøftelser mellem elever og lærer.



## Opgaverne i Indukto

Programmets talverden er meget begrænset. For a, b og c kan kun optræde talværdierne 1, 2, 3, ..., 9. Og resultatet af anvendelsen af reglerne vil altid være et helt tal, fra 0 og op til højst 999. De fleste regler vil endda give encifrede tal eller små tocifrede tal som resultat.

Til trods for denne begrænsede talverden har mange af opgaverne i Indukto vist sig at være vanskelige at knække, og programmet er en god udfordring for både elever og lærere.

Indukto er afprøvet i en version med 50 indbyggede opgaver. I denne version er opgaverne nr. 1-10 ret enkle. De sidste opgaver, nr. 30-50, er svære, og her vil arbejdet sikkert kræve mange observationer og eksperimenter og megen grublen og gransken før kontrollen forløber fejlfrit. De mellemliggende opgaver er af mere moderat sværhedsgrad, og de vil kunne bruges som krydderi til de yngre elever eller som opvarmning for de ældre. Der er dog ikke tilstræbt en stigende sværhedsgrad fra opgave nr. 1 til nr. 50.

I den version af Indukto der er udsendt i INFA-Klubben, er der indlagt 20 opgaver. Lærer og elever kan herudover supplere med egne opgaver. Ikke blot kan læreren stille nye opgaver, men eleverne kan også selv formulere problemer som de kan udfordre kammerater (og lærer) med.

Med denne mulighed for egne opgaver er der åbnet for en anvendelse af programmet også på de lave klassetrin. Gennem valg af opgaver vil der kunne stilles udfordringer på ethvert sværhedsniveau.

Arbejdet med Indukto har ofte vist at opgaver der var tænkt lette, er faldet svære ud - og omvendt. Og der vil i øvrigt være store individuelle forskelle fra elev til elev i hvad der opfattes som let og hvad der findes svært. Det vil heller ikke nødvendigvis være de opgaver som lærerne finder svære, der giver de største vanskeligheder for eleverne. Således er der eksempler på at en opgave som grupper af lærere måtte bruge i gennemsnit 20 minutter på, har kunnet løses af elevgrupper på under 5 minutter.

Om beregningsreglerne i Indukto skal anføres at de kan beskrives i jævne danske ord og med anvendelse af begreber fra den elemen-

tære talbehandling. Mange af reglerne vil være opbygget så de udnytter alle de tre givne tal  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Men nogle regler er så lumske at de kun arbejder på to af tallene, fx på  $a$  og  $c$ , eller måske endda kun på et af tallene.

### **Velegnet til samarbejde**

Erfaringerne viser at beskæftigelsen med Indukto med fordel kan foregå i grupper hvor eleverne arbejder sammen to eller tre. Ved en sådan tilrettelæggelse vil arbejdet med Indukto have gode chancer for at sætte en livlig faglig diskussion i gang.

### **Indukto i en enklere udgave**

Arbejdet med Indukto har givet anledning til ønsker fra lærere og elever om en simplificeret udgave af programmet, en udgave med kun to tal som inddata.

En sådan mulighed er nu til stede i den version der er udsendt i INFA-Klubben, og brugeren af Indukto kan selv vælge om der arbejdes med to-tals-versionen eller tre-tals-versionen.

I det følgende vil vi udelukkende give kommentarer til den oprindelige version hvor der er tre tal som inddata.

## **2. Elevernes arbejde med Indukto**

Det skal siges til indledning at ikke alle elever føler sig lige fascineret af arbejdet med opgaverne i Indukto. Nogle bliver meget optaget af problemerne i Indukto, men andre kører hurtigt træet.

Oprindelig var programmet tænkt som en udfordring til dygtige elever som havde tid og kræfter til at arbejde med utraditionelle opgavesituationer. Men erfaringerne viste at også elever som af deres lærer vurderes som mindre udfarende i forbindelse med matematik, har været optaget af Indukto, og de har med fine resultater til følge kunnet arbejde med en række af opgaverne i Indukto.

Enkelte lærere har meldt om overraskende præstationer hvor elever de betragtede som svage, har vist at udfolde et særligt talent - ofte i forbindelse med en ekstra udholdenhed og stædighed - i arbejdet med at afsløre Induktos skjulte regler.

