Kalender

INFA Matematik - 2000

INFA-Matematik:
Informatik i matematikundervisningen

Et delprojekt under

INFA: Informatik i skolens fag
Et forskningsprogram på Danmarks Lærerhøjskole

Projektledelse:
Allan C. Malmberg
Inge B. Larsen

Distribution af programmer og tekster:
INFA, Danmarks Lærerhøjskole
Emdrupvej 115B, 2400 NV

*

Tekst: Allan C. Malmberg

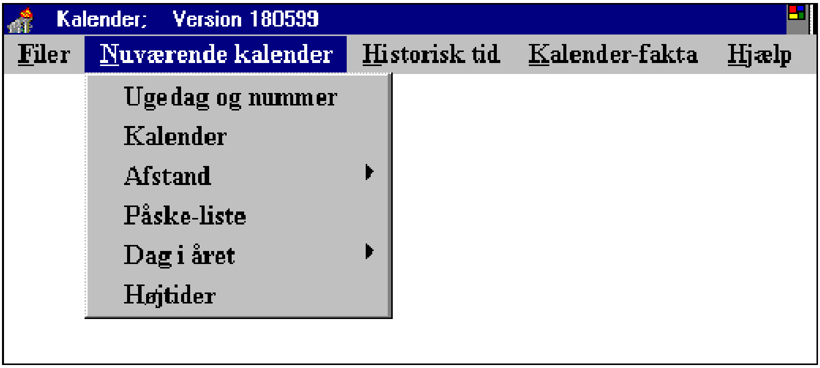
Layout: Leif Glud Holm

Kalender

Indholdsfortegnelse

1. Hvad Kalender kan

Programmet *Kalender* kan foretage en række beregninger der har med kalender-data at gøre:



1. For en given dag kan beregnes hvilken ugedag der er tale om, og hvilket nummer dagen har regnet fra den 1. januar år 1.

2. Programmet kan endvidere udskrive en kalender for et givet år.

3. Programmet kan beregne afstanden i dage mellem to givne datoer. Det kan endvidere regne et antal dage frem eller tilbage fra en given dato.

4. Programmet kan give en liste over påskesøndags placering i en periode af år.

5. Programmet kan sætte numre på dagene inden for et år, og det kan tælle et antal dage frem og tilbage.

6. Programmet kan give en liste over de bevægelige højtider inden for et givet år, såsom fastelavn, st. bededag, Kristi himmelfartsdag og pinse.

Programmet behandler to kalendertyper: den nuværende, dvs. *den gregorianske kalender* som er opkaldt efter pave Gregor 13., og den tidligere kalender, *den julianske kalender*, opkaldt efter den romerske kejser Julius Cæsar.

I 1582 gik de fleste katolske lande over til den gregorianske kalender. I Danmark skiftede vi til den gregorianske kalender i 1700. Nærmere oplysninger om de forskellige landes overgang til den gregorianske kalender er indlagt i *Kalender* under menupunktet *Kalender-fakta*

Afprøv de forskellige muligheder under *Nuværende kalender.* Find selv på nogle passende opgaver som du kan lade Kalender-programmet løse.

Gå derefter videre med de opgaver der er angivet her:

2. Opgaver til Kalender

Opgave 1

1. Beregn ved hjælp af *Kalender* ugedagen for dagen i dag

2. Beregn ugedagen for din fødselsdato

Opgave 2

Beregn ugedagen for følgende datoer:

5. august 1982

12. januar 1985

31. december 1999

Opgave 3

Beregn ugedagene for følgende datoer fra danmarkshistorien:

2. april 1801	5. juni 1849	10. februar 1920
9. april 1940	4. maj 1945	2. oktober 1972

Hvad skete der på disse datoer?

Opgave 4

Hvilken ugedag var den første dag i det 20. århundrede (1. januar 1901)?

Opgave 5

Hvilken ugedag var den 1. januar år 1?

Opgave 6

Hvilken ugedag var den 12. oktober 1492, den dag Columbus opdagede Amerika?

Opgave 7

Beregn ugedagene for følgende historiske datoer:

14. juli 1789:	Bastillens fald
18. juni 1815:	Slaget ved Waterloo
29. oktober 1929:	Det store børskrak
7. december 1941:	Pearl Harbor bombes
9. november 1989:	Berlinmurens fald

Opgave 8

Beregn hvor mange dage der er gået siden den dag du blev født .

Opgave 9

På hvilken dato har du 10000 dages fødselsdag?

Opgave 10

På hvilken data har du 25000 dages fødselsdag?

Opgave 11

Hvornår er det påskesøndag næste år?
Hvornår ligger påskeferien?

Opgave 12

Beregn hvornår det er påskesøndag i følgende år:

1801 1914 1962 2020

Opgave 13

Påsken kan tidligst falde den 22. marts. Det sker imidlertid meget sjældent at påsken falder så tidligt: Kun én gang i 1700-tallet og én gang i 1800-tallet. Find de to år.

Undersøg om der findes et år i 1900-tallet hvor påsken falder den 22. marts .

Opgave 14

Find det første år efter år 2000 hvor påsken falder den 22. marts.

