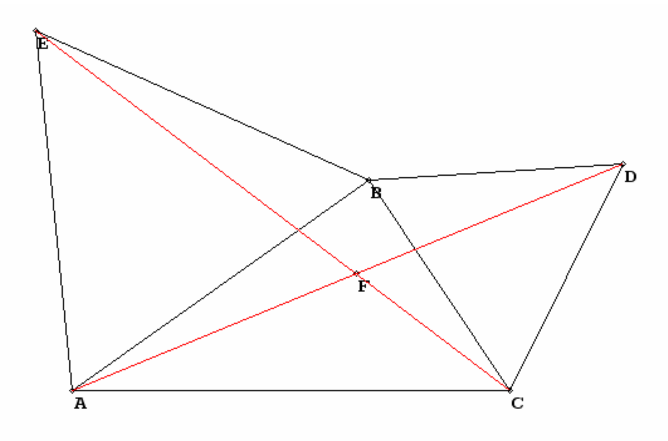
Allan C. Malmberg

Matematik i glimt

For elever med særlig interesse og evne for faget



INFA 2006
Allan C. Malmberg

Matematik i glimt

For elever med særlig interesse og evne for faget

INFA 2006

Seneste publikationer af samme forfatter:

CHANCE – Et it-læremiljø, INFA 2002
En fagdidaktisk behandling af emner fra sandsynlighed som de kan fremtræde i en indledende undervisning. Bogen henvender sig til grundskolens matematiklærere.

Håndbog i sandsynlighed og statistik, INFA 2003
Bogen behandler væsentlige temaer fra sandsynlighed og statistik. Den henvender sig til cand.pæd.er i matematik. En del af håndbogens opslag vil kunne benyttes af brugere som ikke har en baggrundsviden på kandidatniveau.

Lær om chancer. Sanne og Malene går på opdagelse med computeren, INFA 2005
Bogen viser hvordan de to piger arbejder med emner fra sandsynlighedsregningen. De faglige udfordringer tages op med computeren som et vigtigt værktøj. Bogen henvender sig til elever med særlige interesser og evner for matematik.

Chance og Risiko: Kan det virkelig passe? INFA 2006
Bogen giver en indføring i emner fra sandsynlighed og statistik gennem udvalgte opgaver og deres løsninger. Opgaverne er af to typer, dels opgaver som går tilbage til sandsynligheds-regningens tidlige historie i 1600- og 1700-tallet, dels opgaver som naturligt kan tages op i tilknytning til en indledende under-visning i emner fra fagområdet.

CVU København og Nordsjælland
Titangade 11, 2200 København N

ISBN 87-91786-16-9

Forord

Denne INFA-tekst giver i små afsnit nogle glimt af hvordan beviser og faglige ræsonnementer kan tage sig ud i den elementære matematik. Afsnittene er stort set uafhængige af hinanden, og de kan tages op i den rækkefølge der passer den enkelte.

Det er et sigte med teksten at give elever i 8. og 9. klasse med særlig interesse og evne for matematik en forsmag på hvordan faglige ræsonnementer kan tage sig ud når eleverne møder matematikken efter grundskolen.

Eksemplerne i teksten er valgt således at vidt forskellige typer af beviser og matematiske argumenter benyttes. Det er ikke tilstræbt at fremstille de faglige emner i hverdagssprogets form. Tværtimod er det et mål at benytte en matematisk terminologi der på nænsom vis afspejler brugen af sproget i matematiske fremstillinger til undervisning på elementært niveau.