### **En lærertilbagemelding**

*„Selv om forløbet har været kort, føler jeg, at de to elevgrupper har fået en ny måde at se på faget. De er blevet sporet ind på en helt ny og mere kreativ tankevirksomhed. De har hele tiden skulle forklare deres teori for de andre i gruppen. Og her er det ikke kun den stærke elev, der er kommet til orde. Alene det at formulere løsningen skriftligt på et stykke papir har været lærerigt.*

*Eleverne har været utroligt optaget af at løse opgaverne. Der har ikke rigtig været en egentlig konkurrence mellem dem, om hvem der nu var kommet længst. De har også uden besvær kunnet „holde mund“ - løsningerne er ikke blevet videregivet!“*

### **En lærertilbagemelding**

*„Jeg har ladet nogle af mine elever sidde og underholde sig selv med programmet. Først forklarede jeg dem hvordan man „spillede“, og hvad spillet gik ud på. Derefter fik de spillet overladt til sig selv, så de kunne gå på opdagelse.*

*Nu var jeg kun observatør.*

*Det første jeg opdagede var at de selv dannede nogle små grupper. Var løsningen ikke let at få øje på, tog gruppen en udskrift af 6-9 observationer, og satte sig så i fred og ro til at finde frem til en regel der måske kunne holde.*

*Når gruppen mente de havde fundet den rigtige løsning, satte de sig igen ved maskinen for at kontrollere. Og de var meget interesserede, de ville ikke give op før de havde det rigtige svar.*

*Når eleverne havde løst nogle opgaver, afbrød jeg dem et øjeblik for at fortælle dem lidt om hvad spillet efter min mening skulle vise: „På samme måde som I nu har siddet og gættet og observeret, eksperimenteret og kontrolleret, har videnskabsmænd op gennem historien*

*opstillet antagelser og observeret, eksperimenteret og afprøvet det som vi i dag kender som fysiske love.“ - Vi tog helt naturligt anledning i arbejdet til at snakke videre i fysiktimerne.“*

### **3. Erfaringsindsamling**

I INFA-projektets regi har der været foreslået en plan for arbejdet med indsamling af erfaringer fra elevernes afprøvning af Indukto. Planen gengives her:

#### ***Forløb: Afprøvning af Indukto***

Tidsforbrug: 3-5 lektioner  
Klassetrin: 5-10

Elever: Et antal grupper med 2-3 elever i hver. Hele klasser kan godt deltage, men læreriagttagelsen må måske af praktiske grunde begrænses til nogle udvalgte elevgrupper.

Baggrund: Indukto er ikke et egentligt spil, men mere en aktivitet der kan lade eleverne arbejde i fællesskab med at løse et problem som stiller krav til deres fantasi og kombinationsevne.

#### ***Forslag til arbejdsplan***

1. Lad eleverne blive fortrolige med Indukto gennem en fælles og åben afprøvning af de første tre opgaver. Sæt dem ind i muligheden for at få informationer fra programmet: Observationer, Eksperimenter og Kontrol.

Løs opgave 1-3 i fælles drøftelse med eleverne. Benyt muligheden for udprintning af arbejdsforløbet.

Lad eleverne formulere de fundne regler i de tre opgaver, gerne i almindeligt sprog.

2. Lad eleverne arbejde med opgaverne nr. 4-10. Efter hver opgave skal de foretage en udprintning af arbejdsforløbet.

Lad dem tælle op hvor mange informationer i form af Observationer og Eksperimenter der er brugt før de mener at have afsløret reglen. Ved optællingen skal der ikke skelnes mellem Observationer og Eksperimenter. Eleverne skal efter hver opgave aflevere programmets udskrift af arbejdets forløb samt en sproglig formulering af den fundne regel.

Også arbejde der afsluttes (opgives) uden gevinst bør rapporteres. I dette tilfælde må eleverne gerne give deres gæt på den endnu ikke afslørede regel.

3. Frit arbejde med opgaverne nr. 11-20 for de elever der har tid og lyst. Indhent oplysninger om arbejdsforløbet gennem programmets udskrifter.

4. Lad eleverne prøve at formulere en egen opgave. De har muligvis behov for hjælp til at få den indlagt i programmet. Afprøv deres opgave på de andre elevgrupper.

#### *Iagttagelser*

Læreren indhenter elevernes besvarelser fra arbejdet, og supplerer det med egne iagttagelser over arbejdets forløb, fx bemærkninger om elevernes engagement i opgaverne, deres administration af samarbejdet i grupper, etc.

### **Udskrifter fra programmet**

Indukto kan levere udskrifter som giver et billede af arbejdets forløb.

#### *Eksempel 1*

Her er en udskrift som viser et arbejdsforløb med opgave 6 i Indukto:

#### Observationer

9	7	4	2
6	8	7	1
6	2	9	3

## Kontrol

5	7	1	2	2
3	5	7	2	2
4	9	2	5	5
5	4	2	1	1
3	2	3	0	0

Elevgruppen har her kunnet klare sig med blot tre observationer. Ud fra de tre observerede talsæt har de gættet på den ukendte regel. I den efterfølgende kontrol, som altid omfatter fem datasæt, har eleverne indtastet tallene i den fjerde søjle, og programmet har i den sidste søjle anført de korrekte svar. Det ses at de to sidste søjler stemmer helt overens, samtlige svar i kontrollen er altså korrekte.