Opgave 15

Påsken kan senest falde den 25. april. Det sker én gang i hver af de fire 100-års-perioder 1800-tallet, 1900-tallet, 2000-tallet og 2100-tallet. Find de fire årstal.

Opgave 16

Hvor mange dage er der i dag gået siden grundlovens fødselsdato den 5. juni 1849?

Opgave 17

Hvor mange dage er der i dag gået siden Danmark blev frit efter 2. verdenskrig, den 5. maj 1945?

Opgave 18

Kennedy var præsident i USA fra 20. januar 1961 til 22. november 1963. Hans præsidenttid omtales som ”Kennedys 1000 dage”. Hvor mange dage var det egentlig?

Opgave 19

Hvor mange dage er der i det 20. århundrede?
Og hvor mange i det 21. århundrede?

Opgave 20

Skiftet fra den julianske til den gregorianske kalender fandt i Danmark sted den 18. februar 1700, idet den efterfølgende dag blev noteret som den 1. marts. Beregn ugedagen for den 18. februar 1700 efter den julianske kalender, og beregn ugedagen for den 1. marts 1700 efter den gregorianske kalender.

Opgave 21

Udskriv en liste over påskens placering i en periode på 100 år. Brug din liste til at give svar på følgende spørgsmål:

1. I hvor mange af de 100 år falder påsken (dvs. påske-søndag) i marts?

2. Kan påsken falde i marts to år i træk?

3. Hvor tit sker det at der inden for tre år er påske i marts i to af de tre år?

4. Tag et år hvor påsken falder i marts. Hvor mange år kan der gå før påsken næste gang falder i marts: Kan der gå 3 år? 4 år? 5 år? 6 år? 7 år? Mere end 7 år?

5. Tag en periode på 10 år. I hvor mange af disse år kan påsken falde i marts?

Opgave 22

Biorytme-teorien arbejder med begrebet kritiske dage. En superkritisk dag indtræffer når en person er 21252 dage gammel (21252 = 23*28*33).

Find ved hjælp af *Kalender* hvornår din superkritiske dag indtræffer.

Hvornår er en person født når han har superkritisk dag den 1. januar 2000?

Opgave 23

Verdensrekorden i 100 meter løb for mænd har udviklet sig således siden 1921:

10.4 sek.	23. april 1921
10.3 sek.	9. august 1930
10.2 sek.	20. juni 1936
10.1 sek.	3. august 1956
10.0 sek.	21. juni 1960
9.95 sek.	14. oktober 1968
9.93 sek.	3. juli 1983
9.92 sek.	24. september 1988
9.90 sek.	14. juni 1991
9.86 sek.	25. august 1991
9.84 sek.	27. juli 1996
9.79 sek.	16. juni 1999

Undersøg hvor længe (hvor mange dage) de enkelte rekorder har holdt inden de blev overgået af en ny rekord.
Hvilken af rekorderne har holdt længst?

Baggrunden for kalender-beregningerne

3. Ugedagsberegning

En given dag kan beskrives ved tre tal:

D: dagens nummer i måneden
M: månedens nummer
Å: årstallet

For den 3. juni 1999 har vi: D=3, M=6, Å=1999.

Ugedagsberegningen for en forelagt dato foregår efter følgende formel:

$$U = D + \text{kvot}(13*M+8)_5 + Å + \text{kvot}(Å)_4 - \text{kvot}(Å)_{100} + \text{kvot}(Å)_{400}$$

Efter udregning af U findes resten R ved division af U med 7. Der gælder da :

R=0: dagen er en søndag
R=1: dagen er en mandag
R=2: dagen er en tirsdag
R=3: dagen er en onsdag
R=4: dagen er en torsdag
R=5: dagen er en fredag
R=6: dagen er en lørdag

I formlen til beregning af U indgår nogle elementære talregninger. Med betegnelsen

$$\text{kvot}(13*M+8)_5$$

angiver vi at der skal foretages en beregning som består i at vi udregner tallet 13*M + 8 og dette tal divideres med 5. Er fx M=6, så får vi: 13*M+8 = 78+8 = 86. Ved division med 5 får vi: 17.2. Vi er imidlertid kun interesseret i tallet foran decimaltegnet, så resultatet af $\text{kvot}(13*6+8)_5$ bliver 17. Betegnelsen kvot står for *kvotient*. I udtrykket $\text{kvot}(Å)_4$ skal vi finde kvotienten når årstallet divideres med 4. For Å=1999 får vi:

$$\text{kvot}(1999)_4 = 499$$

idet vi igen smider decimalerne væk.

Lad os foretage ugedagsberegningen for 3. juni 1999. Her får vi ved indsættelse i formlen:

$$U = 3 + 17 + 1999 + 499 - 19 + 4 = 2503$$

Ved division med 7 får vi en rest på 4. Den givne dato svarer altså til ugedagen torsdag.

Den anførte formel til beregning af ugedagen blev fremsat i 1880'erne af *Christian Zeller* der var en præst med interesse for kalenderproblemer og talteori. Formlen omtales som *Zellers formel*. Den er gyldig for enhver dato i den gregorianske kalender.

