Allan C. Malmberg

LÆR OM CHANCER!

Sanne og Malene går på opdagelse med computeren

© INFA 2005

Forord

Denne INFA-publikation giver en indføring i arbejdet med begreber fra sandsynlighedernes verden. Den henvender sig til elever på klassetrinnene 6 -10, og den lægger op til at arbejdet med de faglige emner foregår under udstrakt inddragelse af computeren.Fremstillingen knytter sig til anvendelsen af to af INFAs programmer inden for området Chancelære: LOD og KUGLE123. Disse programmer vil være velkendte for de skoler der er medlem af INFA-Klubben.

Bogen er bygget op over Sanne og Malenes arbejde med chancer. Undervejs diskuteres de faglige metoder som de to piger bliver fortrolige med, og der gøres overvejelser over de faglige udfordringer og oplevelser som er at hente i chancelærens verden.

En fagdidaktisk baggrund for arbejdet med sandsynlighed i skolen er givet i INFA-publikationen (INFA 2002):

CHANCE Et it-læremiljø

I denne publikation sættes arbejdet med de to programmer ind i en nærmere faglig og pædagogisk sammenhæng.

INFA, 2005

Allan C. Malmberg

På opdagelse med LOD

1. Fødselsdage 5
2. Mere om fødselsdage 12
    Er det sund fornuft? 15
3. Bilnumre og chancer 17
    Sanne og Malenes arbejdsplan 22
4. Et spil med terninger 23
5. Nabotal i Lotto 26
    Gevinster i Lotto 30
6. Hvor stor bliver gevinsten? 32
7. Et besøg i Chanceland 35
8. Et spil med mønter 38
9. Mystiske mønstre 41
10. Er det tilfældigt? 46
Kommentarer til arbejdet med LOD 49

På opdagelse med KUGLE 123

KUGLE 1

1. En kuglemodel 51
2. Sumtabellen er et godt værktøj 56
3. Programmets ti knapper 58
4. Sanne og Malene opstiller en kuglemodel 61
5. Hvilken kuglemodel skal bruges? 63
6. Usikkerhedsintervaller 69
7. Statistik-knappen 71
8. Løs opgaver med KUGLE 1 74

KUGLE 2

1. Sanne og Malene bruger KUGLE 2 78
2. Hvor svært er det at slå en ener? 85
3. Løs opgaver med KUGLE 2 89
4. Sjældne hændelser 95
5. Opgaver i sjældne hændelser 100
6. Kommer ulykker ofte tre ad gangen? 104

KUGLE 3

1. Modellen KUGLE 3 108
2. Et lotteri 114
3. En bogklub 116
4. Løs opgaver med KUGLE 3 120

1. Fødselsdage

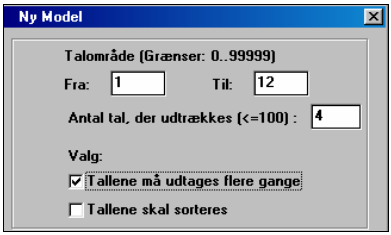
De 24 elever i Malenes klasse arbejder sammen i seks firemandsgrupper. I Malenes gruppe opdager man at to af deltagerne har fødselsdag i samme måned. Det viser sig at der også i en af de andre grupper findes to deltagere der har fødselsdag i samme måned. Er det mon et mærkeligt træf, eller er det noget der bør ske efter "tilfældighedens lov"?

Malene og hendes kammerater vil undersøge situationen ved hjælp af lodtrækning. De vil ved lodtrækning fordele 4 fødselsdage tilfældigt på årets 12 måneder, og så vil de undersøge hvor tit det sker at der er to fødselsdage der falder i samme måned.

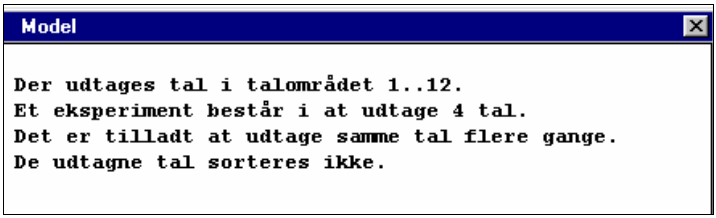
De bruger LOD
I arbejdet bruger de edb-programmet LOD som kan udtrække tilfældige tal. Du kan forestille dig at LOD foretager en lodtrækning mellem de forelagte tal. Hvis vi udfører den samme lodtrækning flere gange, vil vi få forskellige resultater.

Men hvis vi udfører et stort antal af lodtrækninger, kan vi måske alligevel få nogle vigtige oplysninger.

Vi ser nu på hvordan Malene og hendes gruppe kan gøre brug af LOD.



De går ind i LOD og vælger *Ny model.* De fortæller derefter at der arbejdes med tal i området fra 1 til 12, det svarer jo til de 12 måneder i året. Endvidere fortæller de LOD at der skal udtrækkes 4 tal. De fortæller også at samme tal kan udtages flere gange. Man siger at udtrækningen foregår *"med tilbagelægning*". Forestil dig at vi udtrækker sedler fra en æske. Når en seddel med et tal er udtrukket, lægges den tilbage i æsken således at den har mulighed for at blive udtrukket igen.



Programmet svarer nu med at gengive den model de har valgt. De kan her kontrollere at det er den model de havde tænkt at arbejde med.

De vælger nu menupunktet *Kørsel*. Programmet spørger hvor mange eksperimenter de vil have udført, og de vælger i første omgang blot at få kørt 5 eksperimenter.

Her er resultaterne fra kørslen af de 5 eksperimenter:

1. eksperiment:	3	7	6	8
2. eksperiment:	4	3	10	10
3. eksperiment:	8	6	1	6
4. eksperiment:	5	9	5	5
5. eksperiment:	6	5	11	10

I det første eksperiment er der udtaget fire forskellige tal, dvs. der er udtaget fire forskellige måneder. I den første elevgruppe er der altså ikke to der har fødselsdag i samme måned.

I eksperiment 2, 3 og 4 forekommer der to ens tal. I hver af de tre grupper er der to elever med fødselsdag i samme måned.

I eksperiment 5 er der igen fire forskellige tal.

I 3 ud af de 5 elevgrupper er der altså to elever der har fødselsdag i samme måned. 3 ud af 5 svarer til 60%. I 60% af tilfældene ser de at der i gruppen er to elever med fødselsdag i samme måned.

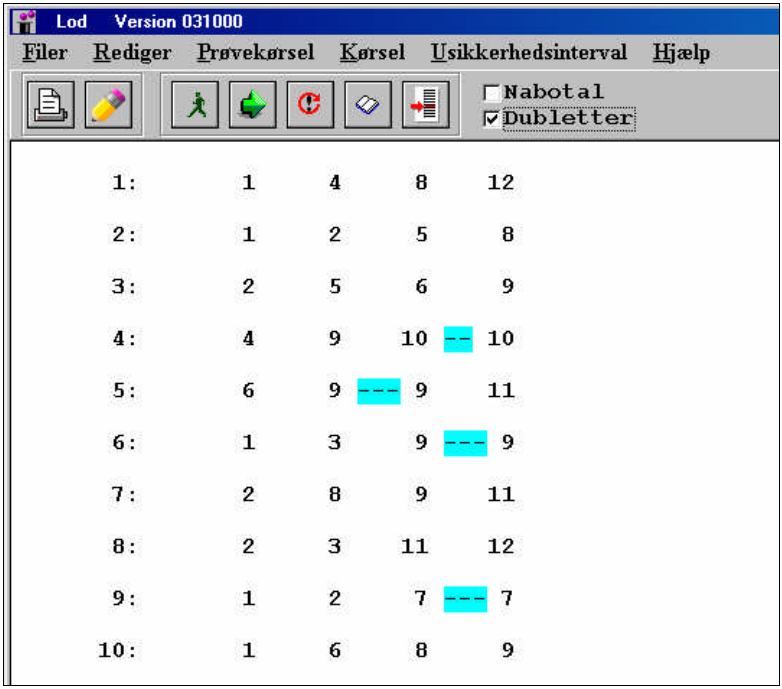
Men heraf kan Malene og hendes kammerater selvfølgelig ikke give noget særligt solidt bud på hvad den ukendte chance er for at der vil være to elever med fødselsdag i samme måned. Der må et større materiale til.

LOD hjælper ved optællingen
I programmet er indbygget en hjælp til optællingen af de interessante tilfælde. Det vil vi vise ved et eksempel hvor der køres 10 eksperimenter.

Øverst i menuen findes to felter hvor der kan afmærkes at der søges efter *Nabotal* eller at der søges efter *Dubletter*.

Malenes gruppe er interesseret i at finde dubletter, dvs. at samme tal forekommer flere gange. Først går de ind i Ny model og beder om at tallene sorteres efter størrelse. Det er en betingelse for at programmet kan hjælpe dem med optællingen. De klikker derefter i feltet for dubletter.

Her følger så resultatet af kørslen af 10 eksperimenter:



På skærmen kan vi tydeligt se hvor samme tal forekommer flere gange. Det sker i eksperiment nr. 4, nr. 5, nr. 6 og nr. 9.

Fire af de 10 eksperimenter giver altså dubletter. Det vil sige at de har fået dubletter i 40% af eksperimenterne. Før fik de det i 60%. Der må nok et større materiale til, før de kan udtale sig lidt mere sikkert om den ukendte chance.

Programmets knapper

Inden du selv går i gang med at bruge LOD, skal vi kort kommentere de knapper du finder øverst på skærmen. Der er i alt 7 knapper.

De to første knapper har med udprintningen at gøre. Første knap aktiverer printeren og du får udskrevet dine resultater. Anden knap giver dig mulighed for at du kan indtaste dit navn, så du kan finde din udskrift hvis den kommer ud på en fælles printer i din klasse.

De fire næste knapper kan benyttes når du skal køre en model. Den første giver dig mulighed for at sætte en kørsel i gang.

Den næste knap kan bruges når du vil fortsætte en kørsel, hvis du fx har kørt 100 eksperimenter, men gerne vil udvide med yderligere 400 eksperimenter.

Den tredje knap giver dig mulighed for at gentage en kørsel. Hvis du lige har kørt 100 eksperimenter, så kan du ved et tryk på denne knap køre 100 nye eksperimenter. Du får altså nye resultater, det er kun antallet af eksperimenter der gentages.

Den sidste af de fire knapper lader dig se den model du har indtastet. Hvis du kommer i tvivl undervejs, kan du blot klikke på denne knap der viser en åben bog.

Den sidste knap kan du bruge når du skal give inddata til en ny model. Altså når du skal fortælle hvilke tal der kan udtrækkes, og om der er tale om at samme tal kan udtrækkes flere gange.

Prøv selv

1. Gå ind i LOD. Fastlæg modellen som før, men husk at bede om at tallene sorteres.

   Klik på feltet for Dubletter. Kør 20 eksperimenter med LOD og tæl op hvor mange af de 20 elevgrupper der indeholder to elever med fødselsdag i samme måned. Hvad er nu dit bud på den ukendte chance?

2. Kør yderligere 30 eksperimenter og lav en samlet optælling for alle 50 eksperimenter.

   Giv igen et bud på chancen for at der i en firemandsgruppe er to med fødselsdag i samme måned.

   Var det en overraskelse at der i Malenes klasse var to grupper hvor der var elever med fødselsdag i samme måned?

3. **Femmandsgrupper**. Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen er for at der i en femmandsgruppe er elever med fødselsdag i samme måned. Kør fem eksperimenter. Gæt på hvad chancen er. Kør derefter 50 eksperimenter.

4. **Ugedage**. Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen er for at der blandt tre tilfældige elever er to der er født på samme *ugedag*. Gæt på chancen før du bruger LOD.

5. **Stjernetegn**. Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen er for at der blandt seks tilfældigt udvalgte personer er to der har fødselsdag i samme stjernetegn (der er 12 stjernetegn).

6. Indbrud. På skolerne i en kommune forekommer der 8 indbrud i løbet af skoleårets 40 uger. To af indbruddene indtræffer i samme uge. Tyder det på at der er en sammenhæng mellem de to indbrud, eller kan det være rent tilfældigt at der er to indbrud i samme uge. Undersøg sagen ved hjælp af LOD.

7. Parkeringsbøder. Et transportfirma får 6 parkeringsbøder i løbet af 20 arbejdsdage. To af bøderne falder på samme dag. Er der grund til at tro at bøderne ikke er tilfældig fordelt?

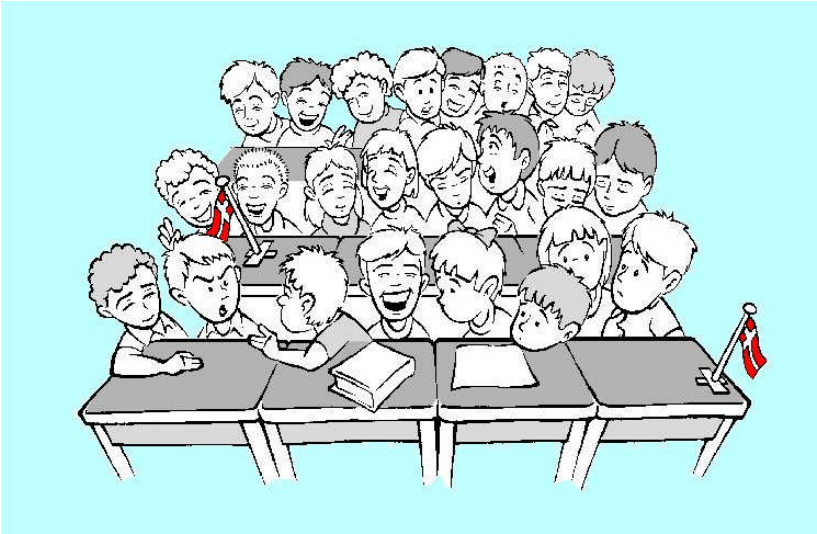
8. Uheld under idræt. I løbet af 100 skoledage forekommer der 12 uheld som kræver lægebehandling. To af uheldene forekommer samme dag. Er der grund til at tro at uheldene ikke er tilfældig fordelt?

Lav jeres egen opgave

Slå dig sammen med en eller to kammerater og lav en chance-opgave som kan løses ved hjælp af LOD.

Giv jeres egen løsning til opgaven, og lad derefter nogle kammerater prøve at løse opgaven.

2. Mere om fødselsdage



Der er mere fødselsdags-mystik i Malenes klasse. Det viser sig nemlig at der blandt de 24 elever i klassen er to der har fødselsdag den *samme dag*.

Klassen synes det er et mærkeligt tilfælde. Der er dog 365 dage i året, og der er kun 24 elever i klassen. Men da læreren kan fortælle dem at der også i parallelklassen findes to elever der har fødselsdag på samme dag, stiger mystikken.

De vælger nu at undersøge sagen nærmere ved hjælp af LOD.

De lader LOD udtage 24 tal fra området 1 til 365. Hvert af de 365 tal svarer til en dag i året, fra 1. januar til 31. december. De ser væk fra skudår. Tallet 1 svarer derfor til 1. januar, tallet 2 til 2. januar, osv. Tallet 365 svarer til 31. december.

De går ind i LOD og vælger *Ny model*. Her indtaster de området fra 1 til 365, og de melder at der skal udtages 24 tal. Udtagelsen skal være *med* tilbagelægning.

De vælger også at lade programmet sortere tallene:

Her er resultatet af en *Prøvekørsel*. Følgende 24 tal blev udtaget:

10 21 27 39 80 105 123 143 144 158
185 191 193 194 239 -- 239 288 292 302 303
322 348 351 363

Vi kan se at programmet har sorteret tallene, de er opstillet i rækkefølge efter deres størrelse.

Vi kan også se at der er et tal der forekommer to gange, nemlig tallet 239. I klassen findes altså to elever der har fødselsdag på samme dag. Prøv at udregne hvilken dag i året der har nr. 239.

Nu kan et enkelt eksperiment jo ikke fortælle Malene og hendes klassekammerater meget om den ukendte chance. De må udføre nogle flere eksperimenter.

Det kan du hjælpe dem med:

Prøv selv

1. Lad LOD køre 10 eksperimenter. Husk at klikke på *Dubletter* inden du sætter kørslen i gang. Undersøg hvor mange af de 10 klasser der har elever med fødselsdag på samme dag. Giv et bud på den ukendte chance for at der i en klasse med 24 elever findes elever der har fødselsdag på samme dag.

2. Prøv med nogle flere eksperimenter. Du kan måske slå dig sammen med en kammerat så I tilsammen udfører 100 eksperimenter. Giv jeres bud på den ukendte chance.

   Overvej om Malene og hendes kammerater burde være overrasket over at der i deres klasse var to elever med fødselsdag på samme dag.

3. **Andre klasser**. Hvad er mon chancen for to elever med fødselsdag den samme dag i klasser med 12 elever?
   Og i klasser med 28 elever?
   Gæt på chancen inden du kører LOD.

4. **Et rejseselskab**. En rejseleder rejser med et selskab på 40 personer. Han tilbyder sin assistent et væddemål: Hvis der i selskabet findes to personer med fødselsdag samme dag, skal du give mig 500 kr. Til gengæld får du 1000 kr. af mig hvis der ikke findes to personer med fødselsdag samme dag. Skal assistenten modtage væddemålet?
   Afgør det ved brug af LOD.

Er det sund fornuft?
Malene diskuterer sine resultater fra brugen af LOD med sin storesøster Sanne. Malene synes det er mystisk at der er så stor en chance for dobbeltfødselsdage som LOD viser. Og det passer slet ikke med den "sunde fornuft".

Sanne og Malene bliver enige om at de vil prøve med forskellige klassestørrelser fra 10 og op til 20 og på denne måde få et billede af hvad chancen er for dobbeltfødselsdag.. Her er nogle af deres resultater:

10 elever: 12% 15 elever: 25% 20 elever: 41%

De er igen overraskede over at chancerne er så store, men de er også enige om at de jo ikke har megen erfaring med at vurdere chancer i den slags situationer.

Sanne peger på at man slet ikke kan tænke som man plejer i matematik: Dobbelt så mange elever giver ikke dobbelt så stor chance. Som det kan ses af deres resultater, er chancen for dobbeltfødseldag i en klasse med 20 elever mere end tre gange så stor som i en klasse med 10 elever. Og allerede ved 15 elever er chancen for dobbeltfødselsdag dobbelt så stor som ved 10 elever.

Sanne fortæller at man godt kan *beregne* chancen for dobbeltfødselsdage, med en god lommeregner kan det klares med et par indtastninger. Når det drejer sig om en klasse på 24 elever, fortæller Sanne, vil chancen kunne beregnes til at være lidt under 54%.

Tænk før du går i gang!
I opgaver med chancesituationer er det vigtigt at du tænker over de resultater du opnår: Er det en overraskende stor eller

lille chance du er nået til? Eller er resultatet nogenlunde som du havde forventet det?

Det vil være en god idé om du vænner dig til at give et gæt på de ukendte chancer inden du går i gang med eksperimenter. Når du har indsamlet dine data og givet dit svar på det forelagte problem, bør du sammenligne med dit start-gæt. Måske du kan lave en lille gættekonkurrence med nogle af dine kammerater. På den måde kan I afprøve hvor god jeres chancefornemmelse er.

Bliv dog ikke skuffet hvis du gætter langt fra de resultater du får gennem LOD. Selv erfarne fagfolk kan tage grueligt fejl.