Elevgruppen har nu afsluttet arbejdet med denne opgave, og de er gennem kontrollen overbevist om at de har afsløret den ukendte regel. Deres formulering af reglen har vi udeladt for ikke at snyde læseren for at gøre sine egne overvejelser.

Programmet kan også udskrive en mere summarisk statistik over arbejdets forløb. Denne statistik ser i dette tilfælde således ud:

### *Opgave 6*

Tid	Aktivitet	Antal datasæt	
122	Observer	3	
22	Kontroller	5	Antal fejl: 0

Oversigten viser hvilke aktiviteter eleverne har arbejdet med, og den viser tillige gennem en tidsstempling hvor lang tid der er benyttet til hver enkelt aktivitet. I det forelagte tilfælde har elevgruppen studeret de tre observationer i 122 sekunder før de gik over til at foretage en kontrol.

Hvad der er forekommet af drøftelser og udveksling af ideer i disse to minutter, fremgå desværre ikke af udskriften. Sådanne oplysninger kan kun indhentes gennem læreriagttagelser, enten direkte eller ved videooptagelser af elevgruppens arbejde.

### Eksempel 2

Her er data fra en elevgruppes arbejde med opgave 10 i Indukto:

#### Observationer

9	7	7	3
3	1	7	9
9	7	5	5
8	9	2	8
5	3	8	7
9	1	5	9

#### Ekspementer

4	2	1*	9
4	3*	6	7
4	5	8*	6
4	5*	8	6
4	2	4*	8
6	2	9*	8
1	2	5*	9

#### Observationer

5	9	2	8
8	2	6	8
4	5	4	6
7	4	1	9
6	3	5	7
6	3	9	7
4	4	3	7
1	2	4	9
6	6	9	4

*Kontrol*

5	3	9	7	7
1	5	3	9	9
5	8	5	5	5
3	4	1	9	9
2	6	1	9	9

*Kontrol*

6	6	2	8	8
7	6	6	4	4
1	9	7	9	9
7	4	1	9	9
5	3	8	7	7

Den summariske statistik ser her således ud:

Tid	Aktivitet	Antal datasæt	
125	Observer	6	
182	Eksperimenter	7	
98	Observer	9	
38	Kontrol	5	Antal fejl: 0
34	Kontrol	5	Antal fejl: 0

Vi ser at elevgruppen efter de indledende 6 observationer har gjort brug af Eksperimenter. Her har de selv indtastet to af de tre tal, datamaskinen har derefter valgt det tredje tal, det der i udskriften er markeret med en stjerne. Vi kan desværre ikke af udskriften se hvilket udbytte disse eksperimenter har givet og hvilke drøftelser de har givet anledning til.

Herefter har elevgruppen igen foretaget en række observationer, og først derefter er de gået over til Kontrol for at afprøve deres gæt på den ukendte regel. Vi ser at eleverne ikke har været tilfredse med kun at udføre Kontrol én gang, for en sikkerheds skyld har de afprøvet deres gæt ved en ekstra Kontrol.



## Tilbage melding fra en afprøvning af Indukto

Afprøvningen er blevet foretaget med elever fra 8. klasse med medvirken af to lærere. Lærerne beskriver forløbet således:

Forløbet er dokumenteret med en videoregistrering af hvad der foregik på skærmen samt den dialog som eleverne havde.

Videoen er selvfølgelig noget fragmentarisk, idet ingen ville kunne holde til at se på flere timers eksperimenteren, men der kan sikkert udledes meget af specielt den dialog som eleverne havde med hinanden.

Efter en kort introduktion af programmets funktion blev eleverne sat i gang med at afprøve opgaverne 1-3.

### Arbejdsforløbet

Introduktionen af programmet var kortfattet, måske for kort, og koncentrerede sig om en forklaring af:

for det første brugerfladen, mht. til menupunkternes funktioner, fx at man kan observere, eksperimentere og afprøve sin teori

for det andet programmets „grundfilosofi“ mht. til de skjulte forskrifter der ligger i programmet.

Eleverne fik forklaret:

- at der var tale om tre celler, a, b og c, samt en resultatcelle,
- at der er en sammenhæng mellem de tre celler og resultatcellen,
- at det ikke altid var alle tre celler som var med i den skjulte forskrift,
- at der er tale om en strengt matematisk forskrift, men at de ikke nødvendigvis opleves som værende matematiske.