Ved anvendelse af Zellers formel skal der foretages en lille omskrivning hvis der er tale om datoer i januar og februar: Disse to måneder regnes som måned nr.13 og 14 i det foregående år. For datoen 3. februar 1999 skal vi derfor benytte følgende værdier for D, M og Å:

$$D = 3 \qquad M = 14 \qquad Å = 1998$$

Zeller-formlens rigtighed

Vi skal nu give et bevis for Zeller-formlens rigtighed. Beviset vil vi føre på følgende måde: Det konstateres først at formlen giver det korrekte resultat når den anvendes på en bestemt startdato, fx dagen for den gregorianske kalenders indførelse i Danmark, 1. marts 1700.

Dernæst viser vi at såfremt formlen giver det korrekte resultat for en bestemt dato (D,M,Å), så giver den også det korrekte resultat for de datoer der fremkommer når D, M eller Å forøges med værdien 1, altså for datoerne (D+1,M,Å), (D,M+1,Å) og (D,M,Å+1). Her selvfølgelig forudsat at D+1 og M+1 er tilladte værdier i datoangivelser.

Lad os antage at vi har eftervist at Zeller-formlen bevarer sin gyldighed ved disse tre typer af datoændringer, altså ved en forøgelse af D, M eller Å med værdien 1. Da bevarer den også sin gyldighed ved forøgelser med andre værdier end 1. Enhver forøgelse kan jo deles op i en række forøgelser hver bestående i en forøgelse med værdien 1. Men da må formlen give det korrekte resultat for enhver dato.

Vi ser til eksempel på datoen 5.maj 1945. Vi kan tænke i følgende baner: Med udgangspunkt i 1.marts 1700 foretager vi følgende ændringer i D, M og Å:

1. D forøges 4 gange med 1
   Formlen gælder da også for 5.marts 1700

2. M forøges 2 gange med 1
   Formlen gælder da også for 5.maj 1700

3. Å forøges 245 gange med 1.
   Formlen gælder da også for 5.maj 1945.

Det afgørende er altså at vi kan vise at Zeller-formlen bevarer sin gyldighed når D,M eller Å forøges med værdien 1.

I Zeller-formlen vil alene det første led ændre værdi når D ændres. En forøgelse af D med 1 vil også forøge værdien af U med 1. Har U fx værdien 2104, der svarer til torsdag, for datoen (D,M,Å) vil den have værdien 2105, fredag, for datoen (D+1,M,Å), altså netop det korrekte ugedagsresultat for den dag der følger efter (D,M,Å). Og har U fx værdien 2820 for datoen (D,M,Å), vil den have værdien 2821 for datoen (D+1,M,Å), svarende til ugedagsresultaterne lørdag og søndag. - Værdien af U „følger korrekt med" når D forøges med 1.

Vi ser nu på en ændring i værdien af M inden for det samme år, og her er sagen knap så enkel. I Zeller-formlen indgår M i udtrykket $kvot(13*M+8)_5$. Vi opstiller nu først en tabel over udtrykkets værdi for de mulige M-værdier, 3-14:

M	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$kvot(13*M+8)_5$	9	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38
Forøgelse		3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3

I tabellens nederste linie er anført hvor meget værdien af $kvot(13*M+8)_5$ er større end den foregående værdi. En overgang fra M=5 til M=6 forøger altså værdien af $kvot(13*M+8)_5$ med 3, dvs. U forøges med 3. Men ved at ændre M fra 5 til 6 ændrer vi jo datoen fra en dag i maj til den samme dag i juni, fx fra den 8.maj til den 8.juni. Herved tæller vi 31 dage frem, maj har jo 31 dage. U skal altså rettelig ændres med 31 ved overgangen fra 8.maj til 8.juni, men da vi senere tager rester ved division af U med 7, vil ændringen på 3 i værdien af U have samme virkning som ændringen på 31.

Zeller-formlen bevarer derfor sin gyldighed ved en overgang hvor M ændres fra 5 (maj) til 6 (juni). - På tilsvarende måde vises at fx en overgang fra 8.november til 8.december vil forøge værdien af $kvot(13*M+8)_5$, og dermed værdien af U, med 2. Hvilket har samme effekt som at øge U med 30, altså at tælle 30 dage frem fra den 8.november til den 8.december.

I tabellen kan vi kontrollere at $kvot(13*M+8)_5$ har sådanne værdier at U ved enhver ændring af M med 1 forøges med den korrekte værdi, 2 eller 3, alt efter om måned M har 30 eller 31 dage. (Da februar er den sidste måned i året, måned nr.14, bliver der ikke tale om ændringer hvor der skal tælles frem over månedsskiftet februar/marts).

Den lidt mystiske størrelse i Zeller-formlen, $kvot(13*M+8)_5$, har hermed fået sin forklaring. Det er en ren talteoretisk konstruktion som er afpasset sådan at den forøger U med den korrekte værdi når

M forøges med 1. (Og så skal den selvfølgelig have en sådan værdi for M=3 at Zeller-formlen stemmer for udgangsdatoen 1.marts 1700).