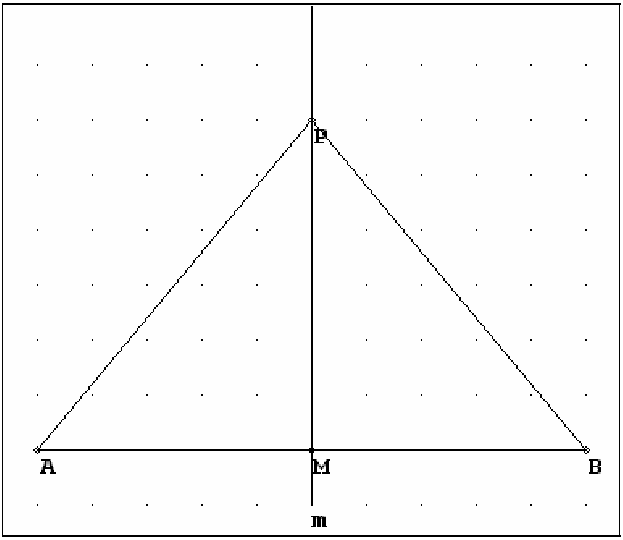
Arbejdet med eksemplerne forudsætter ikke matematik udover den der indgår i grundskolens øvre klasser. Der vil dog blive stillet krav til elevernes gåpåmod og udholdenhed og til deres evne til at sætte sig ind i en faglig fremstilling med en sproglig form som kan virke fremmed.

Der er undervejs i teksten givet nogle henvisninger til INFA-programmer som kan benyttes af eleverne i et konkret arbejde med de behandlede emner.

Allan C. Malmberg

Indhold

1. Midtnormalerne i en trekant



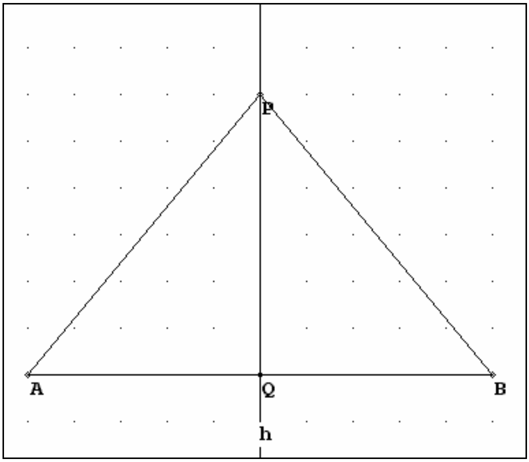
Vi skal først se på midtnormalen til et linjestykke. Figuren viser et linjestykk AB. Endvidere er tegnet linjen m som er midtnormal til AB. Det betyder at m går igennem AB's midtpunkt M, og m står vinkelret på AB.

P er et tilfældigt punkt på midtnormalen m. Punktet P har samme afstand til A og til B, dvs. PA = PB. Det følger af at de to trekanter PAM og PBM er kongruente.

Vi kan derfor indse at ethvert punkt på midtnormalen m har samme afstand til A og B.

*

Vi ser nu på en anden situation: Denne gang ved vi at punktet P har samme afstand til A og B, dvs. PA = PB.



Gennem P tegner vi linjen h som står vinkelret på AB. Den skærer AB i punktet Q.De to trekanter PAQ og PBQ er nu kongruente. De er begge retvinklede trekanter, og deres hypotenuser PA og PB er lige lange. Endvidere har de en fælles katete, PQ.

Heraf følger at AQ = BQ. Linjen h er derfor midtnormal til AB.

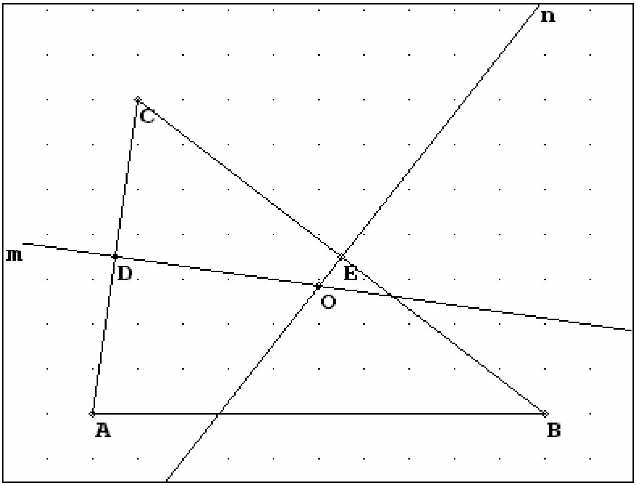
Af de to figurer har vi:

Alle punkter på midtnormalen til AB ligger lige langt fra A og B.