Den første reaktion var total tavshed!

Det kan selvfølgelig skyldes lærernes dårlige instruktion. Set i lyset af det videre forløb vil vi dog tillade os at se bort fra denne mulighed.

Der var tilsyneladende tale om en blokering over for denne måde at tænke på. Det var oplagt at der skulle eksemplificeres. Et eksempel som ikke var hentet fra programmet, blev gennemgået på tavlen. Eksemplet var helt enkelt  $a + b$ .

Nu var reaktionen en ganske anden, nemlig: *Nå, er det ikke andet!*

Nu skulle eleverne så til at løse disse opgaver, og det var jo let nok troede de. Nu er det jo bare sådan med programmet, at ikke alle opgaverne er af samme type. Man kan ikke altid regne med at det er  $a + b + c$  som giver det rigtige resultat hver gang. Det var ikke desto mindre, helt tydeligt at netop dette var udgangspunktet for afprøvningen, men frustrationerne meldte sig ganske hurtigt. Det virkede jo ikke.

Efter ca. 5 minutters observationer og diskussioner af mulige løsninger, trådte vi lærere så til med nogle små hints om hvilke beregninger vi kunne se måtte være interessante at koncentrere sig om.

Resultatet udeblev da heller ikke. Der kom relativt hurtigt et korrekt svar. Eleverne var meget flinke til at holde resultaterne for sig selv, så alle kom igennem de samme problemer.

Det var bemærkelsesværdigt, at der ikke var en eneste elev som af sig selv gik til „Eksperimentér“. Om det skyldes at de ikke har anet deres levende råd mht. hvad det kunne dreje sig om, eller forglemelse af denne mulighed, ved vi ikke.

Vi gjorde nu opmærksom på at denne facilitet måske var ganske anvendelig, selvfølgelig med det resultat at de pligtopfyldende elever straks gik i gang med at eksperimentere med den næste opgave.

Det var også bemærkelsesværdigt at denne eksperimenteren virkede strukturløs, men den gav dog for enkelte elever det ønskede resultat.

Under afprøvningen fulgte vi to elever som vi mener er repræsentative for klassens gennemsnit.

Afprøvningen blev som sagt foretaget uden yderligere hjælp. Ved afslutningen af den første lektion var de to elever kørt en anelse fast i opgave 10, og det var vor opfattelse at her ville man blive stående hvis ikke der kom en smule hjælp.

Hjælpen udeblev imidlertid, idet vi havde sagt at man burde gå videre til den næste opgave for så senere at kunne returnere til den første opgave. Det kunne jo være at man lærte at tænke lidt mere kreativt efterhånden.

#### **4. Iagttagelser fra arbejdet med Indukto**

Det er en erfaring at elever der arbejder med Indukto hyppigst gør brug af aktiviteten *Observér*. Her kan de nøjes med at gøre iagttagelser, det er programmet der leverer alle de nødvendige data.

Ved *Eksperimentér* skal eleverne derimod være opfindsomme og ud-tænke de inddata som kan føre arbejdet videre. Og de skal gå systematisk frem hvis de vil have det optimale udbytte af eksperimenterne.

Iagttagelserne fra elevernes arbejde viser at muligheden for at udføre eksperimenter ikke udnyttes særligt godt. Der er adskillige elever som aldrig vælger denne facilitet i Indukto.

Endnu mere krævende er udarbejdelse og indlæggelse af egne opgaver i Indukto. Enkelte elever er meget optaget af denne aktivitet, og føler nærmest at de indlagte faste opgaver er tidsspilde. Men de fleste elever prøver ikke at udarbejde egne opgaver, eller de giver op efter et enkelt forsøg. Kreativitet i matematisk sammenhæng er åbenbart en opslidende beskæftigelse.

Med de mange skoler der samarbejder over datanet, ligger der imidlertid en oplagt mulighed for små elektroniske Indukto-konkurrencer skoleklasser imellem. Sådanne aktiviteter er endnu kun afprøvet i det små.

#### **En hypotese understøttes eller forkastes**

For elever der har arbejdet seriøst med Indukto, meldes om mange situationer med oplevelser af pludselig indsigt: „*At vi dog ikke kunne se det, reglen er selvfølgelig....*“

Ofte har indsigten været så overbevisende og „selvfølgelig“ for eleverne at de ikke har fundet det nødvendigt at gennemløbe *Kontrollér* for at få bekræftet deres formodning.