Til sidst ser vi på en ændring i værdien af Å. Vi skal her undersøge hvilken ændring Zeller-formlen giver i værdien af U når Å forøges med 1, altså når vi fra en given dato i år Å tæller frem til den samme dato i år Å+1. Hvis det år vi tæller frem til, er et år med 365 dage, skal værdien af U forøges med 365, eller hvad der er det samme: forøges med 1, idet 365 jo giver resten 1 ved division med 7. Er det år vi tæller frem til et skudår, skal U forøges med 2. - Her har vi fordel af den specielle indretning af året med februar som den sidste måned. Tæller vi nemlig frem fra ét år til det næste, er vi sikre på at skulle passere hen over månedsskiftet februar/marts. Vi passerer altså altid det sted hvor den eventuelle ekstra dag er placeret. Tæller vi frem til et almindeligt år, skal der altid tælles 365 dage frem. Og tæller vi frem til et skudår, skal der altid tælles 366 dage frem. Ved en startdato med Å=1983 (dvs. fra 1.3.1983 til 28.2.1984) skal der altså tælles 366 dage frem, ved en startdato med Å=1984 (dvs. fra 1.3.1984 til 28.2.1985) skal der kun tælles 365 dage frem.

I Zeller-formlen indgår Å i følgende udtryk:

$$(*) \quad Å + \text{kvot}(Å)_4 - \text{kvot}(Å)_{100} + \text{kvot}(Å)_{400}$$

Vi ser nu på fire tilfælde som dækker de forskellige situationer der indgår i reglen til bestemmelse af om et år er skudår eller almindeligt år.

Å = 1982 Å +1 = 1983
Der tælles 365 dage frem (Februar 1983 har 28 dage)

Å = 1983 Å + 1 = 1984
Der tælles 366 dage frem (Februar 1984 har 29 dage)

Å = 1899 Å + 1 = 1900
Der tælles 365 dage frem (Februar 1900 har 28 dage)

Å = 1999   Å + 1 = 2000

Der tælles 366 dage frem (Februar 2000 har 29 dage)

I skemaet nedenfor indføjer vi de ændringer der foregår i de enkelte led i udtrykket (*) når Å forøges med 1. Yderst til højre anfører vi den samlede ændring i (*).

	Å	+ $kvot(Å)_4$	- $kvot(Å)_{100}$	+ $kvot(Å)_{400}$	(*)
Å = 1982	+1	0	0	0	+1
Å = 1983	+1	+1	0	0	+2
Å = 1899	+1	+1	-1	0	+1
Å = 1999	+1	+1	-1	+1	+2

Af skemaet ser vi at forøgelsen i værdien af (*) netop bliver 1 i første og tredje situation og 2 i anden og fjerde situation. - Zeller-formlen ændrer altså U med den korrekte værdi når Å forøges med 1. Dermed er beviset for gyldigheden af Zeller-formlen ført.

Øvelse 1

Vis at følgende U-formel kan benyttes til bestemmelse af ugedagen for en dato i tidsrummet fra 1. marts 1900 til 28. februar 2100:

$$U = D + kvot(13*M+8)_5 + Å + kvot(Å)_4 + 6$$

Øvelse 2

Opstil en U-formel til beregning af ugedagen for 1. marts i år Å i den gregorianske kalender.

Øvelse 3

Vis at følgende U-formel kan benyttes til bestemmelse af ugedagen for 1. marts i årene 1900-2099:

$$U = 4 + å + kvot(å)_4 \quad \text{hvor } å = Å - 1900$$

Opstil en tilsvarende formel til bestemmelse af ugedagen for 1. januar i årene 1901-2100.

Øvelse 4

Den gregorianske kalender er ikke helt i trit med astronomien. Overensstemmelsen kunne gøres bedre hvis skudårsreglen blev udvidet med følgende bestemmelse:

> Når årstallet er deleligt med 4000, er året ikke skudår.

Hvilken ændring skulle der da foretages i Zeller-formlen?

4. Beregn ugedagen ved hovedregning

Her skal gives en enkel algoritme som sætter dig i stand til ved hovedregning at beregne ugedagen for enhver dato inden for tidsrummet 1900 - 2099.

Vi viser beregningen for datoen 28. juni 1999.

Der skal foretages en sammenlægning af fem tal: Et for dagen, et for måneden, og tre for årstallet.

Dagen: Her er der blot tale om dagens nummer i måneden: 28

Måned: De 12 måneder tildeles følgende talværdier:
1 4 4 – 0 2 5 – 0 3 6 – 1 4 6

Juni som er måned nr. 6 tildeles altså tallet 5.

Årstallet: For et årstal i 1900-tallet tildeles altid tallet 6.
Derefter tildeles yderligere tallet 99 for 1999.
Endelig tildeles tallet 24 som er det antal gange 4 går op i 99.

De fem tal er da: 28 + 5 + 6 + 99 + 24 = 162

Af dette tal tager vi resten ved division med 7: Det giver rest 1.

Efter den tidligere tabel svarer det til: Mandag.

De eneste tal der skal huskes i denne beregning, er tallene for månederne. Vi har opstillet dem på en sådan måde at de er lette at huske: Når vi grupperer dem tre ad gangen så fremkommer tre kvadrattal: 144, 025 og 036. De sidste tre tal danner et tal som er 2 større end det indledende 144.