Er LOD-modellen god nok?
Sanne og Malene diskuterer om LOD-eksperimenterne giver et passende billede af virkeligheden. Kan tallene fra LOD på rimelig måde erstatte en undersøgelse af fødselsdage i virkelige skoleklasser? Hvilke indvendinger kunne man have? *Hvad mener du?*

3. Bilnumre og chancer

Sanne og Malene er på en biltur. De kigger på bilnumre og lægger mærke til om der er to ens tal i numrene, som fx i bilnummeret 42714 hvor der er to 4-taller.

Sanne tilbyder Malene et spil om de næste 10 biler de møder:

> For hvert bilnummer der har to ens tal, skal du give mig 5 kr. Og jeg giver dig 5 kr. for hvert bilnummer der ikke har to ens tal.

Skal Malene modtage tilbuddet?

Efter lidt overvejelse siger hun ja. - Ti biler senere har hun vundet på de tre biler og tabt på de syv. Så det var altså ikke nogen god ide.

Da de kommer hjem går Malene i gang med at undersøge sagen ved hjælp af LOD. Hun lader LOD udvælge tilfældige bilnumre, og så vil hun vurdere chancen på grundlag af LODs data.

Bilnumre i Danmark ligger i området fra 20 000 til 99 999. Malene lader derfor LOD udtage tal fra dette område. Hun indleder med udtagelse af fem bilnumre.

LOD giver hende følgende bilnumre:

21067 53409 24851 44978 96266

Af disse bilnumre indeholder de tre første ikke to ens tal, men de to sidste bilnumre har begge to ens tal.

Her ville Malene altså have vundet tre gange og tabt to gange. Hun ville dermed have et overskud på 5 kr. for de fem bilnumre.

Men Malene ved at hun ikke kan afgøre noget på så lille et talmateriale. Der må flere undersøgelser til.

Du kan hjælpe hende.

Prøv selv

1. Lad LOD udtage 50 bilnumre, og tæl op hvor mange af dem der indeholder to ens tal.

   Giv et bud på chancen for at et tilfældigt bilnummer indeholder to ens tal.

   Hvilket råd vil du give Malene: Skal hun modtage Sannes tilbud?

2. ***Nabotal***. Malene tilbyder Sanne at deltage i et spil om bilnumre: Sanne skal give hende 5 kr. hvis bilnummeret indeholder to nabotal, altså 0 og 1, 1 og 2, …, 8 og 9. Fx indeholder bilnummeret 42075 nabotallene 4 og 5.

   Men Malene skal give Sanne 5 kr. hvis bilnummeret ikke indeholder to nabotal.

   Undersøg ved hjælp af LOD om Sanne skal modtage Malenes tilbud.

3. ***5 eller ikke 5***. Sanne og Malene tilbyder dig at deltage i et spil om bilnumre: Du skal give dem 5 kr. hvis bilnummeret indeholder tallet 5, og de giver dig 5 kr. hvis bilnummeret ikke indeholder tallet 5.

   Undersøg ved hjælp af LOD om du vil modtage tilbuddet.

4. ***To par*.** Sanne og Malene giver dig tilbud om at deltage i et spil om bilnumre: De giver dig 50 kr. hvis bilnummeret indeholder to tal som begge forekommer to gange (fx 42452 og 25225). Til gengæld skal du betale 10 kr. hvis bilnummeret ikke indeholder to tal der begge forekommer to gange.

   Undersøg ved hjælp af LOD om du vil modtage tilbuddet om at deltage i "To par".

5. ***Tre ens tal.*** Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen er for at et bilnummer indeholder tre (eller flere) ens cifre, som fx bilnumrene 23227, 55159 og 43444.

   Sanne giver Malene et tilbud om at deltage i et spil om bilnumre med Tre ens tal. Sanne giver Malene 100 kr. hvis bilnummeret indeholder tre ens. Hvad skal Malene betale for at betale for at få lov til at spille? Find *den rigtige pris* så hverken Sanne eller Malene taber i det lange løb.

6. ***Tre nabotal***. Undersøg hvad chancen er for et bilnummer med tre på hinanden følgende tal, fx 2, 3 og 4. Giv derefter Sanne og Malene et tilbud om at deltage i et spil om bilnumre med Tre nabotal. De får 100 kr. hvis bilnummeret indeholder tre nabotal. Hvad skal de betale for at få lov til at spille, hvad er den rigtige pris?

7. **En tur til Sverige**. Sanne og Malene er på biltur i ferien. De ser på bilnumre på de biler de møder. I Sverige er der tre bogstaver på nummerpladerne og et trecifret tal: 001, 002,…, 999. Malene foreslår at de gentager deres vædde-mål fra Danmark: At Malene betaler 5 kr. til Sanne for hvert bilnummer der har to ens tal, og at Sanne betaler 5 kr. til Malene for hvert bilnummer der ikke har to ens tal.

Sanne vil gerne overveje det lidt inden hun siger ja til forslaget. Hun mener at de kan beregne hvor mange trecifrede tal der har tre forskellige tal.
Kan de? Kan du?

Og hvad er Sannes chance så for gevinst? Undersøg om det stemmer med resultaterne fra LOD.

Sanne og Malenes arbejdsplan

Sanne og Malene kan nu begynde at se en metode i deres arbejde med chancer. De kan se at deres arbejde er opdelt i fem faser:

1. Problemet gennemtænkes
De sætter sig godt ind i situationen og prøver med et gæt på den ukendte chance. Derefter opstiller de en LOD-model til løsning af problemet.

2. Data indsamles
De kører LOD-modellen, måske endda flere gange.

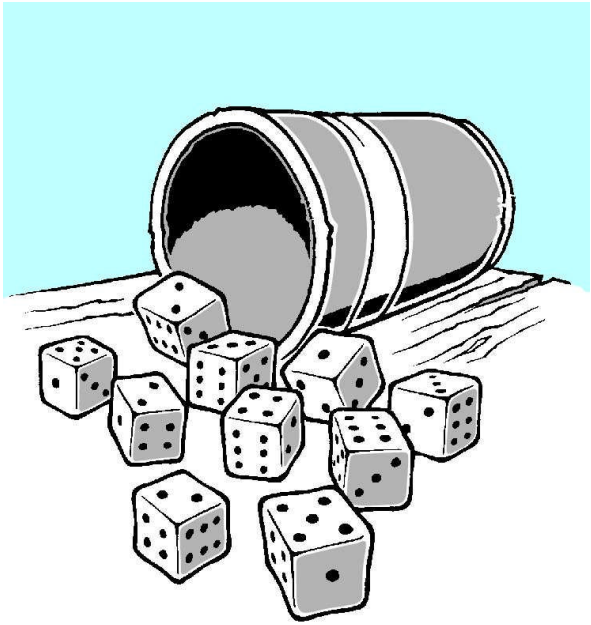
3. Data behandles
De studerer data fra LOD, og de fremlægge dem i overskuelig og letforståelig form.

4. Data fortolkes
De giver et svar på det forelagte problem. Svaret er kun foreløbigt, det kan blive justeret senere.

5. Svaret vurderes
De drøfter det opnåede resultat, og de overvejer om der skal flere undersøgelser til.

Prøv at anvende Sanne og Malenes arbejdsplan på chance-situationerne i de næste afsnit.

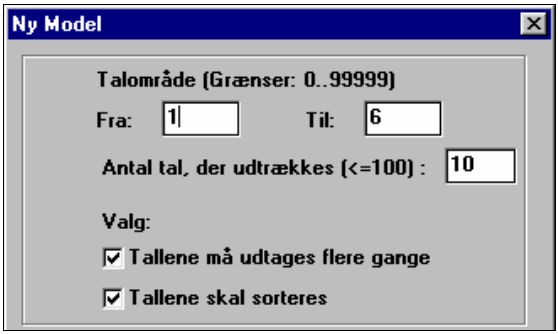
4. Et spil med terninger



Sanne tilbyder Malene at deltage i et spil med terninger. Malene skal betale 5 kr. for hvert spil hun vil være med i. Hun skal i spillet kaste med 10 terninger på én gang. Hvis hun får alle øjental 1,2,3,4,5,6 med de 10 terninger, får hun en gevinst på 10 kr. fra Sanne.

Mon Malene skal modtage tilbuddet?

Hun undersøger sagen ved hjælp af LOD, det kan nemlig også bruges til terningkast.



Hun vælger tal fra området 1 til 6, og melder at der skal udtages 10 tal. Udtagelsen er selvfølgelig med tilbagelægning. Hun vælger at sortere tallene.

Hun foretager nu en kørsel med 20 eksperimenter. Da tallene er sorteret, kan hun let afgøre om alle øjental forekommer. Og hun har nu et første indtryk af om hun skal modtage Sannes tilbud.

Hvad mener du? Skal Malene modtage Sannes tilbud?

Prøv selv

1. Lad LOD udføre 20 eksperimenter og giv et bud på chancen for at alle øjental forekommer i et kast med 10 terninger.

2. Foretag nogle flere eksperimenter. Synes du Malene skal tage imod Sannes tilbud? Hvad er den rigtige pris for at deltage i spillet når gevinsten er 10 kr.?

3. Gæt på hvad chancen er for at få alle øjental i kast med *12 terninger*. Undersøg derefter sagen ved brug af LOD.

4. Ved en klassefest laver I en konkurrence hvor der skal

kastes med 8 terninger. Der er en 1. præmie hvis alle seks øjental forekommer i kastet, og der er en 2. præmie til den der får fem af de seks øjental, fx 1,3,4,5,6. Det koster 10 kr. at deltage i spillet.

Giv ved hjælp af LOD et forslag til hvor store beløb der kan udbetales til 1. og 2. præmierne.

5. I opgaverne har du nu prøvet med 8, med 10 og med 12 terninger. Gæt på hvad chancen for alle seks øjental er når du kaster med 15 og med 20 terninger. Afprøv derefter dine gæt ved brug af LOD.

   Angiv den rigtige pris for at deltage i et spil med 15 terninger hvor gevinsten ved alle seks øjental er 100 kr.

6. Overvej sammen med en kammerat hvad chancen for alle seks øjental er når I kaster med kun 6 terninger.

5. Nabotal i Lotto

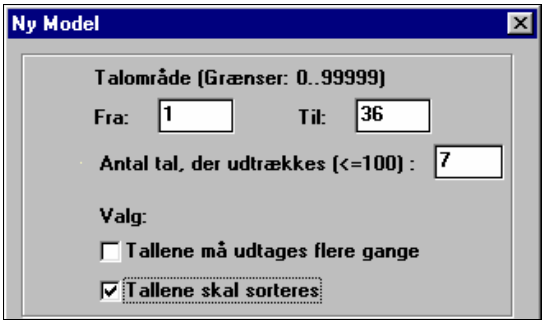
Sanne og Malene spiller hver uge i lotto. De deltager med 10 rækker, og hver lørdag følger de udtrækningen af lottotallene i tv. De bliver nu for det meste skuffet, ofte kan der nemlig gå en måned eller to uden at de vinder på en af deres 10 rækker. Og når de endelig vinder, så er for det meste kun 40 kr. eller deromkring.

For at få lidt mere spænding ind i udtrækningen af lottotallene har Sanne og Malene lavet deres lille private spil. I lotto udtrækkes der 7 tal blandt tallene fra 1 til 36. Og somme tider sker det at der blandt de 7 udtrukne tal findes *nabotal*, altså at fx både 17 og 18 udtrækkes. Men det er ikke hver uge at der forekommer nabotal blandt de 7 lottotal. (Vi regner kun med de syv lottotal, ikke de to tillægstal).

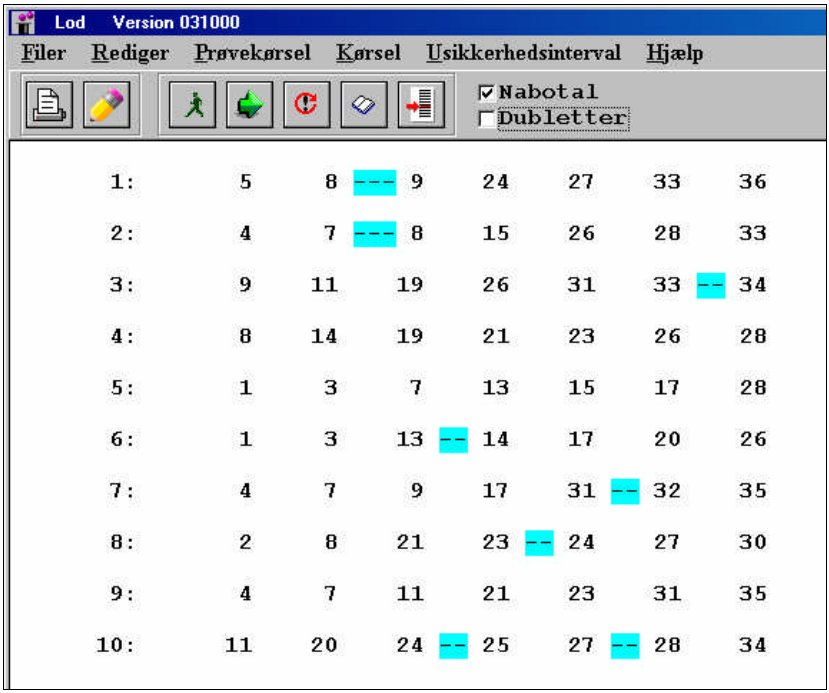
Sanne og Malene har nu aftalt følgende spil:

Hvis der er nabotal, skal Sanne have 100 kr. fra Malene.
Hvis der ikke er nabotal, skal Malene have 100 kr. fra Sanne.

Hvordan ligger det mon med de to pigers chancer i dette spil. Hvad er chancen for at Sanne vinder? Med andre ord: Hvad er chancen for nabotal i lotto? De ser på sagen ved hjælp af LOD.



De opstiller i LOD en model hvor vi udtager tal fra området 1.. 36. De udtager 7 tal og samme tal må ***ikke*** udtages flere gange, der er altså tale om 7 forskellige tal. I udskriften vil de gerne have tallene sorteret, helt på samme måde som lottotallene stilles op efter størrelse når de fremlægges i tv eller i aviser.



De har ladet LOD udskrive 10 lottorækker. Og de har klikket på feltet med *Nabotal*, så de let kan gennemføre optællingen.

På skærmen kan vi se: *Af de 10 rækker er der 7 med nabotal og 3 uden nabotal.*

Ud fra disse lottorækker fra LOD kunne det altså se ud til at Sanne har større chance end Malene for at vinde i deres ugentlige spil. Men mon det er rigtigt? Du kan undersøge sagen nærmere ved hjælp af LOD. Men du må gerne først gætte på hvad du tror at chancen for nabotal i lotto er.

Prøv selv

1. Lad LOD frembringe mindst 50 lottorækker, og tæl op hvor mange af dem der indeholder nabotal. Hvad kan du nu sige om Sannes og Malenes chancer i deres spil?

   Hvis du stadig er i tvivl, så lad LOD lave 50 rækker mere.

2. ***Lotteri***. Sannes klasse har lavet et lotteri med 100 sedler og 10 gevinster. Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen er for at der forekommer nabotal i listen over de 10 gevinst-numre.

3. ***Onsdagslotto***. Her udtrækkes 6 tal blandt tallene fra 1 til 48. Undersøg hvad chancen for nabotal er her.

4. ***Fødselsdage***. I en konkurrence i et ugeblad udtrækkes 25 fødselsdage blandt årets 365 dage. Hvad er chancen for at der blandt de 25 dage er to nabodage?

5. ***Et stort lotteri***. Sanne og hendes klasse udvider nu deres lotteri til hele skolen. Der er 1000 sedler og 30 gevinster. Det viser sig at gevinstlisten indeholder to nabotal, og der er straks nogen der protesterer mod lotteriet og taler om svindel. - Undersøg sagen ved hjælp af LOD: Hvad er chancen for at der udtrækkes nabotal i skolens lotteri?

Gevinster i Lotto

Vi skal senere i bogen se på hvad chancerne for gevinst i Lotto er. Her vil vi blot med LOD få et indtryk af hvor ofte der forekommer en række med gevinst.

Sanne og Malene vælger en lotto-række. De bliver enige om at de vil undersøge rækken: 5, 8, 11, 12, 15, 17, 34.

De går nu ind i LOD og gør klar til lotto-trækninger:

Inden de giver signal til kørsel, klikker de på feltet Talliste. Her indtaster de nu deres lottorække: 5, 8, 11, 12, 15, 17, 34.

Derefter kører de ti lottotrækninger. På skærmen kan de se hvor mange af deres tal der kommer ud, de er nemlig markeret med en stjerne.

I den første trækning er der to tal der er markeret med stjerne: 11 og 17. Det giver altså ikke gevinst til Sanne og Malene, der skal jo fire rigtige tal til for gevinst, altså fire stjerner i samme række. - I næste række er der også kun to stjerner, men i række 3 er der tre stjerner. Det er bedre, men ikke nok til gevinst.

Talliste: 5,8,11,12,15,17,34 (markeret med *)

Tabel:

1:	1	2	6	11*	13	17*	24
2:	2	7	12*	15*	20	22	31
3:	5*	15*	19	31	34*	35	36
4:	3	5*	8*	14	29	31	34*
5:	10	11*	12*	19	22	25	27
6:	2	7	9	14	24	28	32
7:	5*	7	8*	16	24	26	29
8:	1	7	15*	17*	22	27	34*
9:	3	5*	6	9	21	22	24
10:	10	20	22	23	24	27	36

Det viser sig at der ikke er nogen række med fire stjerner. Men der er to rækker uden nogen stjerner.

Prøv selv
Prøv med en lottorække efter dit eget valg. Kør 10 trækninger og undersøg hvor tit der kommer gevinster. Prøv nogle flere gange: Brug Gentag-knappen og kør 10 trækninger ad gangen.

Når vi kommer til brugen af programmet KUGLE1, vil vi foretage en ny undersøgelse af chancen for gevinst i Lotto.

6. Hvor stor bliver gevinsten?

Tre spillere A, B og C vælger at dele deres gevinstpulje på følgende måde: De udtrækker to forskellige tal blandt tallene 1,2,3,...,98,99. De to tal angiver hvordan puljen skal deles i tre dele.

Udtrækkes fx tallene 23 og 65 foretages følgende opdeling af puljen:

```
0          23                    65                    100
|------------|-------------------------|-------------------------|
      A                  B                    C
```

A modtager 23% af puljen (bestemt ved afstanden fra 0 til det mindste af de to udtrukne tal), B modtager 42% (afstanden

mellem de to udtrukne tal), og C modtager 35% af puljen (afstanden fra det største tal op til 100).

De tre spillere er interesseret i følgende problem:

> Hvad er chancen for at en af spillerne løber med mindst 50% af gevinstpuljen ?

Eller sagt på en anden måde: Hvad er chancen for at en af spillerne får mindst lige så meget som de to andre tilsammen?

De bruger LOD
De lader LOD udtage stikprøver bestående af to tal fra området 1..99. Udtagelsen er uden tilbagelægning, de har jo brug for to forskellige tal. De lader LOD sortere tallene.

I fem eksperimenter får vi følgende resultater:

1. eksperiment:	40	86
2. eksperiment:	50	63
3. eksperiment:	20	60
4. eksperiment:	18	40
5. eksperiment:	1	98

I det første eksperiment får de tre spillere 40%, 46% og 14% af puljen. Ingen af spillerne når altså op på 50%.

I det andet eksperiment modtager A 50% af puljen. I tredje eksperiment er der ingen der får halvdelen af puljen, men i fjerde eksperiment modtager C 60% af puljen.