Og et punkt der ligger lige langt fra A og B, ligger på midtnormalen til AB**.**

Vi ser nu på midtnormalerne til siderne i en trekant.

1. MIDTNORMALER



I trekant ABC er tegnet to midtnormaler: Linjen m som er midtnormal til AC, og linjen n som er midtnormal til til BC. De to midtnormaler skærer hinanden i punket O.

Om punket O ved vi at det har samme afstand til A og C, det ligger jo på m. Vi ved også at det har samme afstand fra B og C, det ligger jo på n. Vi har dermed at OA = OC = OB.

Men da O altså har samme afstand fra A og B, må O ligge på midtnormalen til linjestykket AB. Hvis vi tegner midtnormalen til linjestykket AB vil denne midtnormal gå gennem O.

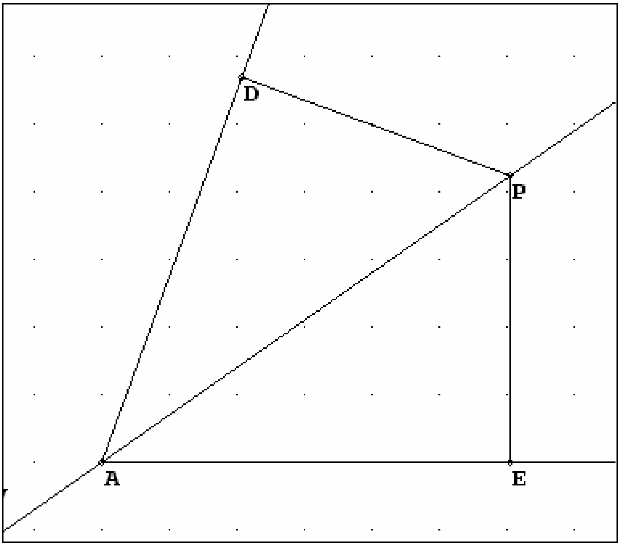
Med andre ord: De tre midtnormaler til siderne i en trekant har et fælles punkt.

Man siger det ofte sådan:

> ***Midtnormalerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt*.**

Skæringspunktet for de tre midtnormaler er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

2. Vinkelhalveringslinjerne i en trekant



På figuren er afsat vinkel A, og vinklens halveringslinje er tegnet. P er et tilfældigt punkt på vinkelhalveringslinjen. Fra P nedfældes de vinkelrette linjer på vinkel A's to ben. Derved fremkommer punkterne D og E. De to trekanter ADP og AEP er kongruente. De har en fælles side, AP, og de har begge en ret vinkel, nemlig vinkel D og vinkel E. Endvidere er vinkel DAP lig med vinkel EAP.

Det betyder at de to afstande PD og PE er lige store. Vi har dermed at ethvert punkt på vinkelhalveringslinjen ligger lige langt fra vinklens to ben.

*

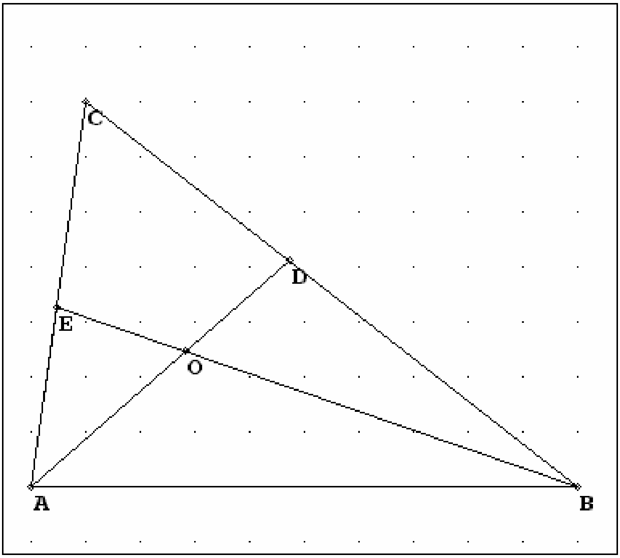
Vi bruger nu figuren en gang til. Vi antager at vi har et punkt P som ligger lige langt fra vinklens to ben, altså at PD = PE.