Skudår: I skudår skal tallene for månederne januar og februar reduceres med 1, så her bliver tallene ikke 1 og 4, men 0 og 3.

2000-tallet: For årstal i 1900-tallet blev der lagt 6 til, for årstal i 2000-tallet skal der i stedet lægges 5 til.

Øvelse 5
Beregn ved hovedregning ugedagen for din fødselsdato. Og beregn ugedagen for dagen i dag.

5. Nummerering af dage

Vi belyser beregningerne med en formel som sætter numre på dagene i tidsrummet fra 1. marts 1900 og 200 år frem fra denne dag.

I beregningerne benyttes en formel som tildeler et nummer N til enhver dato (D,M,Å):

$$N = D + \text{kvot}(153*M-457)_5 + \text{kvot}((Å -1900)*1461)_4$$

Som udgangsdato for nummereringen anvendes 1. marts 1900 hvor N har værdien 1.

Månederne januar og februar opfattes som måned 13 og 14 i det foregående år.

I N-formlen indgår tre led. Det ene tæller dage, det andet omregner måneder til dage, det tredje omregner år til dage. Vi ser nærmere på de to led hvor år og måneder omregnes til dage.

Omregningen af hele år til dage foretages ved leddet $\text{kvot}((Å -1900)*1461)_4$. Inden for N-formlens gyldighedsområde (1900-2099) er hvert fjerde år skudår - uden undtagelser. Når der tælles frem gennem årene skal værdien af M altså for hver 4 år forøges tre gange med 365 og én gang med 366. Den samlede forøgelse over de 4 år er på 1461. - Men dette opnås netop ved leddet $\text{kvot}((Å -1900)*1461)_4$. For Å-værdierne 1901-1904 får vi:

Å	1900	1901	1902	1903	1904
$\text{kvot}((Å -1900)*1461)_4$	0	365	730	1095	1461
Forøgelse		365	365	365	366

Derefter gentages forøgelserne 365, 365, 365, 366 i hver efterfølgende fireårs-periode.

Omregningen af hele måneder foretages ved leddet kvot(153*M-457)$_5$ I dette udtryk udnyttes det forhold at året kan opdeles i to 5-måneders perioder med helt samme rækkefølge af 31-dages måneder,og 30-dages måneder:

Marts	31	dage	August	31	dage
April	30	dage	September	30	dage
Maj	31	dage	Oktober	31	dage
Juni	30	dage	November	30	dage
Juli	31	dage	December	31	dage
I alt	153	dage	I alt	153	dage

Ved omregningen af hele måneder kan de to 5-måneders perioder behandles ens: Første måned omregnes til 31 dage, anden måned til 30 dage, tredje måned til 31 dage osv. Et talteoretisk udtryk der kan klare denne omregning er:

kvot(153*M + k)$_5$

hvor k afpasses således: (1) De 153 dage fordeles korrekt over de 5 måneder.
(2) Udtrykket får den rigtige startværdi.

For en dato i marts skal der ikke medregnes nogen hele måneder i udtrykket for N. Udtrykket kvot(153*N+k)$_5$ skal altså i dette tilfælde have værdien 0. For M=3 har vi:

kvot(153*3+k)$_5$ = kvot(459+k)$_5$ = 0

Det betyder at 459+k må antage én af værdierne 0,1,2,3,4. Tallet k må altså antage én af værdierne -459, -458, -457, -456, -455.

For en dato i april skal hele marts måned medregnes i N-værdien. Når M har værdien 4, skal kvot(153*M+k)$_5$ derfor give resultatet 31. Ved indsættelse af M=4 får vi:

$\text{kvot}(153*4+k)_5 = \text{kvot}(612+k)_5 = 31$

Heraf har vi at 612+k må antage en af værdierne 155, 156, 157, 158, 159, dvs. k må antage en af værdierne -457, -456, -455, -454,-453.

For en dato i juli skal hele marts, april, maj og juni, i alt 122 dage, medregnes i N-formlen. Når M har værdien 7 skal $\text{kvot}(153*M+k)_5$ derfor give resultatet 122.

Ved indsættelse af M=7 får vi:

$\text{kvot}(153*7+k)_5 = \text{kvot}(1071+k)_5 = 122$

Heraf har vi at 1071+k må antage én af værdierne 610, 611, 612, 613, 614 dvs. k må antage en af værdierne -461, -460, -459, -458, -457.

Af disse eksempler fremgår at eneste mulige værdi for k er k = -457. Ved prøve kan vi sikre os at med denne k-værdi beregner

$\text{kvot}(153*M+k)_5$

det korrekte antal dage for alle M-værdier fra M=3 til M=14. At udtrykket også kan anvendes for M=14, altså til beregning af det samlede antal dage fra 1. marts til 31. januar, skyldes at den del af året (jan/feb.) der ligger uden for de to 5-måneders periode indledes på samme måde som de to perioder, nemlig med en 31-dages måned.

Hermed er vist at N-formlen er opbygget sådan at de tre led i formlen korrekt optæller antallet af dage der er forløbet fra (og med) udgangsdatoen 1. marts 1900 frem til (og med) datoen (D,M,Å). I beviset for formlens gyldighed er det en forudsætning at hvert fjerde år er skudår. Dette er som bekendt tilfældet for 200-års-perioden fra 1. marts 1900 frem til 28.februar 2100.