I det femte eksperiment er det B's tur til at modtage den store gevinst. Han får hele 97% af puljen.

I tre af de fem eksperimenter sker det altså at en af spillerne løber med mindst halvdelen af puljen. Mon det holder i det lange løb?

Prøv selv

1. Lad LOD køre 25 eksperimenter og giv på grundlag heraf et bud på hvad chancen er for at en af spillerne løber med mindst 50% af puljen.

2. Brug nogle flere kørsler og undersøg om de nye resultater afviger væsentligt fra dem du fik før.

3. ***Er der samme chance for spillerne?*** De tre spillere havde på forhånd en mistanke om at de måske ikke ville have lige store chancer for at være den der løber med halvdelen af puljen. - Undersøg om der er noget der tyder på at A, B og C ikke har samme chance for at vinde mindst 50% af puljen.

4. ***Den største andel.*** Undersøg ved nogle kørsler hvad den største af de tre andele er i gennemsnit.

7. Et besøg i Chanceland

Sanne og Malene har læst om eventyrlandet Aleatorien hvor man er meget optaget af spil. Enhver forbryder får derfor en ekstra chance inden han bliver idømt fængselsstraf: Fra en pose med 100 kugler, med numre fra 1 til 100, udtager han to gange en kugle. Hvis numrene på de to kugler ligger tæt på hinanden, dvs. højst med en forskel på 25, så løslades forbryderen, og han slipper for videre tiltale. Hvis afstanden mellem de to numre er mere end 25, må han tage sin straf. – Hvor stor er mon chancen for at slippe for straf i Aleatorien?

Sanne og Malene lader LOD belyse spørgsmålet. De udtager to tal fra området 1..100. Udtagelsen foretages med tilbagelægning. Samme tal kan altså udtages to gange.

Her er resultaterne fra fem eksperimenter:

1. eksperiment:	39	95
2. eksperiment:	23	75
3. eksperiment:	2	68
4. eksperiment:	7	71
5. eksperiment:	30	52

Det første eksperiment giver tallene 39 og 95. De ligger mere end 25 fra hinanden, så her er ikke gevinst.

Heller ikke i de tre næste eksperimenter er der gevinst. Det er der derimod i det femte eksperiment, her er afstanden mellem tallene kun 22.

Af de fem eksperimenter er der altså kun ét der giver gevinst. Men heraf kan de selvfølgelig ikke fastslå at chancen for at slippe for straf i Aleatorien er 20%. Der må flere eksperimenter til.

Prøv selv

1. Lad LOD udføre 25 eksperimenter. Tæl op hvor mange der giver gevinst, og giv dit bud på hvad chancen er for at slippe for straf i Aleatorien.

2. Kør nogle flere eksperimenter, eller hent data fra en kammerat, og giv et nyt bud på den ukendte chance.

3. ***Snyd i spil***. I spillelandet Aleatorien ser man meget strengt på forbrydere der er grebet i at snyde i spil.

   For sådanne personer gælder at de kun slipper for straf hvis de to kuglenumre ikke ligger mere end 13 fra hinanden.

Undersøg ved hjælp af LOD hvor stor en chance spillesnyderne har for at slippe for straf.

4. ***Der skal spares***. På grund af økonomisk krise er regeringen i Aleatorien nødt til at skære ned på udgifterne til fængselsvæsenet. De overvejer derfor at ændre reglen for afsoning af fængselsstraf (dog kun for "almindelige" forbrydere, ikke for spilsnydere): Hvis kuglernes numre ikke ligger mere end 50 fra hinanden, slipper forbryderen for at afsone sin straf.

   Hvad betyder denne ændring af reglerne? Hvad er nu chancen for at slippe for straf i Aleatorien? Gæt før du bruger LOD.

8. Et spil med mønter

Sanne har opfundet et spil med mønter: Du kaster en mønt i alt 6 gange. Hvis du i spillet får Krone to gange lige efter hinanden, vinder du. Hvis du ikke får to Krone i træk, taber du.

Sanne er i vildrede med hvor stor vinderchancen i hendes spil er. Og den skulle hun jo gerne kende til når hun går ud og tilbyder spillet til sine kammerater.

Sanne har tænkt at tilbyde spillet sådan: "Du får 5 kr. af mig hvis du får to Kronekast i træk, og du giver mig 5 kr. hvis du ikke får to Kronekast i træk." Er det mon et fornuftigt forslag fra Sannes side?

Hun undersøger sagen ved hjælp af LOD. Selvfølgelig kunne hun udføre rigtige spil med mønter, men med LOD går det hurtigere, og hun kan få resultaterne skrevet ud på papir.

Sanne lader LOD udtage seks tal fra talområdet 0..1. Hun lader 0 svare til at mønten viser Krone, og 1 til at mønten viser Plat.

Her er de fem første eksperimenter:

1. eksperiment: 1 0 0 0 1 1 0=Krone 1= Plat
2. eksperiment: 0 1 1 1 0 1
3. eksperiment: 0 1 0 1 1 1
4. eksperiment: 0 0 0 0 1 0
5. eksperiment: 0 1 0 1 1 0

Allerede i det første eksperiment er der to kronekast i træk (der er endda tre). De to næste eksperimenter har derimod ikke to kronekast i træk, her er jo ikke to nuller ved siden af hinanden.

Det fjerde eksperiment har to kronekast i træk, men dette er ikke tilfældet i det femte eksperiment. To af de fem eksperimenter har altså to kronekast i træk. Hvis Sanne havde spillet disse fem spil, ville hun have måttet udbetale 5 kr. i to af spillene, og hun ville have modtaget 5 kr. i hvert af de tre andre spil.

Spillet ser altså lovende ud for Sanne, men hun er stadig i tvivl. Der er jo kun udført fem eksperimenter. Hun må derfor i gang med at bruge LOD. Du kan hjælpe hende.

Prøv selv

1. Lad LOD udføre 50 spil, og tæl op hvor mange gange Sanne ville have vundet.

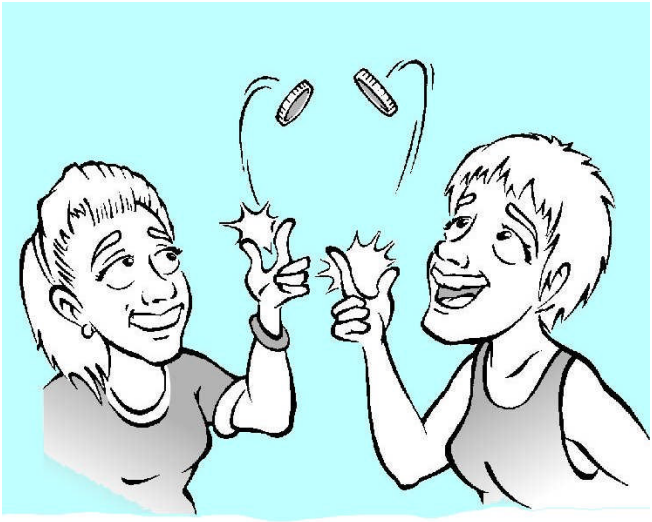
   Giv et bud på chancen for at få to kronekast i træk i Sannes spil.

2. ***Tre kronekast i træk*.** Sanne ændrer sit spil til "Tre kronekast i træk", men nu med 10 kast i stedet for 6. Undersøg ved hjælp af LOD hvad chancen for "Tre kronekast i træk" er i Sannes nye spil. Hvis gevinsten sættes til 10 kr., hvad er så den rigtige pris for at deltage i spillet?

3. ***Tre krone eller plat i træk***. Undersøg spillet "Tre i træk af samme slags" i 6 kast, altså enten 3 krone eller 3 plat i træk. Hvad er chancen for gevinst i dette spil?

4. ***Terningkast***. Sanne går nu over til terninger. Hun tilbyder dig at deltage i et spil hvor du skal kaste en terning 6 gange. Hvis du får "To ens i træk" har du vundet. Hvad er chancen for gevinst i Sannes spil?

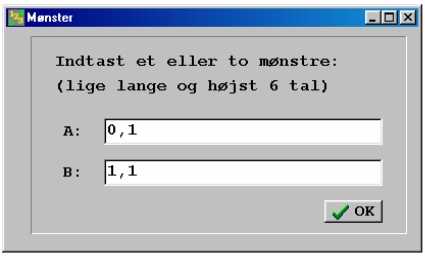
9. Mystiske mønstre



Sanne og Malene fortsætter med at se på møntkast. De kaster en mønt 10 gange og undersøger om der undervejs i kaste-serien forekommer bestemte rækkefølger, eller *mønstre*.

Sanne vælger at spille på mønstret KP, dvs. Krone-Plat. Malene vælger mønstret Plat-Plat. De aftaler at den hvis mønster forekommer først i serien af kast, har vundet.

I programmet klikker de på Mønster og indtaster de to mønstre A: 0,1, dvs. Krone, Plat og B: 1,1, dvs. Plat, Plat.



Sanne spiller altså på rækkefølgen 01 og Malene på rækkefølgen 11. Her er ti kasteserier:

1:	B1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
2:	B1	1	1	1	0	1	0	0	0	1
3:	B1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
4:	1	0	0	A0	1	0	1	0	1	1
5:	0	A0	1	0	0	1	0	0	1	1
6:	0	A0	1	1	0	0	0	0	1	1
7:	1	A0	1	0	0	0	1	0	0	0
8:	A0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
9:	0	0	A0	1	0	0	1	0	0	0
10:	A0	1	0	1	1	1	0	0	1	0

På skærmen er markeret det af de to mønstre som kommer først. Mønstret er mærket med et A eller et B.

I de tre første serier vinder Malene, hendes mønster kommer jo ud før Sannes. I alle de øvrige serier vinder Sanne. Vi ser altså at Malene vinder i 3 af de 10 serier og Sanne vinder i 7. Mon det blot er Sanne der er heldig? Vil det udligne sig hvis Sanne og Malene spillede et stort antal serier? Det to mønstre har jo samme chance for at forekomme:

Med to kast er der fire mulige mønstre: 00, 01, 10, 11. Og de har hver en sandsynlighed på 1/4 for at forekomme. Det kan du fx let se ved hjælp af et chancetræ, eller du kan prøve med møntkast.

Sanne og Malenes mønster har altså samme chance for at forekomme. Men hvorfor vinder Sanne så 7 ud af 10 spil?

Du skal nu undersøge sagen lidt nærmere.

Prøv selv

1. Lad Sanne og Malene udføre i alt 50 spilleserier, og undersøg hvor mange gange Sanne vinder og hvor mange gange Malene vinder. Læg mærke til de tilfælde hvor Malene vinder: Hvornår forekommer hendes mønster i kasteserien?

2. Sanne spiller nu på mønstret 00 og Malene vælger 11. Undersøg hvad de to spilleres chance er for at vinde.

3. Sanne vælger mønstret 01 og Malene vælger 10. Gæt på hvem der vinder. Find derefter deres chance for at vinde.

4. Sanne vælger mønstret 0,0 og Malene vælger 0,1. Gæt på hvem der vinder.

5. Hvilket råd vil du give Malene: Hvilket mønster skal hun vælge hvis

   (1) Sanne vælger 00 (2) Sanne vælger 01
   (3) Sanne vælger 10 (4) Sanne vælger 11

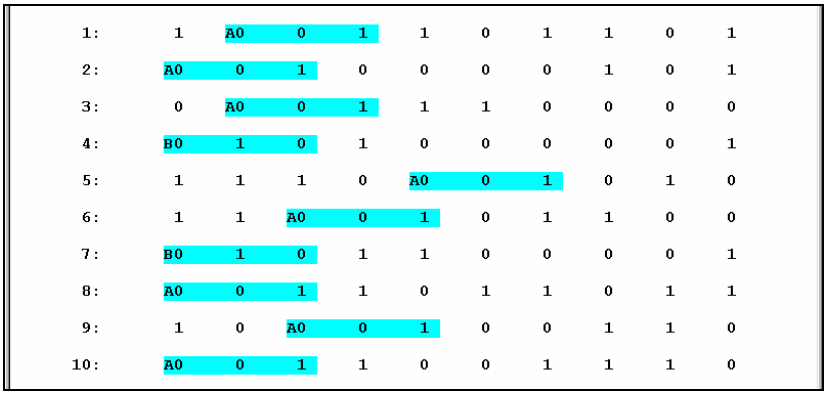
Mønstre med tre kast

Sanne og Malene vælger nu at bruge mønstre med tre kast. Her er der otte muligheder:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

som alle har samme chance for at forekomme.

Sanne vælger mønstret 001 og Malene vælger 010. Vi ser igen på 10 kasteserier:



Vi ser at Sanne vinder i 8 af de 10 serier og at Malene vinder i 2 serier. Det ser altså ud til at Sanne vinder stort, selv om de to mønstre har samme chance for at forekomme.

Prøv selv

1. Hjælp Sanne og Malene med at udføre i alt 50 spilleserier, og undersøg hvor mange gange Sanne vinder og hvor mange gange Malene vinder. Kan du give nogen forklaring på deres forskel i vinderchancer?

2. Sanne vælger nu mønstret 001, og Malene vælger 100. Undersøg hvad de to spilleres vinderchancer er.

3. Sanne vælger mønstret 111, og Malene vælger 011. Gæt på hvem der vinder.

4. Sanne vælger mønstret 110, og Malene vælger 111. Hvem vinder?

5. Hvilket råd vil du give Malene: Hvilket mønster skal hun vælge hvis

   (1) Sanne vælger 000 (2) Sanne vælger 010

   (3) Sanne vælger 100 (4) Sanne vælger 110

10. Er det tilfældigt?

På Malenes skole fører man statistik over hvor mange uheld der sker i skolegården. Det viser sig at der i løbet af 20 skoledage i en måned sker 20 uheld som kræver at skolens forbindingskasse kommer i brug.

Statistikken viser at uheldene ikke er jævnt fordelt på de 20 dage. Der er en enkelt dag med 3 uheld, og der er hele 7 dage hvor der slet ikke indtræffer nogle uheld.

I Malenes klasse diskuterer man om uheldene kan være tilfældig fordelt, eller om der skulle være en eller anden grund til at de klumper sammen. Da man ikke kan blive enige, vælger man at belyse problemet ved hjælp af LOD:

Der udtages 20 tal fra talområdet 1..20. Tallene udtages med tilbagelægning, og de udskrives i sorteret tilstand:

1	1	2	3	3	4	4	7	9	11
12	14	14	15	15	15	16	18	18	20

Udskriften viser at der dag nr. 1 var 2 uheld, dag nr. 1 er jo udtrukket 2 gange. Dag nr. 2 er der kun ét uheld, men dag nr. 3 er der igen 2 uheld. Dagene nr. 5 og nr. 6 forekommer ikke i listen, disse dage var der altså ingen uheld.

En lille statistik over antal uheld giver følgende resultat:

Dage med 3 uheld:	1	(det er dag nr.15)
Dage med 2 uheld:	5	
Dage med 1 uheld:	7	
Dage uden uheld:	7	

Dette eksperiment giver altså som resultat at der forekommer én dag med tre uheld, og der er 7 dage uden uheld. De 7 dage der ikke er med i listen er dagene nr. 5, 6, 8,10, 13, 17 og 19. De ligger ganske godt spredt blandt de 20 dage.

Prøv selv

1. Gentag eksperimentet og opstil din statistik over antallet af uheld pr. dag. Sammenlign din statistik med statistikken fra Malenes klasse.

2. ***Flere data***. Lav endnu fire eksperimenter med udtagelse af 20 tal, og opstil for hvert eksperiment en statistik over uheld pr. dag. Hvad er det gennemsnitlige antal dage uden uheld i dine fem statistikker? Og hvad er det gennemsnitlige antal dage med 3 uheld?

3. ***10 uheld på 10 dage*.** Undersøg ved hjælp af LOD hvordan 10 uheld kan fordele sig over 10 dage. Kør mindst 10 eksperimenter. Hvor mange dage er der i gennemsnit uden uheld?

4. ***40 uheld på 20 dage***. På en stor skole er der i gennemsnit 2 uheld pr. skoledag. Undersøg ved hjælp af LOD hvor tit der kan forventes en dag med 5 eller flere uheld. Og undersøg hvor tit der vil forekomme en dag helt uden uheld.

Kommentarer til arbejdet med LOD

Du har nu ligesom Sanne og Malene arbejdet med en række opgaver hvor du skulle skaffe dig oplysninger om ukendte chancer ved hjælp af LOD. Når man bestemmer chancer ved hjælp af indsamlede data, taler man om *statistisk sandsynlighed*. Sandsynlighederne får talværdier gennem en statistisk undersøgelse.

Det er klart at de chancer du når frem til gennem eksperimenter, kun kan give en ide om hvad de ukendte chancer er. Du vil kunne justere dine tal hvis du udfører nye serier af eksperimenter.

Du har her arbejdet med matematik på følgende måde:

> Der er ikke noget facit der er det eneste rigtige, og du kommer ikke frem til dine resultater ved at foretage beregninger eller udledninger.
>
> I stedet udfører du eksperimenter. Du indsamler data fra eksperimenterne, og på grundlag af dine data giver du dit bud på de ukendte chancer. Din kammerat som udfører de samme eksperimenter, kan komme frem til resultater som afviger fra dine. Men det betyder ikke at den ene af jer har "regnet rigtigt" og den anden ikke. I har begge indsamlet data og givet jeres bud på løsningen til det forelagte problem.
>
> Du kan ikke vide hvor gode dine resultater er, men du kan altid afprøve en løsning ved at udføre en ny række af eksperimenter.

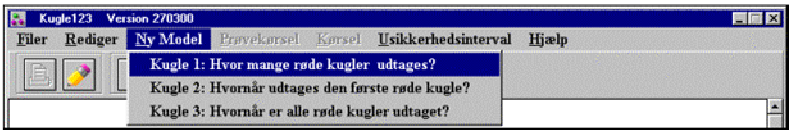
I arbejdet med eksperimenterne har du brugt et edb-program, LOD, men i princippet kunne du selv have udført de mange eksperimenter uden brug af edb. Programmet har blot været et nyttigt værktøj i arbejdet.

Brug LOD!

I nogle af opgaverne kan du godt gennemføre en teoretisk beregning af de søgte chancer. Her kan din lærer give dig en idé om hvordan beregningerne kan udføres.

Men i de fleste opgaver ligger en teoretisk beregning uden for hvad du (og din lærer) kan klare. Her har du så LOD som et alment værktøj. Og de resultater du får gennem LOD, vil næsten altid ligge meget tæt på de ukendte teoretiske chancer.

LOD giver dig altså mulighed for at arbejde med problemer som ligger langt uden for det teoretiske stof som indgår i matematikken i skolen.



1. En kuglemodel

Sanne og Malene ser på et spil hvor man skal trække en seddel fra en æske. I æsken er der 10 sedler og der er gevinst på 3 af dem. Den seddel der trækkes, skal lægges tilbage i æsken før den næste udtrækning.