Herefter tegner vi linjestykket PA. Igen har vi at trekanterne ADP og AEP er kongruente (Forklar hvorfor!).

Heraf følger at vinkel DAP og vinkel EAP er lige store. Punktet P ligger altså på vinkelhalveringslinjen for vinkel A.

Vi har dermed at et punkt der ligger lige langt fra vinklens to ben, ligger på vinklens halveringslinje.

Vi ser nu på en trekant hvor to af trekantens vinkelhalverings-linjer er indtegnet.



Det er halveringslinjerne for vinkel A og vinkel B der er indteg-net på figuren. De to halveringslinjer skærer hinanden i punkt O.

Da O ligger på halveringslinjen for vinkel A, må O have sam-me afstand til vinkel A's to ben, dvs. til AC og AB. Men O ligger også på halveringslinjen for vinkel B, og O har derfor også samme afstand til AB og BC. Vi har dermed at O har samme afstand til vinkel C's to ben, nemlig til AC og BC. Punket O må derfor ligge på halveringslinjen for vinkel C.

Det vil sige at alle tre vinkelhalveringslinjer går gennem punkt O. De tre halveringslinjer for vinklerne i en trekant har dermed et fælles punkt. Eller sagt på en anden måde:

> ***Vinkelhalveringslinjerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt***

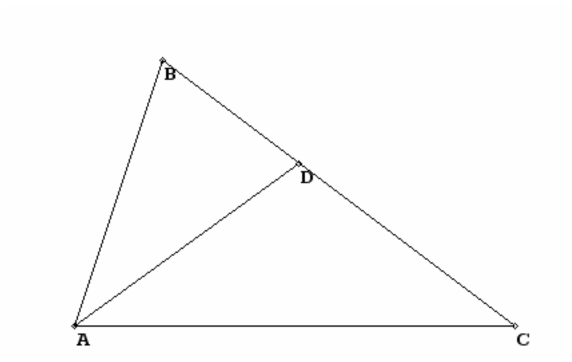
Skæringspunktet for de tre vinkelhalveringslinjer er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Andre resultater om vinkelhalveringslinjer
Hvis A er den største vinkel i en forelagt trekant ABC, så er vinkelhalveringslinjen fra A den korteste vinkelhalveringslinje i trekanten.

Der gælder:

Til en større vinkel svarer en kortere vinkelhalveringslinje

En sætning om vinkelhalveringslinjer
Her er tegnet en trekant ABC og vinkelhalveringslinjen AD:



Der gælder da at D deler siden BC i forholdet AB:AC. Det vil sige:

BD:DC = AB:AC

Prøv om du kan bevise denne påstand (tegn fx en hjælpelinje gennem B parallel med AC og brug ensvinklede trekanter).

*

Med INFA-programmet GEO kan du arbejde med trekanter og deres geometriske egenskaber. Og du kan udføre beregninger af vinklers størrelse og linjestykkers længde.