Her skal nævnes at Indukto indeholder adskillige eksempler på at der hurtigt kan opstilles en regel ud fra de første observationer, men en fortsat observering vil afsløre at der pludselig kommer „undtagelser“, og så må den første regel jo forkastes. Mange elever er derfor kommet ud for at deres første intuitive antagelse senere måtte revideres, og her kan en eller flere omgange af *Kontrollér* være det rette middel til at sikre mod forhastede slutninger.

Efter bedste videnskabsteoretiske model har eleverne derfor oplevet ved egne eksperimenter at en ny observation aldrig kan sikre at en opstillet formodning er sand. Hvis observationen er i overensstemmelse med den foreløbige antagelse om den ukendte regel, så vil eleverne opfatte det som en opmuntring fra programmet: *Vores formodning er støttet af den nye observation. Vi ser ud til at være på rette spor, måske vi nu tør prøve en Kontrol.*

Eleverne vil gerne efter en „god“ observation sige at nu er der en større chance for at deres formodning er rigtig. De véd godt at chancen for at formodningen er rigtig pludselig kan ændres til at være 0. De véd nemlig at blot én observation er nok til at vælte hele deres arbejde. Hvis observationen ikke stemmer med den opstillede regel, så er reglen forkert. Observationen har dermed ført til forkastelse af reglen, de må tænke om.

Ofte er arbejdet dog ikke spildt, selv om der dukker en observation op som fører til forkastelse af den opstillede formodning. Måske formodningen kan justeres så den også passer på det nye tilfælde. Man skal derfor ikke lade sig slå ud af en forkastet regel, men tværtimod anske situationen som et eksempel på at man kan lære af sine fejl.

### **Elevernes samarbejde**

Indukto giver anledning til megen faglig diskussion i den lille elevgruppe. Mange elever tænker højt, og de andre kan følge med undervejs og gribe ind med kommentarer. Nogle elever sidder tavse og grubler, og fyrer pludselig et forslag af. „*Hvordan kom du til det?*“ kan være spørgsmålet fra de andre, og så kommer den faglige drøftelse i gang igen.

Arbejdet med Indukto kan give perioder så tavse som det sjældent ses i en matematiktime. Der tænkes intenst, ideer vendes og drejes, og ingen spiller ud med det første forslag. Men så pludselig eksploderer det: i udråb, i bifald og protester. Og diskussionen bølger.

Indukto er et godt instrument til at vise de forskellige arbejdsformer hos eleverne. Nogle giver op når de første 5-6 observationer ikke giver dem en ide. „*Det er alt for svært, og det er kedeligt*“. Andre bliver ved og ved indtil de har et forslag til en løsning. Måske de gør brug af flere hundrede observationer, afbrudt af kortere serier med eksperimenter hvor de selv har styr på nogle af tallene. Der er hyppige eksempler på at elever har taget udskriften med de foretagne observationer med hjem for at kunne give problemet en ny runde der. Og næste dag er de kommet med forslag som så skal afprøves gennem en kontrol. Ikke sjældent er hele familien blevet inddraget i problemløsningen.

Arbejdet i smågrupper har i forbindelse med Indukto været meget givende. Der har ofte udfoldet sig en aktivitet som man kunne ønske sig i alt arbejde med de matematiske emner i skolen. Med diskussioner, med argumenter og modargumenter som inddrager de matematiske sagsforhold, og som viser at forståelse af faglige sammenhænge ikke behøver at være afhængig af skudsikre formuleringer.

Særligt spændende har det været at iagttage grupper med „blandet sammensætning“: Elever hvis styrke er de pludselige indfald, er sat sammen med elever der foretrækker de grundige og gennemtænkte overvejelser. Her kommer arbejdsform og temperament ud for sammenstød som kan give gnister. Men måske den slags konfrontationer er en gavnlig forberedelse til voksenlivets samarbejdsgrupper.

Det skal dog også nævnes at der er elever som foretrækker at arbejde alene med opgaverne i Indukto. De finder gruppearbejdet for stressende, det indeholder et skjult konkurrencemoment hvor det gælder om at være hurtig - såvel i tanke som i formulering. Og det passer dem bedre at kunne overveje i fred og ro, at kunne formulere i eget tempo og at vende og dreje forslag før de bliver udsat for kontrolafprøvning og for andres kritik.

Ikke sjældent har et sådant soloarbejde kunnet konkurrere i hastighed og effektivitet med elevgruppernes arbejde. Men kommunikationen om de faglige emner kommer jo i soloarbejderne til at foregå på et andet plan. Om dette læringsmæssigt betyder en forringelse, er et åbent spørgsmål.

Der er ikke i det foreløbige forsøg givet tilbagemeldinger om nævneværdige forskelle mellem drengegrupper og pigegruppers præstationer i arbejdet med opgaverne i Indukto. Kreativitet og opfindsomhed er ikke forbeholdt det ene køn.