Hvis formlens gyldighedsområde skal udvides må der indføres korrektioner for de manglende skuddage i århundredeårene.

Øvelse 1

Gør rede for at følgende N*-formel kan benyttes til nummerering af dagene fra den gregorianske kalenders indførelse i Danmark, 1. marts 1700.

$$N^* = D + \text{kvot}(153 \cdot M - 457)_5 + \text{kvot}((Å - 1700) \cdot 1461)_4$$

$$- \text{kvot}(Å - 1700)_{100} + \text{kvot}(Å - 1600)_{400}$$

6. Påskeberegningen

Påskesøndag er fastsat som søndagen efter den første fuldmåne der falder på eller efter den 21. marts, den såkaldte forårsfuldmåne. Påskesøndag kan tidligst falde den 22. marts, *forårsfuldmånen* må da indtræffe lørdag den 21. marts. Og påskesøndag kan senest falde den 25.april. Dette sker når forårsfuldmånen indtræffer søndag den 18.april.

Det er sjældent at påskesøndag falder på en af de to yderdatoer 22. marts og 25. april. Omtrent én gang pr. århundrede sker det at påskesøndag er placeret den 25.april:1734, 1886, 1943, 2038, 2190. Og påskesøndage den 22.marts er endnu mere sjældne. Det forekom i 1761 og 1818, men derefter sker det først igen i 2285.

Bestemmelserne for påskesøndags placering i den gregorianske kalender blev oprindelig i 1582 (under pave Gregor XIII) givet ved en noget omstændelig samling af tabeller. Indholdet af disse tabeller har man senere søgt at omforme til simple beregningsformler. Den mest benyttede regel til beregning af påskens placering er givet i år 1800 af matematikeren C.F.Gauss. Hans beregning gør brug af en hovedregel hvortil der er knyttet to undtagelser. - Et undtagelsesfrit regelsæt blev fremsat (anonymt) i det videnskabelige tidsskrift *Nature* i 1876. Det er dette regelsæt som ligger til grund for påskeberegningen i *Kalender.*

Programmets beregningsmetode

Metoden til beregning af påskens beliggenhed kan gengives ved følgende opdeling i fire grupper af beregninger. Beregningerne kan se lidt voldsomme ud, men de vil let kunne programmeres på en computer eller en avanceret lommeregner.

I beregningerne benytter vi de to betegnelser *kvot* og *rest* til angivelse af henholdsvis kvotienten og resten ved division. Til eksempel:

$kvot(23)_5$ = kvotienten ved division af 23 med 5
$rest(23)_5$ = resten ved division af 23 med 5

De to tal er: $kvot(23)_5 = 4$ og $rest(23)_5 = 3$.

1. For et forelagt årstal bestemmer vi først to tal A og B. A er fastlagt ved de to første cifre i årstallet, B er fastlagt ved de to sidste cifre. Er årstallet til eksempel 1978, har vi: A=19 og B= 78.

2. Vi beregner nu fem talværdier C,D,E, F og G:

   $C = rest(5*A + B)_{19}$
   $D = kvot(A)_4$
   $E = rest(A)_4$
   $F = rest(B)_4$
   $G = kvot(B)_4$

   For A=19 og B=78 får vi: C=2, D=4, E=3, F=2 og G=19.

3. Herefter beregnes fire talværdier H,J,K og L:

   $H = kvot(8*A +13)_{25}$
   $J = rest(19*C + A – D – H +15)_{30}$
   $K = kvot(11*J + C)_{319}$
   $L = rest(2*E + 2*G + K +32 – F – J)_7$

   For årstallet 1978 får vi her: H=6, J=2, K=0, L=2.

4. Påskedag er da i det pågældende år placeret i måned nr. M på dag nr. N:

   $M = kvot(J – K +L +90)_{25}$
   $N = rest(J + L + M + 19 – K)_{32}$

   For 1978 får vi: M=3, N=26. Påskesøndag 1978 er altså den 26. marts.

Øvelse 1
Prøv at gennemføre påskeberegningen for i år.

Kommentarer
Vi skal ikke her give noget bevis for at programmets beregninger fører til det korrekte resultat, men vi vil kommentere nogle af de detaljer der indgår i påskeberegningen.

Beregningen benytter data for to himmellegemers bevægelser: Jordens og Månens. Jordens bevægelse omkring Solen er bestemmende for årets længde, og Månens bevægelse omkring Jorden er bestemmende for månefasernes skiften. Tiden mellem to på hinanden følgende nymåner, en *synodisk måned,* har en længde på ca. 29½ dage (mere nøjagtigt: 29,5305888 dage), men Månens bevægelse er ujævn, og den givne længde af den synodisk måned er en gennemsnitsværdi. Den virkelige tid mellem to nymåner kan afvige flere timer fra gennemsnitsværdien.