Man får lov til at trække 5 gange. *Hvad er chancen for at få gevinst?*

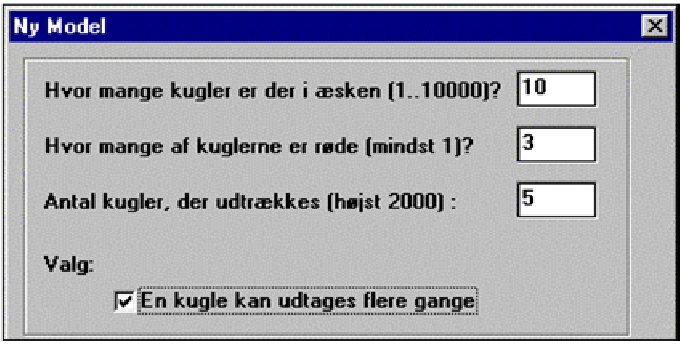
Dette spørgsmål kan Sanne og Malene belyse ved hjælp af programmet KUGLE 1. Med det program kan de opbygge en kuglemodel af chancesituationen. I kuglemodellen tænker vi os at vi har en æske med kugler. Nogle af kuglerne er røde. Vi bestemmer selv hvor mange kugler der er i æsken og hvor mange af dem der er røde.

Programmet kan nu udtage kugler fra æsken, én for én, og hver gang notere om det var en rød kugle der blev udtaget.

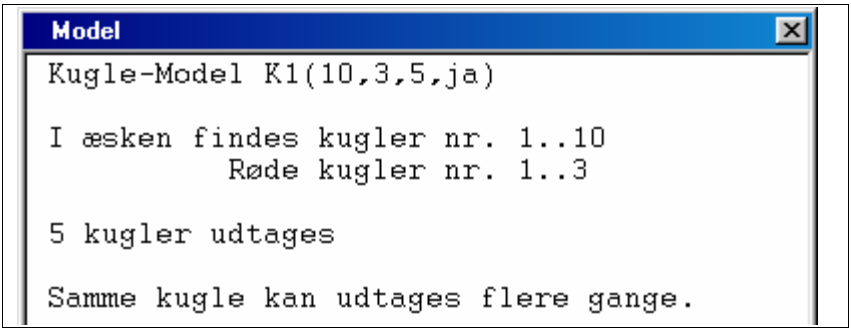
Med KUGLE 1 kan de derfor efterligne, eller *simulere*, en række chanceeksperimenter. Og gennem anvendelse af KUGLE 1 kan de få oplysning om de ukendte chancer.

De går ind i programmet KUGLE123 og vælger Ny model. Derefter vælger de KUGLE 1. På skærmen kan de nu give oplysninger om den kuglemodel de vil anvende.

Brug KUGLE 1!



Her har de fortalt programmet hvad kuglesituationen er: Der er 10 kugler i æsken og 3 af dem er røde. Der udtages 5 kugler, og udtagningen er *med* tilbagelægning: Samme kugle kan udtages flere gange.



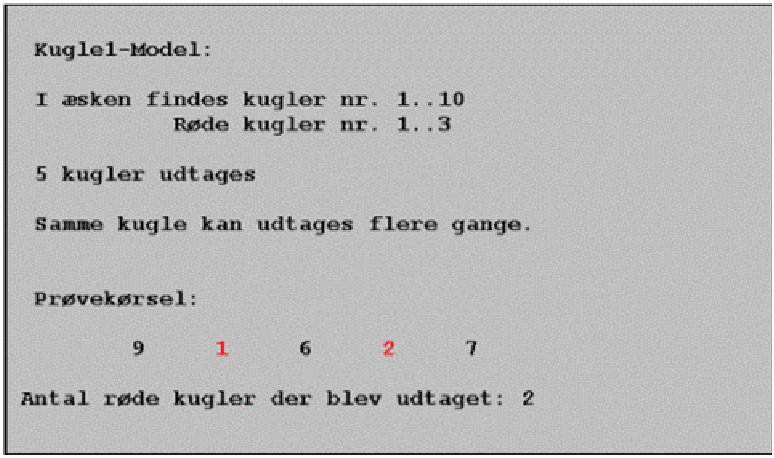
Programmet giver dem straks en meddelelse om hvilken kuglemodel de har indtastet. Denne model vil vi kort notere ved:

K1(10,3,5, ja)

Det betyder at vi bruger KUGLE 1 med 10 kugler, heraf 3 røde. Der skal udtages 5 kugler, og samme kugle kan udtages flere gange. I kuglemodellen har kuglerne fået numre fra 1 til

10. De røde kugler har numrene fra 1 til 3. Det vil altid være sådan at de røde kugler har de laveste numre.

Sanne og Malene lader nu KUGLE 1 udføre en *prøvekørsel*. De gennemfører altså kugleudtagelsen som den er beskrevet i modellen. Et klik på *Prøvekørsel* giver følgende resultat:



Du kan se at vi her igen først får at vide hvilken model det drejer sig om. Derefter vises numrene på de fem kugler der blev udtaget: 9, 1, 6, 2, 7. Blandt dem er der to røde kugler, nemlig nr. 1 og 2.

Dette resultat svarer til at Sanne og Malene ville have fået to gevinstsedler i deres udtrækning af sedler fra æsken med de 10 sedler.

En serie af eksperimenter
De vil nu lade KUGLE 1 udføre en serie af eksperimenter. De kan jo først udtale sig om chancer når de har et større materiale, en enkelt prøvekørsel siger ikke noget.

De vælger menupunktet *Kørsel* og fortæller at de ønsker at udføre 20 eksperimenter.

Her har vi tallene fra en serie på 20 eksperimenter. 20 gange er der udtaget 5 kugler, og i hvert eksperiment er der noteret hvor mange røde kugler der blev udtaget blandt de fem kugler.

Bemærk at det ikke er kuglenumre der står i listen. Det er *antallet af røde kugler* i hvert af de 20 eksperimenter. I det første eksperiment blev der udtaget 2 røde kugler, i det næste 1 rød kugle, derefter ingen røde kugler, og i det fjerde eksperiment var der 3 røde kugler.

De lader nu KUGLE 1 udskrive en oversigt over de 20 resultater:

Antal røde kugler	Andel røde kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
0	0.000	4	20.00	20.00
1	0.200	7	35.00	55.00
2	0.400	4	20.00	75.00
3	0.600	5	25.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal røde kugler pr. eksperiment: 1.50
Andel - - - - - : 0.300

Oversigten gives i *en sumtabel*. Vi kan i tabellen se antallet af røde kugler: Der er tale om 0, 1, 2 eller 3 røde kugler. Vi ser at der har været 4 eksperimenter med 0 røde kugler, 7 eks-

perimenter med 1 rød kugle, 4 eksperimenter med 2 røde kugler og 5 eksperimenter med 3 røde kugler.

I tabellen er også anført *andelen* af røde kugler. For eksempel svarer 2 røde kugler jo til at 2 ud af 5 udtagne kugler var røde, dvs. andelen af røde kugler var 2/5 = 0.400.

Af tabellen kan Sanne og Malene få en ide om chancerne i deres udtrækning af sedler fra æsken med de 10 sedler. Det ser ud til at der er stor chance for at få én gevinst, det svarer jo til 1 rød kugle i kugleudtagelsen. De kan også se at chancen for to og for tre gevinster er noget mindre.

De kan ikke ud fra deres data sætte tal på chancen for at få mere end tre gevinster. I kugleudtagelsen forekom der jo ikke mere end tre røde kugler.

Her har de ladet KUGLE 1 udføre 100 eksperimenter. Nu forekommer der også 4 røde kugler i tabellen: I 3 eksperimenter udtages der 4 røde kugler. Vi ser også at der er 18 eksperimenter uden røde kugler.

Antal røde kugler	Andel røde kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
0	0.000	18	18.00	18.00
1	0.200	42	42.00	60.00
2	0.400	25	25.00	85.00
3	0.600	12	12.00	97.00
4	0.800	3	3.00	100.00

Udført i alt: 100 eksperimenter

Gennemsnit: Antal røde kugler pr. eksperiment: 1.40
Andel - - - - - : 0.280

Med det nye materiale kan Sanne og Malene begynde at sætte tal på chancerne i deres udtrækning af sedler fra æsken med de 10 sedler og 3 gevinster: Måske tør de sige at der er ca. 15% chance for at få mere end 2 gevinster, og at risikoen for slet ikke at få nogen gevinst er ca. 18%.

2. Sumtabellen er et godt værktøj

Når du skal arbejde med data er det vigtigt at du forstår at aflæse en sumtabel. En sådan tabel er et af de mest benyttede hjælpemidler når man skal have oversigt over et talmateriale. Bemærk især tallene i kolonnen yderst til højre. De fortæller hvad de kumulerede %-tal i datamaterialet er. Kumuleret betyder "lagt sammen". Lad os se lidt nærmere på de kumulerede tal:

I den anden linje i tabellen finder du yderst til højre tallet 60.00. Det betyder at der i 60% af eksperimenterne forekommer enten 0 røde kugler eller 1 rød kugle. Du kan se hvordan de 60% opstår: Der er 18% eksperimenter med 0 røde kugler og 42% med 1 rød kugle, i alt er der 60% eksperimenter med enten 0 røde kugler eller 1 rød kugle.

Vi kan derfor sige at i 60% af eksperimenterne fik vi ikke over 1 rød kugle. Eller sagt på en anden måde: *Chancen for at få højst 1 rød kugle er 60%.*

Det næste tal i den højre kolonne er 85.00. Det fortæller os at der i 85% af eksperimenterne ikke forekom over 2 røde kugler. Det tal fortæller os også at der i 15% af eksperimenterne kom flere end 2 røde kugler. Hvorfor?

De kumulerede tal kan give os svar på spørgsmål af følgende slags:

> Hvad er chancen for at få op til 2 røde kugler (dvs. *højst* 2 røde kugler)?
>
> Hvad er chancen for at få 3 eller flere røde kugler (dvs. *mindst* 3 røde kugler)?

Når du får en sumtabel på skærmen, så prøv selv at stille nogle spørgsmål om chancen for at få *højst* x røde kugler. Og stil spørgsmål om chancen for at få *mindst* y røde kugler. På den måde kan du vænne dig til brugen af ordene *højst* og *mindst* i forbindelse med tabeller over talmateriale.

Nederst på billedet med sumtabellen kan Sanne og Malene se at der i gennemsnit er udtaget 1.40 røde kugler pr. eksperiment. Da der er tale om udtagelse af 5 kugler hver gang, svarer de 1.40 røde kugler til en andel på 0.28 eller 28% røde kugler i hvert eksperiment. Men i æsken var der jo 30% røde kugler, nemlig 3 ud af 10, så de har i eksperimenterne fået lidt færre røde kugle end de ”skulle have haft” hvis udtagelsen helt havde fulgt det gennemsnitlige.

De nederste linjer i billedet med sumtabellen giver os på denne måde et hurtigt overblik over om vore eksperimenter i gennemsnit har været i god overensstemmelse med det forventede eller om de har været ”skæve”.

3. Programmets ti knapper

KUGLE 1 er en del af programmet KUGLE 123. De to andre programmer KUGLE 2 og KUGLE 3 ser vi på senere.

De tre programmer er bygget op på samme måde og vi vil her se på de ti knapper som kan anvendes i alle tre programmer.

De to første knapper har med udprintningen at gøre.

- Første knap aktiverer printeren og du får udskrevet dine resultater fra skærmen.
- Anden knap giver dig mulighed for at du kan indtaste en overskrift eller dit navn, så du kan finde din udskrift hvis den kommer ud på en fælles printer.

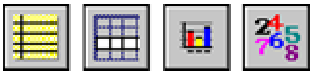
De fem næste knapper kan benyttes når du skal køre en kuglemodel.

- Den første giver dig mulighed for at sætte en kørsel i gang.
- Den næste knap kan bruges når du vil fortsætte en kørsel, hvis du fx har kørt 100 eksperimenter, men gerne vil udvide med yderligere 400 eksperimenter.
- Den tredje knap giver dig mulighed for at gentage en kørsel. Hvis du lige har kørt 100 eksperimenter, så kan

du ved et tryk på denne knap køre 100 nye eksperimenter. Du får altså nye resultater, det er kun antallet af eksperimenter der gentages.

- Den fjerde knap lader dig se den model du har indtastet. Hvis du kommer i tvivl undervejs, kan du blot klikke på denne knap.

- Den sidste af de fem knapper giver dig mulighed for at rette i dine inddata.



De fire sidste knapper har med resultaterne at gøre.

- Den første skal du bruge for at få en oversigt i form af en sumtabel. Hvis sumtabellen er grupperet, kan du vælge mellem en oversigt som fremviser de grupperede resultater eller en oversigt som giver resultaterne i alle detaljer.

- Den næste knap giver dig en liste over resultaterne fra de enkelte eksperimenter.

- Den tredje knap viser dig et søjlediagram over resultaterne fra kørslen.

- Den sidste knap giver dig mulighed for at få nogle værdifulde statistik-oplysninger fra den foretagne kørsel. Denne knap ser vi på i næste afsnit.

Prøv selv

Gå ind i KUGLE 1. Vælg *Ny model* og indtast den model vi har set på: K1(10,3,5, ja). Afslut med et klik på OK.

Gå derefter til knappen *Ny kørsel*, og bed om 100 eksperimenter. Afslut igen med klik på OK. På skærmen kommer de 100 resultater. Klik på den knap der giver *Oversigt,* og du får en sumtabel. - Hvis du vil vende tilbage til resultaterne, skal du klikke på Resultat-knappen.

2. Undersøg hvad din kørsel siger om chancen for at få mindst tre røde kugler og risikoen for slet ikke at få nogen rød kugle.

3. *Ny kørsel*. Foretag en ny kørsel, denne gang med 500 eksperimenter: Klik på *Ny kørsel* knappen, og indtast at der er tale om 500 eksperimenter. Undersøg hvad den nye kørsel siger om chancen for mere end 2 røde kugler og om risikoen for 0 røde kugler.

4. *Fortsæt*. Klik på *Fortsæt*-knappen. Du har nu mulighed for at forlænge din kørsel med flere eksperimenter. Vælg fx 500 ekstra, på skærmen kommer nu en oversigt over resultaterne for i alt 1000 eksperimenter. Studer den nye sumtabel.

5. *Gentag*. Klik på den femte knap. Programmet gentager nu den foregående kørsel, men selvfølgelig med nye resultater. Kig på den nye oversigt. Print den ud.

6. Klik på Graf-knappen (nr. 2 fra højre) og sammenlign grafen med den udprintede sumtabel.

4. Sanne og Malene opstiller en kuglemodel

Du har nu set hvordan Sanne og Malene har fået svar på deres spørgsmål om chancerne i spillet: De opstillede en kuglemodel for spillet og lod computeren udføre eksperimenter med kuglemodellen.

Ved løsningen af spilleproblemet er de altså gået frem således:

1. De opstiller en kuglemodel som passer med den forelagte chancesituation, altså med spillet.

2. De lader computeren udføre eksperimenter med kuglemodellen: De efterligner eller simulerer modellen på computeren.

3. De bruger computerens resultater på spillet: De oversætter eller fortolker resultaterne og finder ud af hvad de siger om den forelagte chancesituation.

Disse tre elementer vil indgå i arbejdet hver gang de løser chanceproblemer ved hjælp af en kuglemodel:

1. *De opstiller modellen*

2. *De simulerer modellen*

3. *De fortolker resultaterne.*

Det er klart at de ved en sådan fremgangsmåde risikerer at begå fejl. Her er nogle oplagte fejlkilder:

1. Den opstillede model stemmer ikke godt overens med den forelagte chancesituation

2. Computerens resultater giver ikke det rigtige billede af modellen.

3. De fortolker ikke resultaterne på den rette måde.

Hvad angår punkt 2, så kan de i nogen grad selv sikre sig her. De kan lade computeren skaffe dem et stort talmateriale, altså lade den udføre mange eksperimenter.

Erfaringer viser at store datamaterialer har gode chancer for at give os et korrekt billede. Vi skal altså ikke nøjes med 5, 10 eller 20 eksperimenter, men vælge 100 eller 200 eller måske endnu flere før vi fortolker de opnåede data.

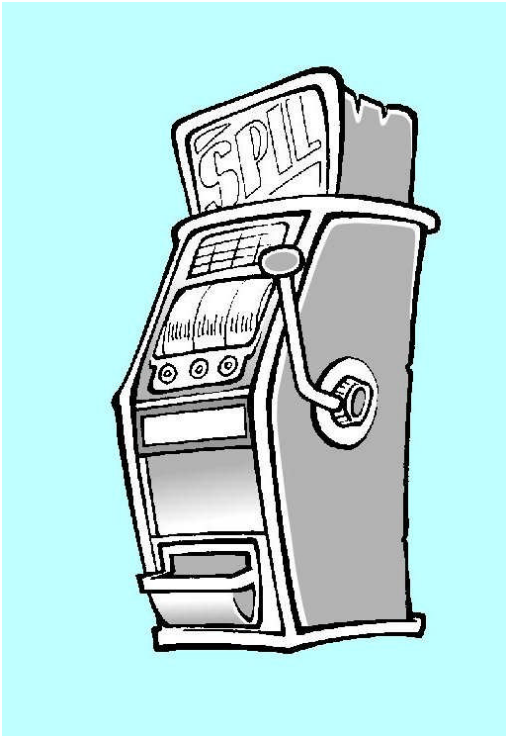
Hvad angår punkt 1 og punkt 3 i listen over fejlkilder, så vil kun øvelse og erfaring kunne sikre dem med fejl her. De må altså skaffe sig erfaring med at opstille modeller og prøve at fortolke resultater. Gennem eksempler må de finde ud af hvilke fald-gruber der kan være når valget af den rigtige model, eller snarere den bedste model, skal træffes. Ofte må man nemlig nøjes med en model som ikke på alle punkter afspejler den virkelige chancesituation. Man kan da ikke på forhånd vide noget om modellens kvalitet, kun en afprøvning vil vise hvor brugbar den er.

Da de to piger i forrige afsnit af bogen brugte LOD til at finde chancer vedrørende fødselsdage kunne de være i tvivl om hvor godt modellen passede med virkeligheden. I LOD-modellen gik de ud fra at alle dage havde samme chance for at optræde som fødselsdag, og det stemmer jo ikke helt. Fødselsdage fordeler sig ikke jævnt over året.

Alligevel viser det sig at man kan have god nytte af LOD-modellen, den er ikke perfekt, men den giver brugbare resultater. Sådan vil det ofte være når man arbejder med matematiske modeller.

5. Hvilken kuglemodel skal bruges?

Når vi anvender KUGLE 1 til belysning af chancesituationer, er det i de fleste tilfælde ganske let at opstille den kuglemodel der passer til situationen.



Vi ser på nogle eksempler.

Eksempel 1. En spilleautomat

Sanne spiller fire spil på en spilleautomat hvor gevinstchancen i hvert spil er 40%. Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad hendes gevinstchancer i spillet er.

Vi skal her have en kuglemodel som giver et billede af et spil hvor vinderchancen i hvert spil er 40%. Vi kan derfor benytte en kugleæske hvor 40% af kuglerne er røde. At der udtrækkes en rød kugle, betyder at Sanne får en gevinst.

Vi kan derfor vælge en æske med 10 kugler, hvoraf 4 er røde. Eller vi kan bruge en æske med 100 kugler, hvoraf 40 er røde. Vi kan også blot bruge en æske med 5 kugler, hvoraf 2 er røde.

Der er altså mange muligheder for at vælge æske. Derimod er der kun én mulighed for at fastsætte hvor mange kugler der skal udtages. Sanne spiller jo fire spil, og hver kugleudtagelse svarer til ét spil. Der skal altså udtages 4 kugler.

Kan samme kugle udtages flere gange? Her er svaret: *Ja.* Sanne skal jo i hvert spil have 40% chance for at vinde, dvs. 40% chance for at få en rød kugle. Og det kan vi i kugle-modellen kun opnå ved at lægge den udtagne kugle tilbage, således at æskens indhold af kugler er helt det samme ved hver udtagelse. Udtagelsen foregår altså *med tilbagelægning*.