Derimod meldes der om forskelle i *arbejdsmønsteret*: Pige grupper er tilbøjelige til at gøre brug af flere observationer, før de giver deres bud på den ukendte regel. Hvor drengegrupper undertiden kan gå direkte til Kontrol fra de indledende tre observationer, så ses dette sjældent hos pige grupper. Pigerne er mere forsigtige, og ønsker større sikkerhed for at deres foreløbige gæt er på rette spor. Og i kontrolfasen vil de ofte gøre brug af en ekstra kontrolrunde før de er tilfredse med deres resultat.

### Formulering af svarene

Elevgruppens formulering af deres bud på de ukendte regler kan give anledning til mange givende drøftelser.

En gruppe har arbejdet med følgende observationer:

9	8	6	9
4	6	5	8
9	7	1	9
6	9	5	12
4	4	8	4
7	7	8	7

Disse seks observationer giver ikke gruppen tilstrækkelig information til at de kan opstille en formodning om den ukendte regel.

Efter yderligere en snes observationer går de over til at gøre brug af eksperimenter. De når da til - efter ca. 30 minutters samlet arbejde - at deres formodning kan beskrives således:

*Hvis det første tal er større end det andet, så er svaret det første tal, ellers er svaret to gange det andet tal minus det første.*

Eller sagt i matematisk symbolik:

Hvis  $a > b$ :  $x = a$

ellers :  $x = 2b - a$

Denne regel afprøves derefter ved to kontrolomgange på i alt 10 datasæt, og den holder, alle ti svar er korrekte.

Gruppen føler dermed at opgaven er løst. De er imidlertid ikke så stolte af deres todelte regel. De vil gerne have den udformet lidt fikser, og de bruger derfor en del tid på en drøftelse af en sådan afpudsning.

Efter megen god diskussion af forskellige forslag og overvejelser over hvad det vil sige at to udtryk er identiske i matematisk forstand, kommer de frem til følgende formulering af reglen:

*Forskellen mellem de to første tal plus det andet tal.*

Til sidst udtrykker de det i matematisk notation:

$$|a - b| + b$$

Og de kan nu oven i købet redegøre matematisk for at de to opstillede regler altid giver identiske resultater.

*Et andet eksempel*

Elevgruppen indleder sit arbejde med følgende observationer:

2	6	9	1
8	7	1	2
2	2	2	1
6	4	5	1
1	2	3	4
3	9	1	2
8	2	1	3
7	3	8	1
1	5	1	2

Efter yderligere et halvt hundrede observationer konstaterer gruppen om den ukendte regel:

- (1) Resultaterne kan kun være 1, 2, 3 og 4
- (2) Det hyppigste resultat er 1
- (3) Resultatet 4 forekommer meget sjældent

De går nu i gang med systematiske eksperimenter for at undersøge hvornår hver enkelt af de fire mulige resultater forekommer.

Efter et langt og intenst arbejde opstiller de følgende regel som viser sig at holde ved gentagne kontroller:

*Hvis 1 ikke forekommer, så er svaret 1.*

*Hvis 1 forekommer, men ikke 2, så er svaret 2.*

*Hvis 1 og 2 forekommer, men ikke 3, så er svaret 3.*

*Hvis 1, 2 og 3 forekommer, så er svaret 4.*

De synes imidlertid at reglen er dybt utilfredsstillende, selv om deres lærer fremhæver at det afgørende er at den omfatter alle muligheder, og at den giver resultater som kan holde i en kontrol.

De arbejder videre med formuleringen, og en halv time senere fremlægger de - ikke uden stolthed - deres regel for læreren og for den øvrige klasse. Reglen for beregningen af svaret er nu udtrykt med tre ord! - Hvad er mon gruppens formulering?

### **Indukto og matematikkvalifikationer**

Adskillige iagttagelser viser at det ikke kun er de elever der er dygtige til matematik, som viser gode resultater i arbejdet med Indukto. Ofte vil elever som ellers ikke har hævdet sig i matematiktimerne, vise sig som stærke opgaveløsere i arbejdet med opgaverne i Indukto. Dette gælder især hvor der ikke er sat tidsgrænser for arbejdet.

Denne iagttagelse kunne være en ny bekræftelse af at tidsfaktoren er af afgørende betydning i elevernes beskæftigelse med læring af matematik. Med rigelig tid til rådighed vil flere elever kunne være med i forreste række i arbejdet med de matematiske emner.