I påskeberegningen benytter man derfor ikke den egentlige måne, den astronomiske, men i stedet en slags standardiseret måne, *"en matematisk måne"*, som bevæger sig jævnt i sin bane. Den forårsfuldmåne der indgår i reglen til påskesøndags placering, er fuldmånen for den matematiske måne. Den kan afvige helt op til 2 døgn fra den astronomiske fuldmåne, og man vil i nogle år derfor kunne observere ved iagttagelse af fuldmånens indtræffen at påsken tilsyneladende er forkert placeret. Til eksempel kan nævnes at der i 1981 er astronomisk fuldmåne på 1. påskedag hvilket er i strid med reglerne for påskens placering. Men beregninger viser da også at den matematiske fuldmåne indtræffer dagen før den astronomiske fuldmåne.

Grundlæggende for påskeberegningen er samspillet mellem kalenderårets længde og længden af den synodiske måned. Og her gælder at månefaserne gentager sig med 19 års mellemrum, en kendsgerning der allerede var kendt flere tusinde år før vor tidsregnings begyndelse. Det viser sig nemlig at 19 kalenderår, bestående af 19x365,25 dage, er meget nær ved at være identisk med 235 synodiske måneder. Forskellen beløber sig til knap 1½ time. Efter 19 år vil datoerne for månens faser derfor gentage sig, og med 19 års mellemrum vil forårsfuldmånen indtræffe på samme dato.

Det er denne 19 års cyklus der blev benyttet i den julianske kalender til fastlæggelse af påsken. Ved hjælp af den kunne man for et vilkårligt år beregne månens „alder“ pr. 1. marts, dvs. antallet af dage der den 1. marts er forløbet siden den forudgående nymåne. Derefter var det let at finde datoen for forårsfuldmånen og for påskesøndag. - I den gregorianske kalender er imidlertid føjet nogle korrektioner til denne cyklus: (1) En korrektion for de manglende skuddage i de år som er skudår efter den julianske kalender, men ikke efter den gregorianske. (2) En korrektion for den manglende fuldstændige overensstemmelse mellem 19 kalenderår og 235 synodiske måneder.

Den første korrektion giver sig udslag i at månens alder pr. 1. marts *reduceres* 1 dag i de århundrede-år der ikke er skudår, altså i 1800, 1900, 2100, osv. Den anden korrektion foretages ved at månens alder *forøges* med 1 dag pr. ca. 310 år. Af praktiske grunde sker reguleringen i århundrede-årene: 7 gange med 300 års mellemrum og dernæst 1 gang 400 år senere. Herefter igen 7 gange med 300 års mellemrum osv. Den første ændring sker år 1800, den næste altså år 2100.

Epakten

Månens "alder" pr. 1. marts kaldes *epakten* for det pågældende år. Epakten kan antage værdierne 0-29. Hvis epakten for et år fx er 25, betyder det at der den 1. marts er forløbet 25 dage siden den forudgående nymåne. Den næste nymåne vil da falde på den 6. marts hvor månens alder er 30 dage. Hvis epakten for et år er E, vil der være matematisk nymåne den (31-E). marts, og fuldmåne 13 dage senere. (Ikke 15 dage senere som ville svare til en halv synodisk måned, men kun 13 da epakt-nymånen efter gammel tradition er fastlagt til at falde 1-2 dage efter den egentlige nymåne, nemlig når det første tynde segl af den nye måne er synligt).

De to omtalte korrektioner har følgende indvirkning på epakten for årene 1800-2300:

År:	1800	1900	2000	2100	2200	2300
1.korrektion	-1	-1	0	-1	-1	-1
2.korrektion	+1	0	0	+1	0	0
Epakt-korrektion ialt	0	-1	-1	-1	-2	-3

Med udgangspunkt i epakt-korrektionen for år 1800 er i nederste linie anført den samlede epakt-korrektion for årene 1900-2399. Det ses at der i 1900 foretages en justering, men at der derefter først foretages en ny justering i epakten i år 2200, da korrektionerne i 2100 ophæver hinanden. Vi er altså for tiden (1999) i det første af tre århundreder med konstant epaktkorrektion.

Beregningen af påskens placering i et givet år kan foretages efter følgende plan:

(1) Epakten for det pågældende år beregnes

(2) Datoen for forårsfuldmånens indtræffen bestemmes

(3) Påskesøndags placering fastlægges

Beregning af Epakten

Epakten E for året A beregnes ved hjælp af formlen:

$$E = \text{rest}(11*r + k)_{30}$$

hvor $r = \text{rest}(Å)_{19}$ og hvor k er epakt-korrektionen anført i tabellen ovenfor. - For 1981 har vi: $r = \text{rest}(1981)_{19} = 5$. Epakten for 1981 er da: $E = \text{rest}(11*5 - 1)_{30} = 24$. Der er altså nymåne den (31-24).marts, dvs. den 7. marts, og fuldmåne 13 dage senere, den 20. marts. Dette er imidlertid ikke forårsfuldmånen som jo pr. definition indtræffer fra (og med) den 21. marts. Så først den efterfølgende fuldmåne er forårsfuldmånen.