Vi kan derfor bruge modellen K1(10,4,4, ja) når vi vil løse Sannes problem.

Prøv selv

1. Lad KUGLE 1 udføre 100 eksperimenter med modellen, og giv dit bud på chancen for at Sanne får:

   (a) højst én gevinst (b) ingen gevinst

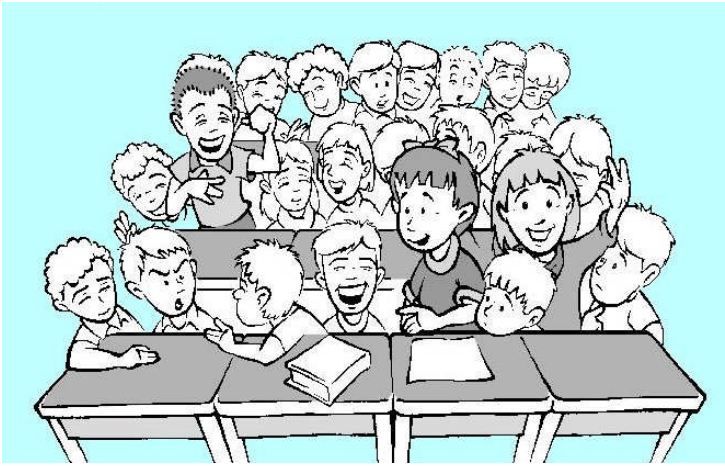
   (c) to gevinster (d) over to gevinster

2. Udfør 100 nye eksperimenter og undersøg hvor godt de nye resultater stemmer med dem fra før.

3. Løs Sannes problem ved modellen K1(5,2,4, ja). Sammenlign resultaterne med dem du fik før.

4. Løs Sannes problem ved modellen K1(100,40,4, ja).

   Sammenlign resultaterne med dem du fik før.



Eksempel 2. Et udvalg nedsættes

I en skoleklasse med 12 piger og 8 drenge skal der nedsættes et udvalg på 3 elever. De tre elever vælges ved lodtrækning.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad chancen er for at udvalget kommer ti at bestå af:

(a) 2 piger og 1 dreng (b) 1 pige og 2 drenge (c) 3 piger

Vi skal her bruge en kuglemodel som giver et billede af lodtrækningen blandt klassens 20 elever. Vi vælger en æske der indeholder 20 kugler hvoraf de 12 er røde. Vi lader altså

udtagelsen af en rød kugle svare til at en pige vælges ved lodtrækningen.

Tre kugler skal udtages, der skal jo vælges 3 elever.

Kan en kugle udtages flere gange? Her er svaret: *Nej*. Samme elev kan ikke vælges mere end én gang.

Vi gør derfor brug af modellen: K1(20,12,3,nej)

Prøv selv

1. Lad KUGLE 1 udføre 100 eksperimenter med den opstillede model og giv dit bud på de tre chancer.

2. Benyt i stedet en ny model hvor de røde kugler svarer til drengene. Kør 100 eksperimenter med den nye model og giv igen dit bud på de tre chancer.

3. Fra den samme klasse skal nedsættes et udvalg på 5 elever. Undersøg ved hjælp af KUGLE 1 hvad chancen er for at pigerne bliver i overtal i udvalget.

Brug KUGLE 1!

Eksempel 3. Møntkast og terningkast

I et spil kastes 5 mønter. Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad chancen er for at mindst 4 af de fem mønter viser krone.

I et spil kastes 3 terninger. Undersøg ved en kuglemodel hvad chancen er for at få mindst én sekser.

Også ved møntkast kan vi bruge en kuglemodel. Ved hvert møntkast er der 50% chance for at mønten viser krone, vi skal derfor vælge en kugleæske som giver 50% chance for at der udtages en rød kugle.

Det enkleste vil være at bruge en æske med kun 2 kugler, hvoraf den ene er rød. Vi kan derfor bruge modellen:

K1(2,1,5, ja).

På samme måde kan vi bruge en kuglemodel til at besvare spørgsmål vedrørende de tre terningkast. Vi kan her gøre brug af modellen K1(6,1,3, ja). I denne model svarer en rød kugle til at terningen viser 6. - Men vi kunne selvfølgelig også have brugt modellen K1(60,10, 3, ja) eller K1(600, 100, 3, ja).

Prøv selv

1. *Møntkast*. Lad KUGLE 1 udføre 100 eksperimenter, og giv dit bud på chancen for at mindst 4 af de 5 mønter viser krone.

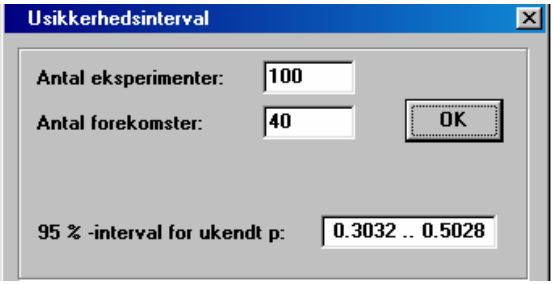
2. *Terningkast*. Lad KUGLE 1 udføre 100 eksperimenter, og giv dit bud på chancen for at få mindst én sekser i et kast med tre terninger.

3. *Fire terninger*. Undersøg hvad chancen er for at få mindst én sekser i et kast med fire terninger.

4. *Otte terninger*. Undersøg hvad chancen er for at få mindst to seksere i et kast med otte terninger.

6. Usikkerhedsintervaller

Der er et menupunkt i KUGLE 1-programmet som vi endnu ikke har benyttet. Vi vælger Usikkerhedsinterval, og der åbner sig et vindue på skærmen.



Lad os antage at vi har udført 100 kast med fire terninger, og at vi i 40 af kastene fik mindst én sekser. Vi vil nu gerne have et skøn over den ukendte chance for at få mindst én sekser. Vi ved godt at vi ikke kan sige at chancen lige præcis er 40%. Hvis vi udfører eksperimenterne igen, vil vi nok få et andet tal end 40.

Ved hjælp af *Usikkerhedsinterval* kan vi få et skøn over den ukendte chance. Vi har indtastet at der er tale om 100 eksperimenter, og vi fortæller at vi 40 gange fik mindst én sekser. Vi får da at vide at den ukendte chanceværdi kan skønnes at ligge i intervallet fra 0.3032 til 0.5028, altså fra ca. 30% til ca. 50%.

Der kan selvfølgelig ikke gives fuld sikkerhed for at den ukendte chance ligger i dette interval. Men intervallet er beregnet således at det i 95 tilfælde ud af 100 vil indeholde den ukendte chance. Vi kalder det et 95%-usikkerhedsinterval.

Brug KUGLE 1!

Prøv at se hvad der sker med usikkerhedsintervallet når du kaster 200 gange og i 80 kast får mindst én sekser. Og prøv med 400 kast hvor de 160 giver mindst én sekser.

Prøv også med 50 kast hvor de 20 giver gevinst, og prøv med 25 kast hvor der er gevinst i 10 kast.

7. Statistik-knappen

Vi ser nu på hvad den sidste knap, Statistik-knappen, kan bruges til. Vi ser på et eksempel.

Antal røde kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
79-87	3	3.000	3.00
88-89	7	7.000	10.00
90-91	4	4.000	14.00
92-93	3	3.000	17.00
94-95	8	8.000	25.00
96-97	9	9.000	34.00
98-99	11	11.000	45.00
100-101	18	18.000	63.00
102-103	11	11.000	74.00
104-105	14	14.000	88.00
106-107	5	5.000	93.00
108-110	4	4.000	97.00
111-113	2	2.000	99.00
116-116	1	1.000	100.00

Udført i alt: 100 eksperimenter

Gennemsnit: Antal røde kugler pr. eksperiment: 99.29
Andel - - - - - : 0.496

Vi lader KUGLE 1 udføre 200 kast med en mønt, og vi vil undersøge chancen er for antallet af Kronekast.

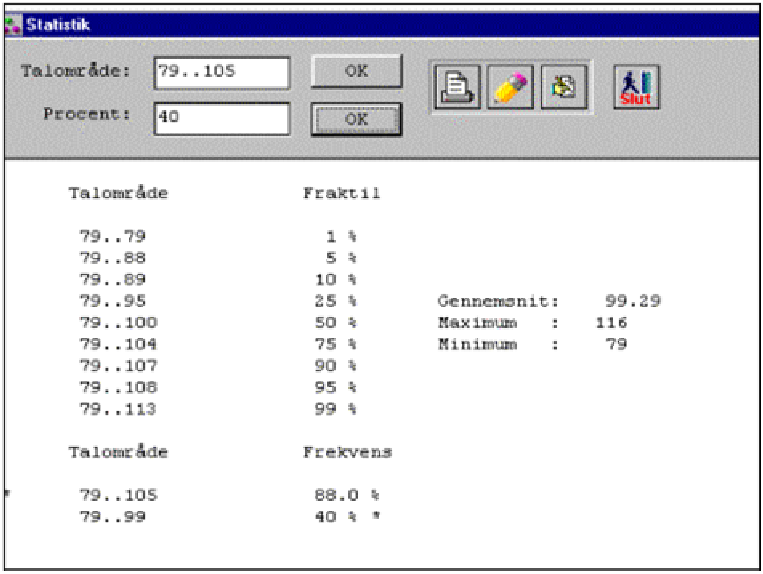
Vi kan her bruge modellen K1(2,1,200, ja). Vi lader altså den røde kugle svare til at mønten viser Krone.

Vi udfører nu 100 eksperimenter. I hvert af dem kastes mønten altså 200 gange og vi noterer hvor mange af de 200 kast der giver Krone.

I sumtabellen ovenfor kan du se en oversigt over resultaterne fra de 100 eksperimenter.

Af denne oversigt kan vi få en række vigtige oplysninger. Vi kan se at der er 25% chance for at antallet af Kronekast ligger på 95 og derunder. Og vi kan se at der er 88% chance for at få højst 105 kronekast. Det betyder at der er 12% chance for at antallet af Kronekast er over 105.

Vi klikker nu på Statistik-knappen.



Til højre på skærmen ser vi at det gennemsnitlige antal kronekast i de 200 serier har været på 99.29, altså tæt på 100. Vi ser også at det højeste antal kronekast der forekommer er 116 (Maximum) og det laveste er 79 (Minimum). Hver af de udførte serier af kast har altså givet os et antal kronekast som ligger fra 79 op til 116.

De vigtige fraktiler

På skærmen har vi en oversigt over de såkaldte *fraktilværdier*. Her ser vi fx at ud for 10% står der 79..89 under Talområde. Det betyder at de laveste 10% af kørselsresultaterne strækker

sig fra 79 op til 89. I 10% af kørslerne har vi altså fået et antal af Kronekast som ligger fra 79 og op til 89. Det betyder at *10%-fraktilen* i materialet er på 89.

Vi ser også at vore resultater i 75% af kørslerne har givet et resultat fra 79 op til 104. 75%-fraktilen er derfor 104, dvs. i 75% af kørslerne har vi fået et antal af Kronekast som er på 104 og derunder.

Øverst i skærmvinduet er der to felter hvor vi kan indtaste tal. I feltet Talområde har vi indtastet 79..105 og vi ser nederst på skærmen at dette område svarer til 88% af resultaterne. 88%-fraktilen i datamaterialet er altså 105. Det stemmer med det vi allerede har set i sumtabellen.

I Procentfeltet har vi derefter indtastet 40. Programmet svarer at talområdet fra 79 til 99 indeholder de nederste 40% af Kroneantallene. 40%-fraktilen i materialet er derfor 99.

I talområdet kan du også indtaste *andele* i stedet for *antal*. Hvis du fx indtaster 0.48..0.52 vil programmet opfatte det som andele af røde kugler. Du vil derfor få at vide hvad chancen er for at en stikprøve indeholder fra 48% til 52% røde kugler.

8. Løs opgaver med KUGLE 1

1. Sannes nye spilleautomat
Sanne spiller fire spil på en spilleautomat hvor chancen for gevinst i hvert spil er 50%. Undersøg Sannes chance for:

(a) én gevinst (b) ingen gevinst (c) mindst to gevinster

2. Ti elever
Ti elever fra Sannes klasse udfører hver et spil på en spilleautomat hvor chancen for gevinst i hvert spil er 40%.
Hvad er chancen for at mindst fem af de ti elever får gevinst?
Hvad er risikoen for at højst to af eleverne får gevinst?

3. Chancen for seksere
I et spil kastes fem terninger.
Hvad er chancen for at få mindst én sekser?
Hvad er chancen for at få mindst to seksere?

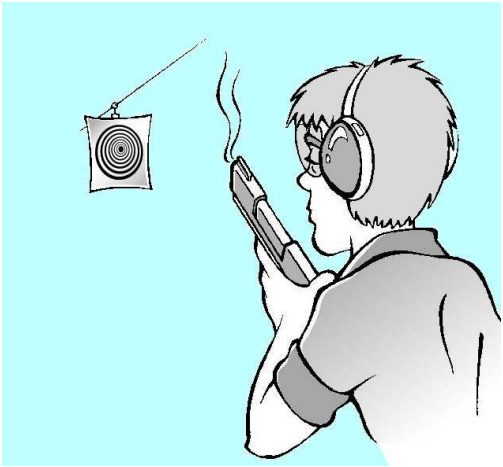
4. Kronekast
I et spil kastes ti mønter.
Hvad er chancen for at lige præcis fem af mønterne viser krone? Hvad er chancen for at flere end fem mønter viser krone?

5. Hvor er chancen størst?
Giv ved hjælp af KUGLE 1 et bud på følgende chancer:

(1) Chancen for mindst 3 seksere i 10 terningkast
(2) Chancen for mindst 6 seksere i 20 terningkast.

6. Et udvalg i klassen
I en skoleklasse med 15 piger og 10 drenge skal der ved lodtrækning nedsættes et udvalg på tre elever. Hvad er chancen for at udvalget kommer til at bestå af:

(1) 2 piger og 1 dreng
(2) 3 piger
(3) 1 pige og 2 drenge



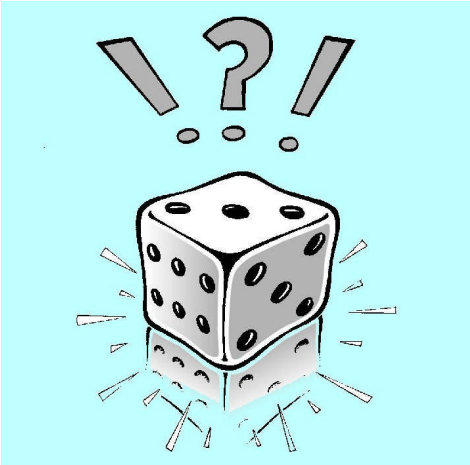
7. En mesterskytte
En mesterskytte påstår at have en træfsikkerhed på 80%.
Hvad er chancen for at han får mindst 8 træffere i 10 skud?
Hvad er chancen for at han får mindst 16 træffere i 20 skud?

8. Fravær i skolen
En statistik fra Malenes skole viser at i gennemsnit er ca. 10% af eleverne fraværende fra skolen.

Hvad er chancen for at der er mindst 4 fraværende i en klasse med 20 elever?

Hvad er chancen for at der slet ikke er nogen fraværende?

9. En opgave fra 1711
I en afhandling fra 1711 finder man denne opgave: Hvad er chancen for at få mindst 2 seksere i et kast med 8 terninger? Løs den ved hjælp af KUGLE 1.



10. Er terningen falsk?
Du laver en kvalitetskontrol af en terning: Du kaster terningen 10 gange. Hvis terningen ikke i de 10 kast har givet mindst én sekser, kasserer du den. Hvad er risikoen for at du kommer til at kassere en terning som i virkeligheden er god nok?

11. Gevinster i Lotto
I lotto udtrækkes 7 forskellige tal blandt tallene 1 til 36. Malene har udfyldt en lottorække ved at afkrydse 7 tal. Hvad er chancen for følgende (kør 500 forsøg):

(1) Malene rammer ikke nogen af de 7 udtrukne tal
(2) Malene rammer netop ét af de 7 tal
(3) Malene får gevinst, dvs. hun rammer mindst 4 af de 7 tal

12. Et lotteri
Sanne har købt 5 lodsedler i et lotteri som omfatter 25 sedler. Ved lodtrækning fordeles 3 gevinster blandt de 25 sedler. Hvad er chancen for at Sanne vinder mindst én af gevinsterne? Hvad er risikoen for at hun ikke får nogen gevinst?

13. Lille chance, men mange forsøg
Sanne deltager i et spil hvor der kun er 1% chance for gevinst. Hvor mange spil skal hun udføre for at have 50% chance for en gevinst? Prøv dig frem ved hjælp af KUGLE 1.

14. Vi spiller om prisen
Ved en byfest kan man rafle om prisen når man køber en vare. Man får lov til at kaste fire terninger og får da følgende afslag i prisen:

1 sekser: 5%	2 seksere: 10%
3 seksere: 25%	4 seksere: 100%

Beregn chancen for de fire muligheder.

1. Sanne og Malene bruger KUGLE 2

Sanne og Malene diskuterer et spil: I spillet skal du trække en seddel fra en æske. I æsken er der 50 sedler, og der er gevinst på 5 af dem. Den seddel du trækker, skal lægges tilbage i æsken før næste udtrækning.

Det koster 1 krone at trække en seddel fra æsken. Du spiller indtil du får gevinst i spillet.

Hvor mange penge skal du mon bruge for at få en gevinst? Hvad er chancen for at du kan nøjes med 3 kroner? Eller 5 kroner?

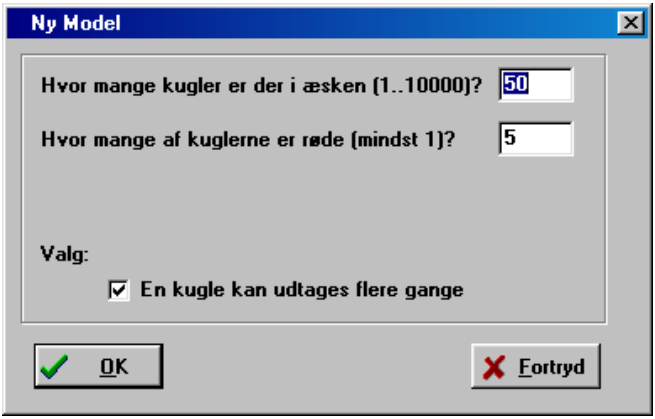
Hvad er risikoen for at du skal betale mere end 10 kroner før du udtrækker en seddel med en gevinst?

Sanne og Malene vil undersøge disse spørgsmål ved hjælp af programmet KUGLE 2. Med dette program kan de opstille en kuglemodel for den forelagte chancesituation.

I kuglemodellen i KUGLE 2 er der lige som i KUGLE 1 en æske med et antal kugler hvoraf nogle er røde. Fra æsken trækkes kugler, én ad gangen, *indtil der udtrækkes en rød kugle*. Programmet holder styr på hvor mange forsøg der skal til for at give en rød kugle.

I KUGLE 2 er vi altså interesseret i at vide hvor længe vi skal vente på at få den første røde kugle. Så snart den bliver udtrukket, standser spillet. Man kan sige at KUGLE 2 er en "ventemodel", vi venter på den *første røde kugle*.

Sanne og Malene går ind i programmet KUGLE og vælger *Ny model.* Derefter vælger de KUGLE 2. På skærmen kan de nu give oplysninger om den kuglemodel de vil anvende.