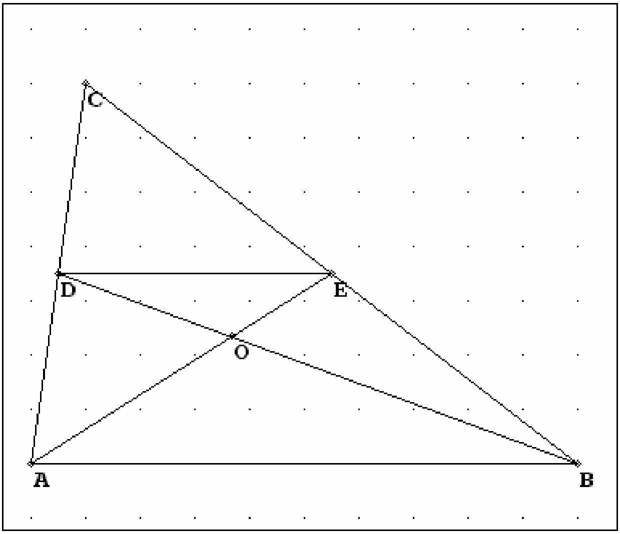
Her har GEO beregnet længden af højderne, medianerne og vinkelhalveringslinjerne i en trekant med siderne a=5, b=6 og c=7. Endvidere er de tre vinkler A, B og C beregnet.

Trekant ABC

	A	B	C
Vinkel:	44.42	57.12	78.46
Side:	5.000	6.000	7.000
Højde:	5.879	4.899	4.199
Median:	6.021	5.292	4.272
Vinkelhalv.:	5.982	5.123	4.225

Du kan kontrollere at i denne trekant svarer en længere side til en kortere vinkelhalveringslinje. Men det er selvfølgelig ikke noget bevis for at dette gælder for alle trekanter.

3. Medianerne i en trekant



Figuren viser en trekant ABC med to indtegnede medianer. D er midtpunktet af siden AC, og E er midtpunktet af siden BC. Det betyder at AE er medianen fra A, og at BD er medianen fra B. De to medianer skærer hinanden i punktet O.

Vi ser nu på trekant DEC, den "øverste trekant" på figuren. Denne trekant er ligedannet med trekant ABC. De to trekanter har vinkel C fælles, og de to sider i den øverste trekant, siderne CD og CE, er halvt så store som de tilsvarende sider i den store trekant, siderne AC og BC.

Det betyder at DE er halvt så stor som den tilsvarende side i den store trekant, siden AB. Og endvidere er DE parallel med AB.

De to trekanter ODE og OBA er derfor ensvinklede. Forholdet mellem AO og OE er dermed det samme som forholdet mellem AB og DE. Da AB er dobbelt så stor som DE, er også AO dobbelt så stort som OE. Med andre ord: O deler medianen

AE i to stykker som forholder sig til hinanden som 2:1 (med det længste stykke nærmest vinkelspidsen).

Det samme gælder om den anden median: O deler medianen BD i to stykker som forholder sig til hinanden som 2:1.

Hvis vi nu indtegnede den tredje median på figuren, medianen fra C, så ville den skære medianen fra A i et sådant punkt at medianen fra A blev opdelt i to stykker som forholder sig til hinanden som 2:1. Men dette punkt er jo netop punkt O. Den tredje median vil altså også gå gennem O. De tre medianer har altså et punkt fælles.

Sagt på en anden måde:

Medianerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt.

Skæringspunktet for de tre medianer kaldes trekantens tyngdepunkt.

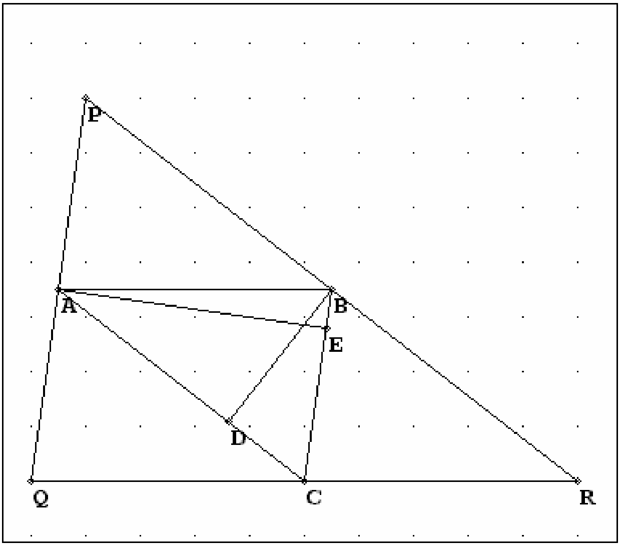
Andre resultater om medianer

Hvis a er den længste side i en forelagt trekant ABC, så er medianen til siden a den korteste median i trekanten.