Der er ikke i indsamlingen af iagttagelser af elevernes arbejde med Indukto bedt om oplysninger om de enkelte elevers matematikstandpunkt. Det er således på det foreliggende grundlag ikke muligt at opstille nogen statistik over sammenhængen mellem elevernes matematikkvalifikationer og deres præstationer i arbejdet med Indukto. Et bilde af en sådan sammenhæng sløres også af forsøgstilrettelæggelsen hvor eleverne frit kunne arbejde sammen i grupper.

Det ville være en spændende opgave at undersøge om talentfulde „Indukto-færdigheder“ hos elever på fx klassetrinnene 5-6 kunne give et fingerpeg om gode matematikpræstationer i det senere skoleforløb. Med andre ord: *Kan Indukto benyttes som et instrument til afsløring af evner for matematik?*

En mere overkommelig opgave ville det være at undersøge om beskæftigelsen med Indukto kan påvirke elevernes holdning til anvendelsen af induktive metoder i deres arbejde med problemløsning i matematikken. *Har de gennem Indukto fået en sådan fortrolighed med den induktive arbejdsform at de føler sig tiltrukket af den og ser den som en brugbar metode ved arbejdet med løsning af problemer?*

## **5. Heuristiske regler**

Når eleverne arbejder med Indukto, vil de hurtigt få behov for nogle metoder som kan benyttes til angrebet på de ukendte regler. Det er ikke tilfredsstillende for dem at skulle gætte ud i den blå luft, de ønsker nogle metoder der kan anvendes i arbejdet.

Sådanne metoder kan kun gives i form af *heuristiske regler*, dvs. regler som måske kan være til hjælp i arbejdet, men som ikke har en sådan karakter at de med sikkerhed kan siges at føre frem til en løsning. I nogle tilfælde vil de heuristiske regler give gevinst, i andre vil de ikke føre til det ønskede resultat. Anvisningerne er nærmest at opfatte som en slags „tommefingerregler“, de bygger på praktiske erfaringer og er et udtryk for „almen visdom“.

I Indukto er det første og vigtigste forslag der kan gives til læreren som ønsker at hjælpe eleverne i gang:

### ***Vis dem nogle eksempler!***

Tag nogle af de indledende opgaver i Indukto, eller lav nogle specialopgaver til brug for introduktionen, og find i åben diskussion med eleverne de ukendte regler der ligger bag. Disse eksempler vil give eleverne et klart indtryk af hvordan der arbejdes i Indukto, og de vil almindeligvis være et tilstrækkeligt grundlag for eleverne videre arbejde med lette opgaver.

Men på et tidspunkt melder der sig ofte et behov for en vejledning af mere systematiske art. Her er nogle heuristiske regler som læreren kan drøfte med eleverne:

1. Undersøg om reglens beregningsresultat har noget med *summen* af de givne tal at gøre: Er der en sammenhæng mellem resultatet og summen af de tre givne tal? Eller med summen af to af tallene, fx de to første eller de to mindste tal eller med det mindste og det største tal? - Afprøv de forskellige muligheder.

Undersøg også om der er en sammenhæng mellem resultatet og ét af tallene.

Med sammenhæng menes ikke at der er overensstemmelse, sammenhængen kan fx bestå i at beregningsresultatet er lig med det dobbelte af summen af de to største tal, eller at det er lig med 25 minus summen af de to mindste tal.

Undersøg på tilsvarende måde om *de andre regningsarter* kan tænkes at være inde i billedet. Er der en sammenhæng mellem beregningsresultatet og produktet af nogle af de givne tal?

Ved subtraktion kan der ikke være tale om beregninger som giver et negativt resultat (i hvert fald ikke i de opgaver der er fast indlagt i Indukto). Her kan man så fx undersøge om der er en sammenhæng mellem resultatet og forskellen mellem det største og det mindste tal, eller det største og det næststørste tal, osv.

Division kan være anvendt i beregningerne, men i så fald er der tale om division med afrunding eller afkortning til heltal, idet resultatet af beregningerne jo altid er et helt tal. Divisionsmulighederne er derfor i de fleste tilfælde hurtigt overskuet.

Vær opmærksom på at der kan være tale om en kombination af flere regningsarter, fx kan reglen bestå i at summen af de to første tal ganges med det sidste.

*2. Undersøg hvilke beregningsresultater der kan forekomme.* Dette er et forslag som ofte kan give et vigtigt fingerpeg om den ukendte regel, og i hver observationsfase bør eleverne vænne sig til at være opmærksomme på hvilke tal der forekommer som uddata fra den ukendte regel.

Hvis det fx viser sig at kun tallene 0, 1, 2 og 3 optræder som resultater, så kan der være tale om en beregning som gør brug af rest ved division med 4.