Her har de fortalt KUGLE 2 hvad kuglesituationen er: Der er 50 kugler i æsken og 5 af dem er røde. Udtagelsen foregår *med* tilbagelægning: Samme kugle kan udtages flere gange.

Programmet giver dem ligesom KUGLE 1 en meddelelse om hvilken kuglemodel de har indtastet.

Denne model vil de kort notere ved: K2(50, 5, ja)

Det betyder at de benytter KUGLE 2 med 50 kugler hvoraf 5 røde, og samme kugle kan udtages flere gange.

Derefter giver programmet nogle muligheder de kan vælge mellem. De vælger en *Prøvekørsel*.

KUGLE 2 udtager nu kugler indtil der trækkes en rød kugle. Her er resultatet af prøvekørslen:

```
Kugle-Model:

I æsken findes kugler nr. 1..50
          Røde kugler nr. 1..5

Et eksperiment består i at udtage kugler
indtil der udtages en rød kugle

Samme kugle kan udtages flere gange.

Prøvekørsel:
      13    42    14    49    21    38    25    16    27    24
      37    39    12     3
```

På skærmen vil du se at det sidste kuglenummer er rødt. Der skulle i dette tilfælde foretages 14 udtagelser før der blev udtrukket en rød kugle.

De udfører endnu en prøvekørsel:

```
Kugle-Model:

I æsken findes kugler nr. 1..50
          Røde kugler nr. 1..5

Et eksperiment består i at udtage kugler
indtil der udtages en rød kugle

Samme kugle kan udtages flere gange.

Prøvekørsel:
      29    25     9    42    21    10    42    46     9    33
       6     9    14    41    22    41    23    26    24    17
      16    24    34     6    26    36    37     7    36     1
```

Her viser det sig at de måtte foretage 30 udtagelser før de fik en rød kugle.

En serie af eksperimenter

Sanne og Malene går nu over til *Kørsel*. De lader KUGLE 2 udføre 20 eksperimenter. Her er tallene fra de 20 eksperimenter:

```
Antal kugler der blev udtaget i de 20 eksperimenter

14      10       2       3       4      17       2       4      14       9
12      16      29      15       9       4       6       4       4       5
```

Vær opmærksom på at det vi ser på skærmen er *antallet af kugler* der måtte udtages før de fik en rød kugle. I det første eksperiment fik de altså en rød kugle i den fjortende udtagelse.

I det næste eksperiment måtte der foretages 10 udtagelser før der kom en rød kugle, men derefter kom der en rød kugle allerede i anden udtagelse.

De vælger nu *Oversigt*: Oversigten fremlægges i en sumtabel. Af tabellen kan de se at der ikke var nogen af de 20 eksperimenter hvor der kom en rød kugle allerede i første udtrækning. Men i to eksperimenter kom der en rød kugle i anden udtrækning.

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
2	2	10.00	10.00
3	1	5.00	15.00
4	5	25.00	40.00
5	1	5.00	45.00
6	1	5.00	50.00
9	2	10.00	60.00
10	1	5.00	65.00
12	1	5.00	70.00
14	2	10.00	80.00
15	1	5.00	85.00
16	1	5.00	90.00
17	1	5.00	95.00
29	1	5.00	100.00

```
Udført i alt: 20 eksperimenter

 Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment:    9.15
```

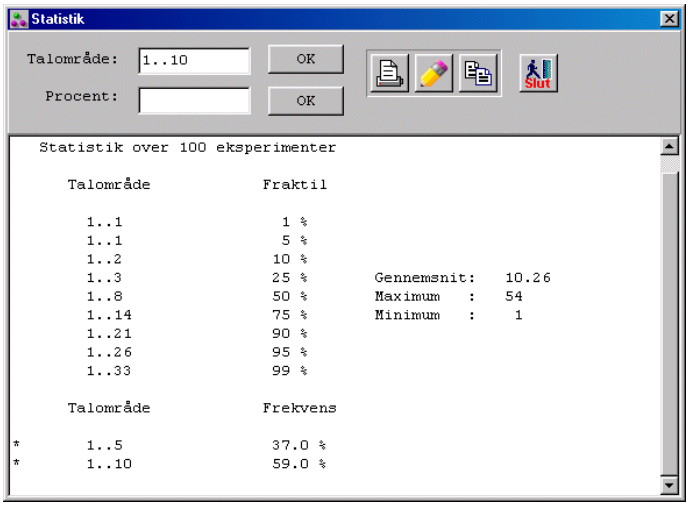
I den højre kolonne i sumtabellen kan de se at de i 50% af eksperimenterne kunne klare sig med at udtage op til 6 kugler for at få en rød kugle. Af den korte serie kunne de altså komme til det resultat at der er 50% chance for at man kan klare sig med at betale højst 6 kroner for at få gevinst i spillet.

Men fra deres arbejde med KUGLE 1 ved Sanne og Malene at de skal være forsigtige med at udtale sig på grundlag af blot 20 eksperimenter. Serien viser jo også at de kunne komme ud for at skulle betale 29 kr. for at få gevinst.

Den nederste linje i sumtabellen fortæller at der i gennemsnit måtte udføres 9.15 kast for at få gevinst. Det kostede altså ca. 9 kr. i gennemsnit at få gevinst i spillet.

En ny kørsel

Sanne og Malene foretager nu en kørsel af en serie på 100 eksperimenter med modellen: K2(50, 5, ja). Vi springer oversigten over og går direkte til Statistik-knappen:



Til højre i vinduet ser de at de i gennemsnit måtte bruge 10.26 udtagelser for at få en rød kugle. Det højeste antal udtagelser der forekommer er helt oppe på 54. Og det mindste antal der forekommer, er 1. Da kom der altså en rød kugle allerede i første udtrækning.

Af tabellen kan de fx se at 50%-fraktilen (medianen) svarer til 8 udtagelser. Det vil sige at de i 50% af eksperimenterne kunne klare sig med op til 8 udtagelser for at få en rød kugle.

I talområde-feltet foroven har de indtastet området 1..5. Programmet svarede med tallet: 37%. Det vil sige at de i 37% af eksperimenterne kunne klare sig med fra 1 til 5 udtagelser for at få en rød kugle. - De har derefter indtastet området 1..10 og får her svaret: 59% Det betyder at de har 59% chance for at klare sig med højst 10 udtagelser.

Prøv selv

1. Gå ind i KUGLE 2 og indtast modellen K2(50, 5, ja). Kontroller at programmet viser den rigtige model på skærmen. Gå derefter til knappen *Ny kørsel* og bed om 100 eksperimenter. Klik på Oversigt-knappen.

2. Undersøg hvad chancen er for at du kan nøjes med 3 udtagelser for at få en rød kugle. Og besvar følgende spørgsmål:

   Hvad er chancen for at du kan klare dig med 5 udtagelser? Hvad er chancen for at du kan klare dig med 10 udtagelser? Hvad er risikoen for at du skal bruge mere end 20 udtagelser?

3. ***Ny kørsel***. Foretag en ny kørsel, denne gang med 500 eksperimenter. Besvar igen spørgsmålene om hvad de forskellige chancer er. Print oversigten ud.

   Klik på Graf-knappen og print grafen ud.

4. ***Gentag***. Klik på Gentag-knappen. Udprint den nye oversigt. Undersøg om den er meget forskellig fra den du allerede har udprintet. Udprint også den nye graf og sammenlign med den tidligere.

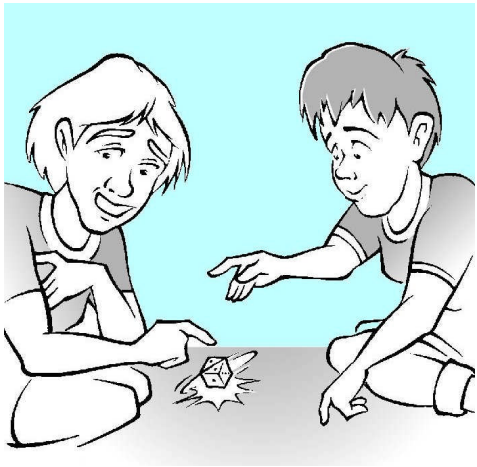
5. ***Udtagelse uden tilbagelægning***. Afprøv modellen K2(50, 5, nej): Udfør 100 eksperimenter og se på oversigtens sumtabel. Hvad er nu chancen for at du kan klare dig med 3 udtagelser? Med 5 udtagelser?

   Og hvad er risikoen for at du må bruge mere end 10 udtagelser? Mere end 20 udtagelser?

6. ***Hvor mange udtagelser?*** Hvad er det største antal udtagelser der vil kunne forekomme når du kører modellen K2(50, 5, nej)?

   Prøv at køre 1000 eksperimenter og undersøg hvor store antal udtagelser der forekommer.

2. Hvor svært er det at slå en ener?



I et terningspil skal man slå en ener for at få en brik i spil. Hvad er chancen for at man klarer sig med 3 kast? Med 5 kast? Hvad er risikoen for at man skal bruge mere end 10 kast?

Sanne og Malene undersøger disse spørgsmål ved hjælp af KUGLE 2. De kan her benytte kuglemodellen

K2 (6, 1, ja).

Den svarer til at der er 6 kugler i æsken, én for hver af de 6 mulige øjental på terningen. En af æskens kugler er rød, den svarer til at de kaster en ener.

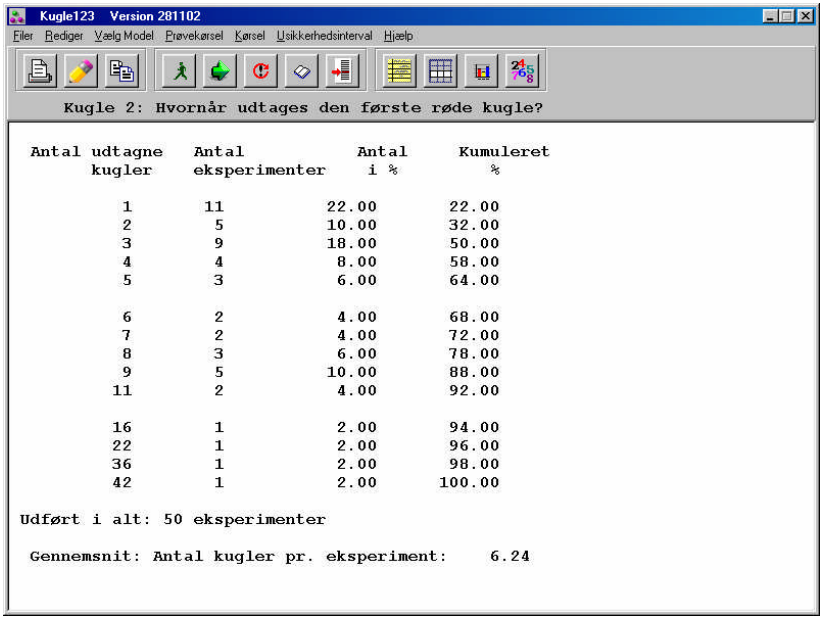
De foretager først en prøvekørsel af modellen. Den giver følgende resultat:

Brug KUGLE 2!

```
Kugle-Model:

I æsken findes kugler nr. 1..6
   Den røde kugle har nr. 1

Et eksperiment består i at udtage kugler
indtil den røde kugle udtages

Samme kugle kan udtages flere gange.

Prøvekørsel:
        4      5      5      2      5      3      3      1
```

I den ottende udtagelse kom den røde kugle ud.

De lader nu KUGLE 2 køre 50 eksperimenter. Her er oversigten over resultaterne:



Af oversigten ser de at de kunne klare sig med højst 3 udtagelser i 50% af eksperimenterne. I spillesituationen betyder det at de har 50% chance for at få en brik i spil i løbet af 3 kast.

De ser også at de kunne klare sig med højst 5 udtagelser i 64% af eksperimenterne.

Endvidere ser de af oversigten at de i seks eksperimenter måtte bruge mere end 10 udtagelser. Det svarer til at der er en risiko på 12% for at man i spillet skal kaste mere end 10 gange for at få en brik i spil.

Nederst på oversigten ser de at der i gennemsnit skulle udtages 6,24 kugler for at udtrække en rød kugle. De kan altså regne med at de i gennemsnit skal udføre ca. 6 kast for at få den ønskede ener.

Det kan ikke overraske dem. Der er jo 6 muligheder ved et terningkast, og de kan kun bruge én af dem. Men selv om de i gennemsnit skal bruge over 6 kast, ser de af oversigten at der er store chancer for at de kan klare dig med mindre. - På den anden side kan de også komme ud for at skulle udføre mere end 40 kast, selv om de i gennemsnit altså kun skulle bruge omkring 6.

Prøv selv

1. Lad KUGLE 2 udføre 100 eksperimenter med modellen K2(6, 1, ja). Giv herefter dit bud på følgende sandsynligheder fra terningspillet:

    1. Chancen for at du kan klare dig med 3 kast
    2. Chancen for at du kan klare dig med 5 kast
    3. Risikoen for at du skal bruge mere end 10 kast.

Brug KUGLE 2!

2. I et terningspil får man en brik i spil hvis man kan slå en ener eller en toer. Giv ved hjælp af en K2-model et bud på følgende sandsynligheder:

   1. Chancen for at man kan få en brik i spil med højst 2 kast
   2. Chancen for at man kan få en brik i spil med højst 4 kast
   3. Chancen for at man skal bruge mere end 5 kast.

   Hvor mange kast skal du i gennemsnit regne med for at få en brik i spil?

3. Løs opgaver med KUGLE 2

1. Et lykkehjul
Malene vil spille på et lykkehjul i Tivoli. Lykkehjulet har 24 numre, og Malene spiller i hvert spil på 5 af numrene.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad chancen er for at Malene vinder i løbet af de første 3 spil.

Og hvad er chancen for at hun vinder i løbet af de første 5 spil?

Hvad er risikoen for at hun ikke vinder i løbet af de første 10 spil?

2. Udtræk et es
Fra et sæt spillekort på 52 kort udtages et kort ad gangen indtil der udtages et af de fire esser. Udtagelsen foretages uden tilbagelægning.

Find ved hjælp af en kuglemodel sandsynligheden for at der skal udtages over 10 kort for at få et es. Og find sandsynlig-

heden for at der ikke skal udtages mere end 5 kort for at få et es.

3. Er det bedst at være først?
I en pose er der tre hvide og én rød kugle. Sanne og Malene udtager på skift en kugle fra posen, uden tilbagelægning. Den der udtager den røde kugle har vundet.

Sanne giver Malene lov til at trække først. Find ved hjælp af en kuglemodel sandsynligheden for at det bliver Malene der vinder spillet.

4. Find den rigtige nøgle
Du har en nøglering med 10 nøgler. Kun én af nøglerne passer til låsen.

Du udvælger tilfældigt én nøgle ad gangen og prøver indtil du får gevinst.

Hvad er chancen for at du kan klare dig med 3 forsøg hvis afprøvningen foregår "med tilbagelægning"?

Hvad er chancen for at du kan klare dig med 3 forsøg hvis afprøvningen foregår "uden tilbagelægning"?

Hvor mange forsøg skal du i gennemsnit regne med at udføre i de to situationer for at finde den nøgle der passer til låsen?

5. Roulette
Du spiller på en roulette hvor der er 37 mulige resultater: 0..36. I hvert spil sætter du din indsats på dit lykketal nr. 13.

Find ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at dit lykketal kommer ud i løbet af de første 10 spil.

2. Chancen for at dit lykketal kommer ud i løbet af de første 20 spil.

3. Risikoen for at dit lykketal *ikke* kommer ud i løbet af de første 50 spil.

6. Toldeftersyn
I tolden bliver 10% af de rejsende udvalgt til et nærmere toldeftersyn.

I løbet af en sæson passerer du tolden 10 gange. Hvad er chancen for at du ikke nogen af de 10 gange bliver udvalgt til toldeftersyn?

7. Hvornår kommer sedlen ud?
I et lotteri er der 20% chance for at din lotteriseddel bliver udtrukket.

Beregn ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at din seddel kommer ud i løbet af 3 lotterier.

2. Chancen for at din seddel kommer ud i løbet af 6 lotterier.

3. Risikoen for at din seddel ikke kommer ud i løbet af 10 lotterier.

8. To seksere
I et kast med to terninger er der en chance på 1/36 for at få to seksere.

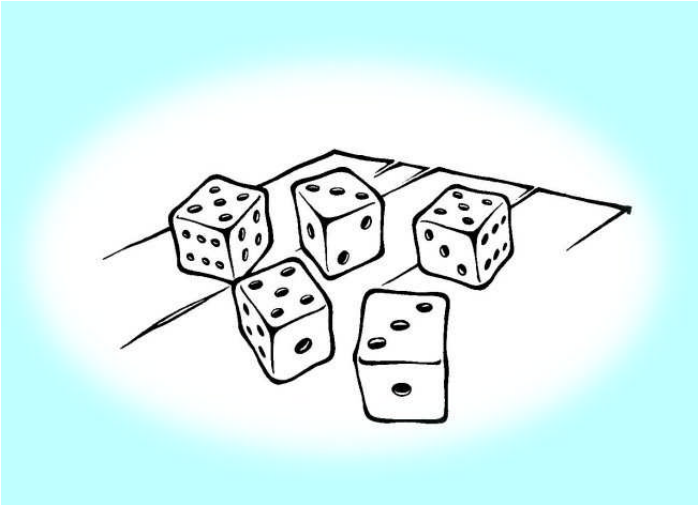
Beregn ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at få "To seksere" i løbet af de første 10 kast.
2. Chancen for at få "To seksere" i løbet af de første 18 kast.
3. Risikoen for ikke at få "To seksere" i løbet af de første 36 kast.

9. To par
I et kast med 5 terninger er der en sandsynlighed på 23% for at få "To par", som fx 35653.

Beregn ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at få "To par" i løbet af de første 3 kast.
2. Chancen for at få "To par" i løbet af de første 5 kast.
3. Risikoen for ikke at få "To par" i løbet af 10 kast.



10. Fuldt hus
I et kast med 5 terninger er der en sandsynlighed på 4% for at få "Fuldt hus", som fx 22333 eller 33555.

Beregn ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at få "Fuldt hus" i løbet af de første 10 kast.
2. Chancen for at få "Fuldt hus" i løbet af de første 20 kast.
3. Risikoen for ikke at få "Fuldt hus" i løbet af 50 kast.

11. To ens
Hvad er chancen for at et kast med to terninger giver to ens øjental?

Beregn dernæst ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at få "To ens" i løbet af de første 5 kast.
2. Risikoen for ikke at få "To ens" i løbet af 10 kast.

12 . Tombola
I en tombola er der 1000 sedler, hvoraf 50 med gevinst. Hvad er chancen for at du får mindst én gevinst hvis du køber:

1. 10 sedler
2. 20 sedler
3. 30 sedler
4. 40 sedler
5. 50 sedler
6. 100 sedler.

13. Hvornår bliver cyklen stjålet?
I et boligkvarter bliver 18% af cyklerne stjålet inden for en periode på et år.

Hvad er chancen for at en cykel kan overleve 5 år uden at blive stjålet?

14. Kontrol i S-toget
I S-togene foretages der stikprøvekontrol af billetterne. Til kontrollen udtages 5% af de rejsende.

Hvad er sandsynligheden for at du ikke kommer ud for en kontrol i løbet af de næste 10 ture du tager med S-tog?

Og hvad er sandsynligheden for at du ikke kommer ud for en kontrol i løbet af 50 ture?