Der gælder:

Til en længere side svarer en kortere median

4. Højderne i en trekant



Figuren viser en trekant ABC. På figuren er indtegnet to af trekantens højder: AE som er højden fra A, og BD som er højden fra B.

Endvidere er på figuren tegnet en trekant PQR som ligger uden om trekant ABC. Den store trekant er tegnet sådan at PQ er parallel med BC, PR er parallel med AC, og QR er parallel med AB.

Af konstruktionen af den store trekant følger at firkant ABCQ er et parallelogram. AQ har derfor samme længde som BC.

Men firkant PACB er også et parallelogram og PA har derfor samme længde som BC. Det betyder at A er midtpunkt af siden PQ.

På samme måde kan indses at B er midtpunktet af siden PR, og at C er midtpunktet af QR.

Højden AE i trekant ABC falder sammen med midtnormalen til siden PQ i den store trekant. Og højden BD i trekant ABC falder sammen med midtnormalen til siden PR i den store trekant. På samme måde vil den tredje højde i trekant ABC falde sammen med midtnormalen til siden QR i den store trekant.

Fra afsnittet om midtnormalerne i en trekant ved du at de tre midtnormaler til siderne i en trekant skærer hinanden i samme punkt. De tre midtnormaler i trekant PQR går derfor igennem samme punkt, men da højderne i trekant ABC falder sammen med midtnormalerne i trekant PQR, så vil også højderne i trekant ABC have et fælles punkt. Med andre ord:

Højderne i en trekant skærer hinanden i samme punkt.

Skæringspunktet for de tre højder kaldes trekantens orto-centrum.

Andre resultater om højderne i en trekant
Hvis a er den længste side i en forelagt trekant
ABC, så er højden på siden a den korteste højde i trekanten.

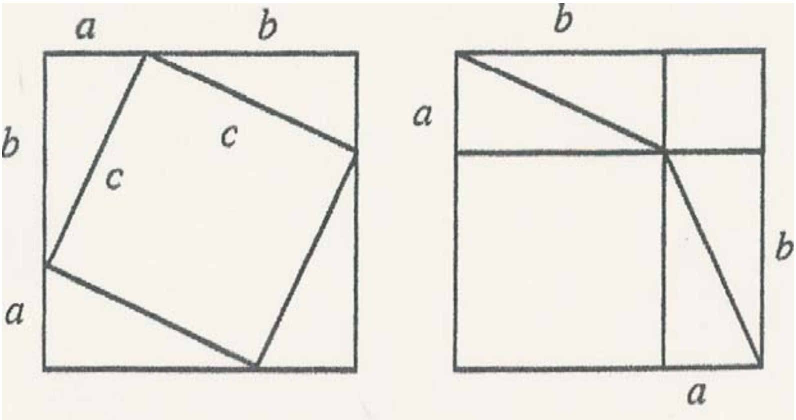
Der gælder:

Til en længere side svarer en kortere højde

Kan du give et bevis for den påstand?

5. Pythagoras' læresætning

Denne læresætning er vel den bedst kendte sætning i skolematematikken. Den udtaler sig om retvinklede trekanter.



Figurerne viser siderne i en retvinklet trekant. De to kateters længder er a og b, hypotenusens længde er c.

Figuren til venstre viser hvordan kvadratet er opdelt i et indre kvadrat plus fire trekanter. Hver af de fire trekanter har arealet $\frac{1}{2}\,a \cdot b$. Arealet af en retvinklet trekant er jo ½ gange længden af den ene katete gange længden af den anden katete.