Forårsfuldmånen
Ved fastlæggelsen af datoen for forårsfuldmånen kan vi, som vist i eksemplet ovenfor, komme ud for at skulle tælle en måneperiode frem. Da en synodisk måned er på ca. 29½ dag, må vi derfor i nogle situationer tælle 29 dage frem fra en fuldmåne (eller nymåne) til den næste, og i andre situationer tælle 30 dage frem. Den matematiske månes bevægelse er fastsat ved følgende regler:

Nymåne i dagene 1.-5. marts	: Næste nymåne 30 dage senere
Nymåne den 6. marts	: Næste nymåne 30 dage senere når $r<11$
	: 29 dage senere når $r>10$
Nymåne den 7.-31. marts	: Næste nymåne 29 dage senere

Fuldmånen indtræffer altid 13 dage efter nymånen.

Vi kan nu igen se på 1981 hvor nymånen blev beregnet til at indtræffe den 7. marts Af det opstillede skema ser vi at næste nymåne indtræffer 29 dage senere, dvs. den 5. april. Forårsfuldmånen falder da dette år den 18. april.

Påskesøndags placering
Når datoen for forårsfuldmånens indtræffen er fastlagt, kan den hertil svarende ugedag bestemmes ved hjælp af U-formlen i afsnittet om ugedagsberegning. Derefter placeres påskesøndag på den første søndag *efter* forårsfuldmånens indtræffen. Falder forårsfuldmånen på en søndag, placeres påskesøndag på den efterfølgende søndag. I eksemplet blev datoen for forårsfuldmånen i 1981 bestemt til den 18. april. Denne dato svarer til en lørdag. Påskesøndag 1981 er altså den 19. april.

Øvelse 2
I skemaet over næste nymånes indtræffen indtager den 6. marts en særlig rolle. Denne dag vil indgå i beregningerne når epakten for året er 25. Foretag (som ovenfor) beregningen af påske-søndags placering i 1954 og i 1886.

Nogle bemærkninger til programmets beregningsmetode
I den beregningsmetode der benyttes i *Kalender*, vil de oven-nævnte delberegninger kunne genfindes, om end i en lidt anden udformning. Her er nogle kommentarer til de tal der fører frem til de ønskede værdier M og N*:*

A og B
Disse er blot indført for „at slå årstallet Å i stykker". Det ses at Å=100*A+B.

C
Af omskrivningen C = $\text{rest}(5*A+B)_{19}$ = $\text{rest}(5*A+95A+B)_{19}$ = $\text{rest}(100*A+B)_{19}$ ses at C er identisk med den ovenfor indførte værdi r. Tallet C+1, og altså r+1, betegnes i astronomien som *gyldentallet* for det pågældende år. I den julianske kalender blev påsken fastlagt ud fra gyldentallet.

D,E,F,G
Benyttes ved bestemmelse af de korrektioner der må foretages i forbindelse med skudårsreglen, såvel ved ugedagsberegning som ved epakt-korrektion (1. korrektion).

H
H sørger for den epakt-korrektion der skyldes månen (2. korrek-tion). H forøges med 1 når A når frem til 18, 21, 24 osv., og har konstant værdi for de mellemliggende værdier. Efter syv spring som hver gælder for tre på hinanden følgende A-værdier, følger et spring som gælder for fire A-værdier (.39, 40, 41 og 42).

J
Svarer til epakten. Af regnetekniske grunde er J ikke identisk med

epakten, men epakten fås som 23-J eller 53-J, alt efter hvilken af de to værdier der ligger i intervallet 0-29.

K
Sørger for en korrekt behandling af de to 6. marts-tilfælde. Når epakten er 25 dvs. J=28, og C>10, får K værdien 1. Når J=28 og C<11, får K værdien 0.

L
Her beregnes forårsfuldmånens indtræffen i forhold til den efterfølgende søndag. L+1 angiver antallet af dage fra forårsfuldmånen til påskesøndag. Datoen for forårsfuldmånen fås af udtrykkene for M og N når der her indsættes -1 som værdi for L.

Øvelse 3
Bestem datoen for forårsfuldmånens indtræffen i 1978.

Litteratur

Kalender-matematik er behandlet i:

[1l H.P.Rogosinski:
The Perpetual Calendar
Math. Spectrum 1972, s.42-46

[2] Uspensky & Heaslet:
Elementary Number Theory. Appendix A, s. 206-221
Mc Graw-Hill, 1939

[3] T.H.O'Beirne:
Puzzles and Paradoxes §10: *Ten Divisions Lead to* Easter
Oxford University Press, 1965.

[4] H.Zemanek:
Bekanntes und Unbekanntes *aus* der Kalenderwissen-schaft.
Oldenbourg, 1978

[5] S.Deschauer:
Funktionen und Algorithmen im Julianschen und Gregori-anschen Kalender
Der Mathematikunterricht 1987, nr. 6, s. 55-63

[6] H. Bachmann: Kalenderarithmetik
Juris, Zürich 1984

[7] E.G.Richardts: Mapping Time The Calendar and its History
Oxford University Press, 1998

Megen værdifuld kalenderinformation kan i øvrigt findes i:

R.W.Bauer:
Calender for Aarene fra 601 til 2200 efter Christi Fødsel
Kjøbenhavn 1868. Genoptrykt 1961 ved Dansk historisk Fællesforening.