15. Skolebørn kommer til skade
Af Danmarks skolebørn kommer hvert skoleår 10% til skade i klasseværelset, i skolegården eller på vej til og fra skole.

Beregn ved hjælp af en kuglemodel:

Chancen for at ingen af eleverne i en klasse på 15 elever kommer til skade i løbet af næste skoleår.

4. Sjældne hændelser

Ved hjælp af KUGLE 2 vil Sanne og Malene se på sjældne hændelser og deres forekomst over en tidsperiode. Det kan fx dreje sig om at få en stor gevinst i klasselotteriet. Hvor mange år vil der gå før deres seddel kommer ud? Og kan det betale sig at spille videre på en seddel som lige har fået en stor gevinst?

En sjælden hændelse kan også være noget ubehageligt. En sjælden ulykke er lige indtruffet. Hvornår kan det frygtes at den indtræffer igen?

Megen overtro knytter sig til forekomsten af sjældne hændelser: *"Når en sjælden hændelse lige er indtruffet, så må det vare længe inden den forekommer igen."* Det er denne overtro der giver sig udslag i rådet om at man i et tordenvejr bør søge ly under et træ som tidligere er blevet ramt af lynet. Træet har jo allerede været udsat for den sjældne hændelse som et lynnedslag er, derfor må det nu være et ret sikkert tilflugtssted! Hvad mener du om det?

De bruger KUGLE 2
Sanne og Malene vil ved hjælp af kuglemodeller se nærmere på de sjældne hændelser. De ser først på en hændelse som har en chance (eller risiko) på 5% for at forekomme inden for en bestemt tidsperiode, fx en periode på 1 år. Ved anvendelse af KUGLE 2 vil de nu undersøge denne hændelse nærmere.

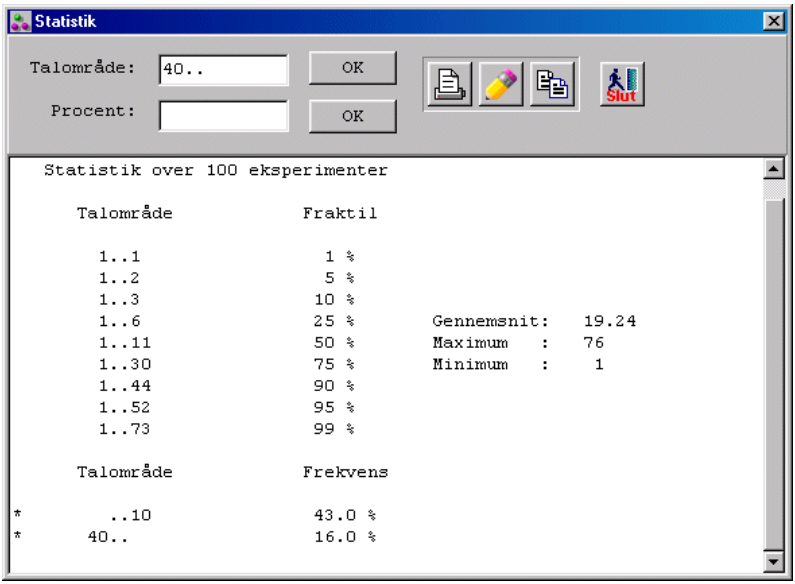
En sandsynlighed på 5% svarer til 1 mulighed ud af 20. De kan derfor vælge en kuglemodel med 20 kugler hvoraf der er én rød kugle. Kugleudtagelsen foregår med tilbagelægning, således at der ved hver udtagelse er en chance på 5% for at trække en rød kugle.

Kuglemodellen afspejler den forelagte chancesituation på følgende måde: Hver kugleudtagelse svarer til at vi ser på et tidsforløb på et år. Hvis den udtagne kugle er rød, forekommer den sjældne hændelse inden for det pågældende år. Hvis den udtrukne kugle ikke er rød, forekommer hændelsen ikke i det betragtede år.

I aviser kan man se en hændelse der har en chance på 5% for at forekomme inden for et år, omtalt som en hændelse der forekommer en gang for hver 20 år. Vi vil nu se hvor meget hold der er i det.

Vi lader KUGLE 2 udføre 100 eksperimenter med den opstillede model K2(20, 1, ja).

Her er resultaterne fra kørslen som vi finder dem ved et klik på Statistik-knappen:



Til højre i oversigten ser vi at gennemsnittet af udtagelser i de 100 eksperimenter er 19.24 Det svarer til at den sjældne hændelse i gennemsnit forekommer med ca. 19 års mellemrum. Vi ser også at 50%-fraktilen er 11, dvs. i halvdelen af eksperimenterne er den sjældne hændelse indtrådt i løbet af de første 11 år.

Men der er store variationer i antallet af år vi måtte vente på den sjældne hændelse: Fra 1 år op til 76 år.

I 10 eksperimenter indtraf den sjældne hændelse allerede i løbet af de første tre år. Og i fem tilfælde måtte vi vente i mere end 52 år før hændelsen indtraf!

Den forventede periode
En hændelse der har en chance på 5% - altså 1 ud af 20 - for at forekomme inden for et år, kan forventes at forekomme i gennemsnit én gang for hver 20 år. Dette kalder vi den *forventede periode* for hændelsens forekomst. I vore 100 eksperimenter så vi at den gennemsnitlige ventetid var 19.24, altså kun lidt mindre end den forventede periode. En ny kørsel af 100 eksperimenter vil sikkert også give et resultat der kun afviger lidt fra tallet 20. Afvigelser på op til 10% fra den forventede periode vil være helt almindelige ved kørsler der ikke omfatter mere end 100 eksperimenter.

Ved hjælp af Statistik-knappen har vi beregnet hvad chancen er for at vi kan klare os med højst 10 eksperimenter, og hvad risikoen er for at vi må bruge mindst 40 eksperimenter. Vi ser at 43% af eksperimenterne krævede 10 udtagelser eller derunder. Det svarer til at den sjældne hændelse i 43% af tilfældene indtraf allerede inden for de første 10 år, altså inden for den første halvdel af den forventede periode.

Vi ser også at 16 af eksperimenterne krævede mindst 40 udtagelser. Det betyder at i 16% af tilfældene måtte vi vente mindst 40 år på at den sjældne hændelse indtraf. Vi måtte altså i 16%

af tilfældene vente længere end det dobbelte af den forventede periode.

Disse resultater er typiske for forekomsten af sjældne hændelser. Hvis en sjælden hændelse forventes at forekomme i gennemsnit 1 gang for hver 20 år, så er der:

> Ca. 40% chance for at hændelsen forekommer inden for de første 10 år, altså inden for første halvdel af den forventede periode.
>
> Ca. 15% chance for at hændelsen først forekommer efter forløbet af 40 år, altså efter det dobbelte af den forventede periode.

Disse kendsgerninger vil vi kalde *„40-15 reglen for sjældne hændelser“:*

> ***40-15 reglen***
> Der er ca. 40% chance for at den sjældne hændelse indtræffer allerede inden for den første halvdel af den forventede periode.
>
> Der er ca. 15% chance for at den sjældne hændelse først indtræffer efter forløbet af det dobbelte af den forventede periode.

Ved vurderingen af sjældne hændelsers forekomster kan denne regel være en god hjælp.

Er modellen den rigtige?
Når vi her har belyst sjældne hændelsers forekomst ved anvendelse af kuglemodeller, er der alene tale om hændelser som kan beskrives på passende vis ved modeller af denne art. Det vil sige at hændelsens forekomst bestemmes ved udtagelse af kugler, og ved hver enkelt udtagelse er der samme

chance for at den pågældende hændelse indtræffer. Der er altså ikke tale om situationer hvor chancen for at den betragtede hændelse indtræffer ændrer sig fra udtagelse til udtagelse.

Det kan ikke altid umiddelbart afgøres om hverdagens sjældne hændelser kan beskrives ved den slags kuglemodeller. Ved ulykker der forårsages af personers træthed eller af materialers nedslidthed, kan det vel tænkes at risikoen for ulykkens forekomst bliver større og større for hver tidsenhed der forløber.

På den anden side kan der også være tale om sjældne hændelser hvor personer får mere og mere erfaring med at håndtere den forelagte situation. Det kan bevirke at hændelsens sandsynlighed bliver mindre og mindre jo længere tid der går.

Der må derfor som altid hvor der gøres brug af matematiske modeller, foretages overvejelser over modellens rimelighed før den anvendes på den praktiske situation.

5. Opgaver i sjældne hændelser

1. Et større antal eksperimenter
Lad KUGLE 2 udføre 500 eksperimenter med modellen

K2(20,1, ja)

Undersøg om resultaterne stemmer med „40-15 reglen“.

2. Én gang pr. 10 år
Undersøg ved hjælp af en kuglemodel forekomsten af en sjælden hændelse som i gennemsnit forekommer én gang for hver 10 år. Undersøg om resultaterne også her stemmer med „40-15 reglen“.

3. Én gang pr. 50 år
Undersøg ved hjælp af en kuglemodel forekomsten af en sjælden hændelse som i gennemsnit forekommer én gang for hver 50 år. Undersøg om resultaterne stemmer med „40-15 reglen“.

4. Én gang pr. 100 år
Undersøg ved hjælp af en kuglemodel forekomsten af en sjælden hændelse som i gennemsnit forekommer én gang for hver 100 år. Undersøg om resultaterne stemmer med „40-15 reglen“.

5. Den sjældne hændelse indtræffer tidligt
Undersøg ved hjælp af kuglemodeller chancen for at en sjælden hændelse allerede indtræffer inden for den første fjerdedel af den forventede periode.

Og undersøg chancen for at den sjælden hændelse allerede indtræffer inden for den første tiendedel af den forventede periode.

6. En meget sjælden hændelse
En sjælden hændelse er vurderet til at ville indtræffe 1 gang for hver 1000 år.

Hvad er chancen for at den indtræffer i løbet af de første 100 år?

Hvad er chancen for at det varer mere end 2500 år inden den indtræffer?

7. Tre seksere
I et kast med tre terninger er chancen for „3 seksere“ 1 ud af 216. Hvad er chancen for at du kan slå „3 seksere“ i løbet af 25 kast? Hvad er risikoen for at du må kaste mere end 100 kast før du får „3 seksere“?

Hvor mange kast skal du udføre for at have 50% chance for at få „3 seksere“?

8. En ulykke på et atomkraftværk
På de amerikanske atomkraftværker blev en ulykke af en bestemt type vurderet til at ville indtræffe i gennemsnit 1 gang

for hver 2000 driftsår. Nu indtraf den første ulykke af denne art allerede da reaktorerne havde en samlet driftstid på 400 år.

Undersøg ved en kuglemodel hvad sandsynligheden er for at en ulykke indtræffer så tidligt. Har eksperternes risikovurdering efter din mening været forkert?

9. Yatzy
Sandsynligheden for at slå Yatzy, dvs. „5 ens“ i et kast med fem terninger er 1 ud af 1296.

Hvad er din chance for at slå Yatzy i løbet af 100 kast med fem terninger?

Hvad er din chance for at slå Yatzy i løbet af 200 kast?

Hvad er risikoen for at du skal bruge mere end 500 kast for at få Yatzy?

10. Den mest sjældne hændelse
I KUGLE 2 kan du arbejde med en kugleæske der indeholder op til 10 000 kugler. Den „mest sjældne hændelse“ du kan lade KUGLE 2 køre med er derfor en hændelse der har en sandsynlighed på kun 1 ud af 10 000 for at indtræffe. - Kør denne hændelse ved hjælp af KUGLE 2 (brug fx 1000 eksperimenter) og undersøg om „40-15 reglen“ også stemmer for denne sjældne hændelse.

11. Enarmet tyveknægt
På en spilleautomat har du en chance på 3 ud af 8000 for at få den store gevinst, *jackpot.* Undersøg ved hjælp af en kuglemodel:

Chancen for jackpot i løbet af 500 spil.
Chancen for jackpot i løbet af 1000 spil.
Risikoen for ikke at få jackpot i 2000 spil.

Brug KUGLE 2!

To maskiner af denne slags er opstillet ved siden af hinanden. På den ene er der spillet 100 spil siden sidste jackpot, på den anden er der spillet 5000 spil siden sidste jackpot. Hvilken maskine ville du vælge at spille på? Hvorfor?

6. Kommer ulykker ofte tre ad gangen?

Sanne og Malene har ladet KUGLE 2 efterligne modellen K2(100,1, ja). Den giver et billede af en hændelse, fx en ulykke, som forekommer i gennemsnit 1 gang for hver 100 år.

Her er en oversigt over resultaterne fra 100 eksperimenter. Antal kugler der måtte udtages for at få en rød kugle:

Brug KUGLE 2!

155	75	204	12	92	26	163	80	67	255
184	47	26	**12**	**22**	73	62	17	277	149
123	35	4	175	47	104	40	26	126	23
73	51	222	169	21	103	250	28	157	16
118	9	113	309	418	182	5	590	59	203
354	8	88	54	56	202	167	90	28	261
50	50	14	114	64	112	107	56	**8**	**21**
35	44	10	76	49	69	36	**24**	**14**	162
42	89	91	7	134	229	146	307	218	31
63	**4**	**7**	109	52	129	52	356	18	41

Første gang indtræffer ulykken efter 155 år, næste gang efter 75 år, så går der 204 år før den indtræffer, men derefter går der kun 12 år før ulykken indtræffer igen. - Prøv at finde det største tal i oversigten og det mindste.

Nogle gange sker det at der kun går kort tid mellem to forekomster af ulykken. Lad os sige, at „kort tid“ betyder en fjerdedel af den forventede periode, altså 25 år.

Undertiden sker det imidlertid at to tal i træk begge er under 25. Det er disse situationer der er fremhævet i oversigten.

I det første af de understregede tilfælde er der 12 år mellem to forekomster af ulykken, og dernæst går der kun 22 år inden den forekommer igen:

Fra 1. forekomst til 2. forekomst: 12 år
Fra 2. forekomst til 3. forekomst: 22 år

dvs. at ulykken forekommer 3 gange inden for blot 34 år.

Da man véd at der i gennemsnit vil gå ca. 100 år mellem to forekomster af ulykken, kan det overraske at der nu er 3 forekomster på bare 34 år.

Den slags overraskende resultater lægger man mærke til, og på grundlag af sådanne observationer kan det kendte ordsprog være opstået:

Ulykker kommer ofte tre ad gangen!

Af oversigten kan du se at der er fire tilfælde, hvor vi har en sammenklumpning af tre ulykker. Fire i løbet af 100 eksperimenter er jo ikke mange, men netop fordi disse sammenklumpninger virker overraskende, bliver man opmærksom på dem.

Sanne og Malene undersøger sagen
Er der grund til at undre sig over sådanne sammenklumpninger? Sanne og Malene vil undersøge sagen. Og du kan sagtens lave din egen undersøgelse:

1. Kør nogle gange 100 eksperimenter med kuglemodellen K2(100, 1, ja). Udskriv resultaterne, og undersøg hvor ofte der forekommer en sammenklumpning af 3 ulykker (dvs. to tal i træk som begge er under 25).

2. Se på en ulykke der forekommer i gennemsnit 1 gang for hver 200 år. Lad KUGLE 2 køre 100 eksperimenter. Tæl op

hvor tit der her forekommer sammenklumpninger af 3 ulykker. Husk at sammenklumpning her betyder to tal i træk som begge er under 50.

3. Kør nogle andre kuglemodeller hvor du selv bestemmer hvor sjælden den betragtede ulykke skal være. Undersøg også her hvor tit der er sammenklumpninger af 3 ulykker.

Hvilke kommentarer har du nu til ordsproget: „Ulykker kommer ofte 3 ad gangen“. Er der noget om snakken?

1. Modellen KUGLE 3

I et terningspil skal spillerne kaste med en terning. Hver spiller skal kaste terningen indtil han har opnået at få både en ener og en toer. Det er ligegyldigt hvilket af de to øjental der kommer først. For hvert kast der udføres, skal spilleren betale med et spillemærke.

Hvad er mon chancen for at en spiller kan nøjes med at betale 5 spillemærker? Og hvad er risikoen for at han må af med mere end 10 spillemærker for at opnå de to eftertragtede øjental?

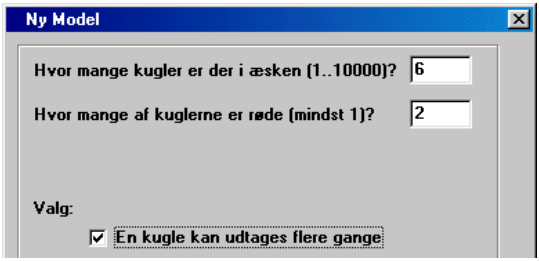
Sanne og Malene vil undersøge spillechancerne ved hjælp af programmet KUGLE 3.

I KUGLE 3 foreligger der en kuglemodel med en æske med kugler. Lige som i KUGLE 1 og KUGLE 2 er nogle af æskens kugler røde.

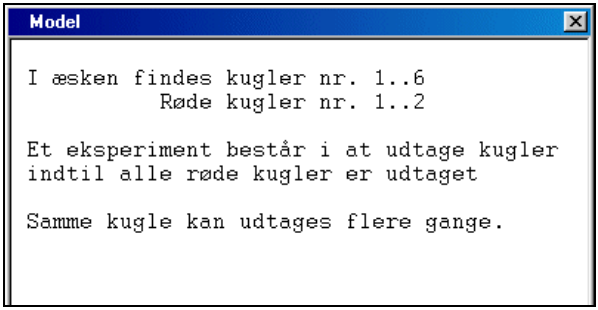
Fra æsken udtages kugler én for én indtil *alle røde kugler er udtaget.* Så snart alle røde kugler har været udtaget, stopper spillet. Man kan sige at KUGLE 3 er en "ventemodel ", vi venter på den sidste røde kugle.

Sanne og Malene går ind i programmet KUGLE 123 og vælger Ny model. Derefter vælger de KUGLE 3. På skærmen kan de nu give oplysninger om den kuglemodel de vil anvende.

Brug KUGLE 3!



Her har de fortalt KUGLE 3 hvad situationen er: Der er 6 kugler i æsken og 2 af dem er røde. Udtagelsen foregår med tilbagelægning. Samme kugle kan udtages flere gange.



Programmet giver dem som sædvanlig en meddelelse om hvilken kuglemodel de har indtastet. Denne model vil vi kort notere ved:

K3(6, 2, ja)

Det betyder at de benytter KUGLE 3 med 6 kugler hvoraf 2 er røde, og samme kugle kan udtages flere gange.

De foretager nu en prøvekørsel af den valgte model:

```
Prøvekørsel:

Der blev foretaget

          19

udtagelser før alle røde kugler var udtaget
```

Prøvekørslen viser at der blev foretaget 19 udtagelser før begge de røde kugler var blevet udtaget. Hvis vi oversætter det til terningkast, så betyder det at de måtte kaste terningen 19 gange før de havde fået både en ener og en toer.

De vil nu se hvordan det ser ud når de udfører et større antal forsøg.

En serie af eksperimenter
De går over til *Kørsel*. De lader KUGLE 3 udføre 20 eksperimenter. Her er tallene fra de 20 eksperimenter:

På skærmen ser de hvor mange kugler der måtte udtages før begge de røde kugler var udtaget. De kan se at det mindste antal var 2 udtagelser, det betyder jo at begge udtagelser har givet en rød kugle. – Det største antal de måtte udtage, var 16 kugler.

De vælger nu *Oversigt*:

Brug KUGLE 3!