Forekommer der kun to tal som beregningsresultat, fx 0 og 1, så kan der være tale om en *ja/nej-regel*, som fx: Resultatet er 1 hvis summen af de tre tal er et primtal, ellers er resultatet 0.

*3. Lav eksperimenter.* Her kan eleverne selv styre to af de tre tal der skal indgå i beregningerne. Det er derfor her muligt at skyde genvej til afsløring af den ukendte regel. Det kan være en god heuristisk regel at benytte inddata hvor samme tal gentages, fx at indtaste to 4-taller (og så måske håbe på at programmet selv vælger et 4-tal på den tredje plads).

Inddata med små tal, fx to eller tre 1-taller, kan ofte give eleverne gode ideer med hensyn til den ukendte regel.

### **Heuristiske regler i stikord**

1. *Observér og fastlæg uddata-talmængden.*
2. *Afprøv de fire regningsarter og kombinationer.  
Afprøv regning med rest og ja/nej-regler.*
3. *Eksperimentér.*
4. *Brug dine erfaringer fra de opgaver du tidligere har arbejdet med.*

## **6. Induktivt arbejde i skolens matematik**

I 1990'ernes matematikundervisning indtager arbejdet med problemløsning en fremtrædende plads. Ved problemløsning forstås i denne sammenhæng ikke opgaveregning efter rutinemæssige procedurer, men derimod arbejdet med åbne problemsituationer som kræver kreativitet og anvendelse af nye og uprøvede fremgangsmåder.

Induktive metoder er velegnede til et sådant arbejde med problemer, og de induktive aspekter er da også et virksomt hjælpemiddel når eleverne i dagens matematikundervisning, hvor konstruktivisme er et pejlemærke, beskæftiger sig med at opbygge deres egne personlige udgaver af de matematiske begreber.

Induktivt arbejde i tilknytning til matematikundervisningen er ikke noget nyt. Gennem generationer har matematikpædagoger fremhævet en arbejdsform hvor eleverne undersøger og udforsker, hvor de opstiller antagelser og afprøver dem, hvor de gætter, tester, gætter på ny, tester igen,... Kort sagt: *Hvor de arbejder induktiv.*

En pioner med hensyn til en konstruktiv indførelse af den induktive arbejdsform i matematikken er den ungarsk-amerikanske matematiker George Polya, der gennem sine publikationer [2] har haft stor indflydelse på matematikundervisningens arbejde med problemløsning. I den lettilgængelige bog *How to Solve It* opstiller han heuristiske regler som kan benyttes i forbindelse med arbejdet med at løse problemer inden for den elementære matematik. Bogen er oversat til mange sprog.

Den amerikanske matematiklærersammenslutning *National Council of Teachers of Mathematics* har som programerklæring for matematikundervisningen i 1980'erne udsendt en årbog *Problem Solving in School Mathematics* [3]. I en snes artikler behandles her aspekter af skolens arbejde med problemløsning i matematikundervisningen. Bogen bygger i udstrakt grad på Polyas ideer.

Et andet værk der behandler nogle af de samme ideer under overskriften „opdagende læring“, er bogen *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* [4]. Her knyttes forbindelsen mellem antikkens pædagoger og matematikere og den moderne tids pædagogiske filosoffer.

En lettilgængelig fremstilling af tænkningens teori og praksis i forbindelse med problemløsning er givet i *Thinking, Problem Solving, Cognition* [5]. Et af bogens afsnit har underoverskriften „*Thinking as Hypothesis Testing*“, en metodik vi har omtalt i forbindelse med elevernes arbejde med opgaverne i Indukto.

I den danske matematikpædagogiske litteratur kan henvises til *Folkeskolens matematikundervisning* [6]. I afsnittet „*Almene synspunkter på matematikundervisningens tilrettelæggelse*“ behandles såvel induktive arbejdsformer som induktive undervisningsformer.

## Litteraturhenvisninger

- [1] Undervisningsvejledning for folkeskolen  
*Regning/matematik*  
Undervisningsministeriet 1976
- [2] George Polya  
*How To Solve It*  
Princeton University Press, 1945
- George Polya  
*Mathematics And Plausible Reasoning 1-2*  
Princeton University Press 1954
- George Polya  
*Mathematical Discovery*  
*On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*  
John Wiley & Sons, New York 1962
- [3] Krulik & Reys (edit)  
*Problem Solving in School Mathematics*  
National Council of Teachers of Mathematics, 1980
- [4] H. Winter  
*Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*  
Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1989
- [5] Richard E. Mayer  
*Thinking, Problem Solving, Cognition*  
W.H.Freeman and Company, New York, 1992
- [6] Bent Christiansen m.fl.  
*Folkeskolens matematikundervisning Et debatoplæg*  
Munksgaard 1973