Det indre kvadrat på figuren har arealet c^2. Det samlede areal af figuren til venstre er altså:

$$4 \cdot (\tfrac{1}{2}\,a \cdot b) + c^2$$

Kvadratet på figuren til højre er præcis lige så stor som figuren til venstre. Sidelængden i kvadratet har længden a+b. Arealet er derfor $(a + b)^2$.

Vi har derfor at de to arealudtryk må være lige store:

$$4\cdot(\tfrac{1}{2}\, a\cdot b) + c^2 = (a + b)^2.$$

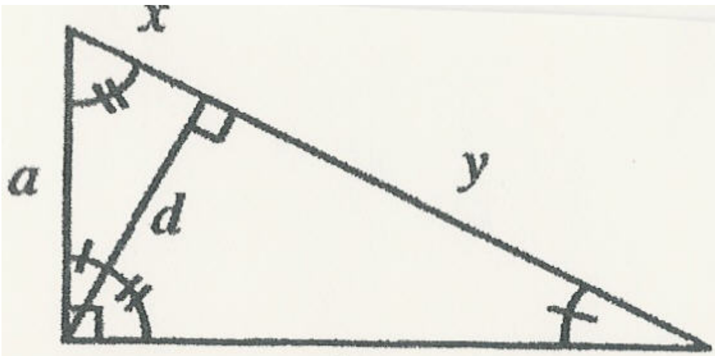
Heraf får vi: $2a\cdot b + c^2 = a^2 + b^2 + 2a\cdot b$

Som kan reduceres til: $c^2 = a^2 + b^2$

Hermed har vi følgende resultat:

I en retvinklet trekant er kvadratet på hypotenusens længde lig med summen af kvadraterne på kateternes længder.

Et andet bevis. Her kommer et andet bevis for den pythagoræiske læresætning. Det bygger ikke på opdelinger af figurer, men på forhold i ensvinklede trekanter.



Fra vinkelspidsen i den rette vinkel er tegnet højden d på hypotenusen. Derved opdeles hypotenusen c i to stykker af længden x og y. Af ensvinklede trekanter får vi nu:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

Heraf har vi: $x = \dfrac{a^2}{c}$ og $y = \dfrac{b^2}{c}$

Da $c = x+y$, har vi: $c = \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{c}$

Heraf får vi så: : $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Pythagoras var en græsk matematiker som levede 580 - 496 f. Kr. For hans læresætning findes mere end hundrede forskellige beviser.

*

Den omvendte sætning til den pythagoræiske. Når det om længderne af de tre sider i en trekant, a, b og c, gælder at $c^2 = a^2 + b^2$, så er trekanten retvinklet med den rette vinkel over for siden c.

Ved *et pythagoræisk talsæt* forstås tre hele tal x, y, z hvorom der gælder $x^2 + y^2 = z^2$.

Eksempler på sådanne talsæt er (3,4,5), (5,12,13), (20,21,29).

Der findes uendelig mange pythagoræiske talsæt. Når (a,b,c) er et pythagoræisk talsæt, så er også (ka, kb, kc) et pythagoræisk talsæt, hvor k er vilkårligt positivt helt tal. Fx er (6,8,10) et pythagoræisk talsæt, her har vi ganget (3,4,5) med 2.

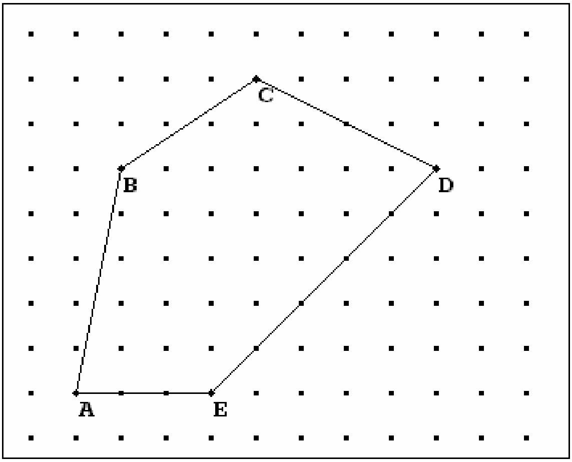
Hvis (a,b,c) er et pythagoræisk talsæt og a, b og c ikke kan "forkortes" med noget tal, kaldes (a,b,c) *et primitivt pytha-*

goræisk talsæt. De tre talsæt vi nævnte ovenfor er alle eksempler på primitive pythagoræiske talsæt.