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
2	2	10.00	10.00
3	3	15.00	25.00
6	2	10.00	35.00
7	1	5.00	40.00
8	1	5.00	45.00
9	1	5.00	50.00
10	2	10.00	60.00
11	1	5.00	65.00
13	3	15.00	80.00
14	1	5.00	85.00
15	2	10.00	95.00
16	1	5.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 8.95

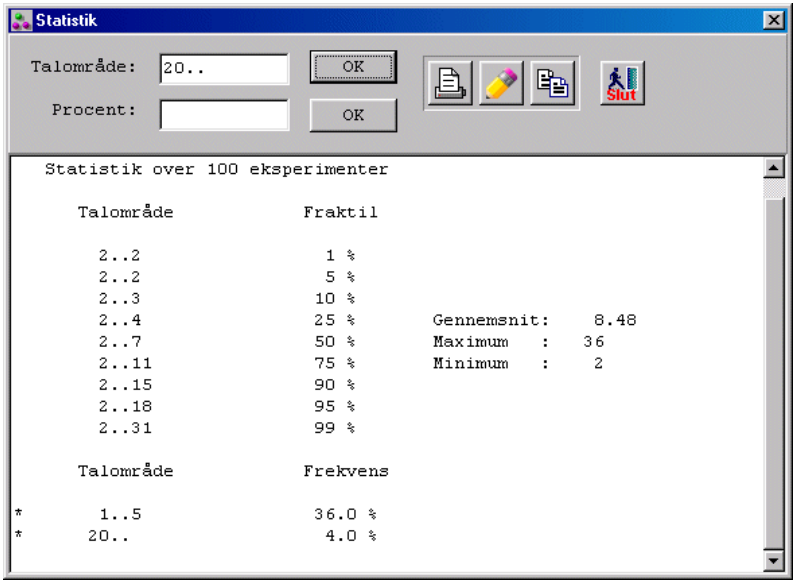
Oversigten fremlægges i en sumtabel. Af tabellen kan de se at der var 2 af de 20 eksperimenter hvor de kunne klare sig med 2 udtagelser. Tabellen viser også at der var 7 eksperimenter hvor de måtte udføre mere end 12 udtagelser før begge de to røde kugler var udtaget.

Den nederste linje fortæller at de i gennemsnit måtte foretage næsten 9 udtagelser før begge de røde kugler var udtaget.

De henter nu data fra 100 eksperimenter.

De foretager en kørsel af en serie på 100 eksperimenter med modellen: K3(6, 2, ja).

De springer oversigten over og går til Statistik-knappen:



Til højre i vinduet ser de at de i gennemsnit måtte bruge 8.48 udtagelser for at få begge de røde kugler. Det største antal udtagelser var 36, det mindste antal var 2.

Af tabellen kan de se at 50%-fraktilen (medianen) er 7. Det vil sige at de i 50% af eksperimenterne kunne klare sig med op til 7 udtagelser for at få begge de røde kugler.

I talområde-feltet indtastede de området 1..5 og programmet svarede med 36%. Det vil sige at de i 36% af eksperimenterne kunne klare sig med op til 5 udtagelser. De har derefter indtastet området fra 20 og opefter. Programmet fortæller at chancen for at skulle foretage 20 udtagelser eller derover er 4%.

Prøv selv

1. Gå ind i KUGLE 3 og indtast modellen K3(6,2, ja). Kontroller at programmet viser den rigtige model på skærmen.

Gå derefter til knappen *Ny kørsel* og bed om 100 eksperimenter. *Klik på Oversigt-knappen* eller *Statistik-knappen.*

2. Undersøg hvad chancen er for at du kan klare dig med 5 udtagelser? Med 10 udtagelser? Og hvad er chancen for at der skal bruges mere end 20 udtagelser?

3. Foretag en ny kørsel, denne gang med 500 eksperimenter. Besvar igen spørgsmålene om hvad de forskellige chancer er. Print Statistikken ud. Klik på *Graf-knappen*, og print grafen ud.

2. Et lotteri

I Malenes klasse laver eleverne et lille lotteri. Der er 25 sedler, og der er gevinst på 3 af dem.

Da Malene køber sin lodseddel, ser hun at der allerede er solgt 13 sedler. Hvad er mon risikoen for at alle gevinstsedler allerede er solgt?

Hun vil besvare spørgsmålet ved hjælp af KUGLE 3. Hun benytter modellen K3(25, 3, nej).

Der er jo 25 sedler og 3 af dem er med gevinst. Samme seddel kan ikke sælges flere gange, så Malene benytter kugleudtagning uden tilbagelægning.

Hun lader nu KUGLE 3 udføre 20 eksperimenter.

Af oversigten nedenfor kan hun se at 8 er det mindste antal udtagelser der skulle til før alle tre røde kugler var udtaget. Men der var også fem eksperimenter hvor der måtte hele 25 udtagelser til. Flere end 25 udtagelser kan hun i øvrigt ikke komme ud for, der er jo kun 25 kugler i æsken.

Oversigten fortæller at i 25% af eksperimenterne var alle de røde kugler udtaget allerede når der var foretaget 13 udtagelser.

Her har vi så et svar på Malenes problem: Der er en risiko på ca. 25% for at alle gevinstsedler er solgt blandt de 13 første sedler.

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
8	1	5.00	5.00
10	1	5.00	10.00
12	2	10.00	20.00
13	1	5.00	25.00
16	1	5.00	30.00
17	1	5.00	35.00
19	2	10.00	45.00
20	2	10.00	55.00
21	1	5.00	60.00
22	2	10.00	70.00
24	1	5.00	75.00
25	5	25.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 19.00

Prøv selv

1. Lad KUGLE 3 udføre 100 eksperimenter, og giv på grundlag heraf et svar på Malenes problem. Brug Statistik-knappen.

2. Gentag kørslen og sammenlign resultaterne fra de to kørsler.

3. Undersøg Malenes chancer hvis der havde været 5 gevinster på de 25 sedler.

3. En bogklub

Ved nogle chancesituationer vil vi kunne anvende kugle-modellen i KUGLE 3 til at undersøge hvor mange udtagelser der skal til for at udtage *alle* kugler i æsken. En sådan udtagelse er selvfølgelig med tilbagelægning. Ved udtagelse uden tilbagelægning ville vi jo på forhånd vide hvor mange udtagelser der skulle til for at udvælge alle æskens kugler.

Vi ser på en chancesituation hvor alle kugler skal udtages.

Sanne er medlem af en bogklub. Hver gang hun køber en bog, modtager hun „en lykkepose“ med en nummerseddel i. På sedlen står et af tallene 1, 2, 3...,10. Når Sanne har samlet et helt sæt af nummersedler, vil hun kunne udvælge sig en bog fra et af klubbens kataloger. Hvor mange bøger skal Sanne mon købe før hun har et helt sæt af nummersedler?

Der findes 10 forskellige nummersedler, så det kan selvfølgelig forekomme at Sanne allerede efter at have købt 10 bøger har fået fat på alle 10 sedler. Men så heldig kan hun nok ikke regne med at være. Hun er da også mere interesseret i at

vide hvor mange bøger man i gennemsnit skal købe for at få et helt sæt nummersedler.

Bogklubben oplyser at sedlerne er tilfældigt fordelt i lykkeposerne, og at der ikke er nogen skævhed i antallet af de forskellige sedler. Sanne kan derfor gå ud fra at hver af de 10 sedler har samme chance for „at komme ud“ når hun køber en ny bog.

Sanne vil nu efterligne bogkøbene ved hjælp af en kuglemodel. Hun benytter her modellen K3(10, 10, ja).

I kugleæsken er der jo 10 kugler, og de er alle røde. Fra æsken skal udtages kugler indtil alle kugler har været udtaget.

Vi lader KUGLE 3 foretage to prøvekørsler Ved den første blev resultatet at der skulle udtages 17 kugler før alle røde kugler var udtaget.

Ved den næste prøvekørsel var resultatet ikke så opmuntrende. Her skulle der udtages 54 kugler før alle røde kugler var udtaget.

Af de to prøvekørsler kan Sanne jo ikke få særlig meget at vide om chancerne ved bogkøbene. Hun udfører derfor 20 eksperimenter.

Antal udtagne kugler	Antal eksperimenter	Antal i %	Kumuleret %
18	1	5.00	5.00
20	4	20.00	25.00
21	1	5.00	30.00
22	3	15.00	45.00
23	1	5.00	50.00
25	2	10.00	60.00
27	1	5.00	65.00
28	1	5.00	70.00
29	1	5.00	75.00
30	1	5.00	80.00
40	1	5.00	85.00
42	1	5.00	90.00
45	1	5.00	95.00
46	1	5.00	100.00

Udført i alt: 20 eksperimenter

Gennemsnit: Antal kugler pr. eksperiment: 27.25

Af oversigten ser hun at antallet af kugleudtagelser varierer fra 18 til 46. I gennemsnit er der udtaget 27.25 kugler pr. eksperiment. Det svarer til at bogklubbens medlemmer må regne med i gennemsnit at skulle købe ca. 27 bøger for at få et fuldstændigt sæt af nummersedler. Det var jo betydeligt bedre end de 54 fra prøvekørslen.

Oversigten viser at chancen for at Sanne kan klare sig med at købe under 25 bøger er 50%. Hun kan også se at risikoen for at hun må købe mere end 40 bøger er 15%. - Men som sædvanlig vil hun ikke stole for meget på et lille talmateriale. Der må udføres nogle flere eksperimenter.

Prøv selv

1. Lad KUGLE 3 efterligne bogkøbet ved 100 eksperimenter. Giv derefter dit bud på følgende:

    1. Hvor mange bøger må Sanne i gennemsnit regne med at købe før et helt sæt nummersedler foreligger?

Brug KUGLE 3!

2. Hvad er Sannes chance for at hun kan slippe med at købe højst 20 bøger?

3. Hvad er Sannes risiko for at hun må købe mere end 30 bøger?

4. Hvad er Sannes risiko for at hun må købe mere end 40 bøger?

2. Gentag kørslen og sammenlign resultaterne fra de to kørsler.

3. Find ud af hvad det betyder for Sannes bogindkøb at bogklubben sætter antallet af nummersedler op til 20:

Hvad bliver nu gennemsnittet af antal bogkøb?

Hvad er chancen for at Sanne kan klare sig med at købe højst 40 bøger?

Hvad er risikoen for at hun må købe mere end 60 bøger?

4. Løs opgaver med KUGLE 3

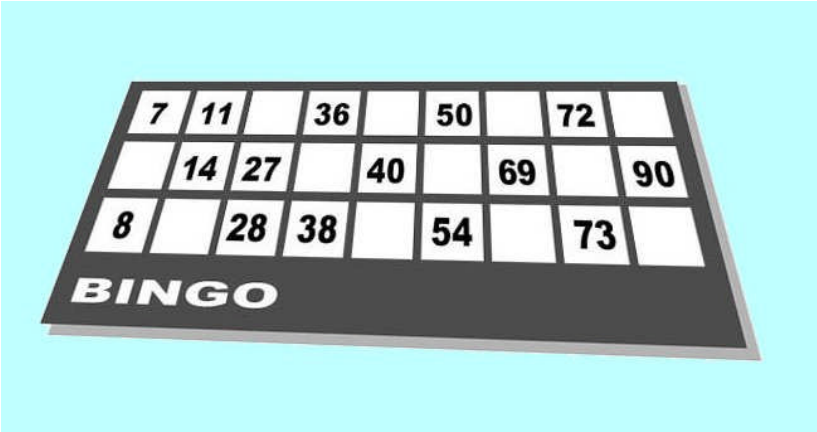
I opgaverne skal du nu selv prøve at løse chanceproblemer ved hjælp af en KUGLE 3. Vær omhyggelig med opstilling af modellen og overvej nøje om det er en brugbar model du har opstillet. Pas især på om der er tale om en udtagelse hvor samme kugle kan udtages flere gange, eller om dette ikke er tilladt.

Lad derefter KUGLE 3 køre den opstillede model. Benyt mindst 100 eksperimenter, og gerne 200 eller flere, før du sætter tal på de søgte chancer.

Prøv også at sammenligne forskellige kørsler af programmet, og undersøg hvor godt resultaterne stemmer overens. Er der væsentlige forskelle, så kør programmet endnu en gang.

1. Banko

Ved et tallotteri udtrækkes tal, et for et og uden tilbagelægning, fra tallene 1,2,3,...,90. På hvert af lotteriets spilleplader findes 15 af disse tal.



Sanne deltager i spillet med en enkelt plade. Beregn følgende chancer ved hjælp af en kuglemodel:

1. Chancen for at alle Sannes 15 tal er med blandt de første 75 tal der udtrækkes.

2. Chancen for at alle Sannes 15 tal er med blandt de første 80 tal der udtrækkes.

2. Mere Banko: En række er fyldt op
På spillepladen i Banko-spillet har Sanne to af de første 10 tal der udtrækkes. De er begge placeret i den øverste række på hendes spilleplade. Hun mangler nu de sidste tre tal i rækken for at få „Banko".

Hvad er chancen for at de manglende tre tal bliver udtrukket mellem de næste 25 tal?

Hvad er chancen for at de bliver udtrukket mellem de næste 40 tal?

3. Alle seks
Sanne vender tilbage til spillet „Alle seks": En terning kastes indtil alle seks mulige øjental er forekommet i kasterækken. Sanne tilbyder Malene at deltage i spillet på følgende betingelser:

Hvis du kan få „Alle seks" med højst 10 kast, får du udbetalt 10 kr. Hvis du bruger mere end 10 kast, skal du betale 10 kr.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel om Malene bør modtage Sannes tilbud.

4. Mere om „Alle seks"
Sanne tilbyder nu Malene at deltage i „Alle seks" på følgende vilkår:

Du betaler 1 kr. pr. kast. Til gengæld får du udbetalt 10 kr. når du har slået „Alle seks“.

Afgør ved hjælp af en kuglemodel hvor god en forretning dette spil er for Sanne.

5. Tyggegummi
I tyggegummipakker indlægges nummersedler med numrene fra 1 til 25. Den der har et fuldstændigt sæt får en cd som præmie. Hvor meget tyggegummi må du i gennemsnit købe for at få cd'en?

6. Du mangler 10 sedler
Af nummersedlerne fra opgave 5 har du allerede byttet dig til de 15 sedler. Du mangler nu 10 for at have et fuldstændigt sæt. Hvor meget tyggegummi skal du regne med at købe for at få de 10 manglende sedler?

7. Roulette
Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvor mange spil der i gennemsnit skal spilles før alle 37 numre er kommet ud.

Hvad er chancen for at alle 37 numre er kommet ud i løbet af 100 spil? 150 spil?

8. Fødselsdage i alle måneder
I Malenes klasse er der ingen der har fødselsdag i juli, men alle andre måneder er fødselsdagsmåneder i klassen.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvad chancen for at alle årets måneder er fødselsdagsmåneder i en klasse med:

(1) 20 elever (2) 24 elever (3) 28 elever

Hvor mange elever skal der mon være i klassen for at der er 50% chance for at alle årets måneder er fødselsdagsmåneder i klassen?

9. Richsbilleder
I gamle dage samlede børnene på Richsbilleder. I hver pakke Richs (kaffeerstatning) var der et billede. I alt fandtes der 196 billeder i serien.

Undersøg ved hjælp af en kuglemodel hvor mange pakker kaffeerstatning man i gennemsnit skulle købe for at få alle 196 Richsbilleder.

10. De to røde esser
Fra et sæt spillekort med 52 kort udtages kort, et for et og uden tilbagelægning, indtil begge de røde esser er udtaget.

Hvad er chancen for at de to røde esser er med blandt de første 10 kort der udtages?

Hvad er chancen for at de to røde esser er med blandt de første 26 kort?

11. Alle fire esser
Nu skal alle fire esser i kortspillet fra opgave 10 udtrækkes.

Hvad er chancen for at alle fire esser er blandt de første 26 kort der udtrækkes?

Hvad er risikoen for at der skal trækkes mindst 48 kort før alle 4 esser er udtrukket?

12. Fødselsdage udtrækkes
I et ugeblad udtrækkes hver uge 10 af årets 365 dage. En dag der er udtrukket, kan ikke udtrækkes igen.

I en familie på 5 medlemmer venter man på at deres 5 fødselsdage bliver udtrukket.

Hvad er chancen for at familiens 5 fødselsdage bliver udtrukket i løbet af det første halve år (= 26 uger)?

Hvad er risikoen for at familien må vente i mere end 30 uger før alle 5 fødselsdage er udtrukket?

Hvad er risikoen for at de må vente i mere end 35 uger før familiens 5 fødselsdage alle er udtrukket?

13. Lykkehjulet i Tivoli
Malene spiller på tre af lykkehjulets 24 numre.

Hvad er chancen for at alle Malenes tre tal kommer ud i løbet af de første 10 spil?

Hvad er chancen for at de kommer ud i løbet af de første 20 spil?

Hvad er risikoen for at der skal spilles mere end 50 spil før alle tre tal er kommet ud?

14. De 36 forskellige terningkast
Malene ved fra undervisningen i chancelære i skolen at det er en god ide at arbejde med 36 forskellige muligheder i et kast med to terninger.

Hun stiller sig følgende opgave: Hvor mange gange kan hun forvente at skulle kaste de to terninger, en rød og en sort terning, før hun har set alle de 36 mulige resultater?

Hvad er chancen for at hun kan klare det med 100 kast?

15. Fødselsdage på skolen
Hvor mange elever skal der i gennemsnit være på en skole hvis der hver eneste af årets 365 dage er en elev på skolen der har fødselsdag?

Brug KUGLE 3!

Hvor mange elever skal der være på skolen hvis der skal være 50% chance for at hver af årets dage er fødselsdag på skolen?

Find ud af hvor mange elever der er på din skole. Hvad er chancen for at hver af skoleårets mandage er fødselsdag for en elev på din skole? - Et skoleår indeholder 40 mandage.

Hvor mange elever skal der være på skolen hvis der skal være 50% chance for at alle skoleårets mandage er fødselsdag på skolen? - Hvor mange elever skal der i gennemsnit være på skolen hvis hver eneste af skoleårets mandage skal være fødselsdag for en elev på skolen?

"Lær om chancer" henvender sig til skoleelever som ønsker at få et indblik i chancernes spændende verden.

Bogen viser hvordan de to piger Sanne og Malene arbejder med problemer fra chancelæren.

Gennem anvendelse af computeren går de på jagt efter faglige oplevelser inden for sandsynlighedsregningen, og undervejs møder de faglige udfordringer som de tager op med computeren som et vigtigt værktøj.

I "Lær om chancer" arbejdes med statistiske sandsynligheder: De ukendte chancer og risikoer belyses gennem indsamlede data fra chanceeksperimenter. Sanne og Malene får således ikke indblik i matematikken gennem teoretiske udledninger og gennem beviser for matematiske sætninger, men gennem eksperimenter der bygger på brugen af matematiske begreber. Det betyder ikke at matematiske ræsonnementer og argumenter er overflødige, de vil ofte med udbytte kunne udfolde sig i tilknytning til overvejelserne over de erfaringer der er hentet i de matematiske eksperimenter.

I arbejdet benytter Sanne og Malene to lettilgængelige computerprogrammer, LOD og KUGLE123, som vil være velkendte for alle skoler der er medlem af INFA-Klubben.

En fagdidaktisk baggrund for fremstillingen i "Lær om chancer" er givet i publikationen:

"CHANCE - Et it-læremiljø", INFA 2002.

ISBN 877613155-6
9 788776 131555