Om primitive pythagoræiske talsæt (a,b,c) gælder at et af tallene a og b er ulige og det andet er lige. Tallet c vil derfor altid være et ulige tal.

Kommentar. Når talen kommer på hvad voksne husker fra deres skolematematik, er svaret ofte: $a^2+b^2=c^2$. Uden yderligere forklaring på hvad a, b og c står for, er udtalelsen imidlertid helt uden indhold.

6. Gitterformlen



Figuren viser en gitterpolygon. Det er en polygon som har alle sine vinkelspidser placeret i punkter som har koordinater der er hele tal. De punkter der kan benyttes, er markeret med små prikker.

For en gitterpolygon gælder en særlig nem formel til beregning af polygonens areal. Vi skal blot tælle op hvor mange gitterpunkter der ligger inden i polygonen og hvor mange der ligger på polygonens kanter.

Af indre punkter kan vi på figuren tælle frem til 27. Og af kantpunkter er der 12 (kontroller). Arealformlen for gitter-polygoner siger nu at arealet A kan beregnes sådan:

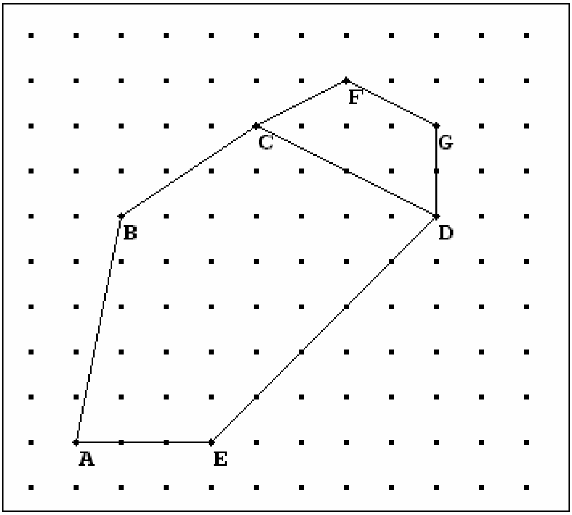
$$A = i + \tfrac{1}{2}k - 1$$

hvor i er antallet af indre punkter og k er antallet af kant-punkter. Ved indsætning af tallene for i og k får vi:

$$A = 27 + 6 - 1 = 32$$

Addition af figurer. Vi udbygger nu den tegnede gitterpolygon med en ekstra polygon: CFGD. For den ekstra polygon CFGD har vi at arealet er:

$$A = 4 + 3 - 1 = 6$$



For de to gitterpolygoner har vi:

Polygon ABCDE: Indre punkter 27, kantpunkter 12.
Areal: 27 + 6 -1 = 32

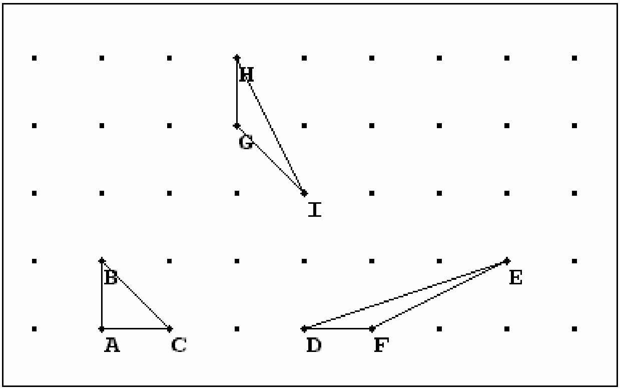
Polygon CFGD: Indre punkter 4, kantpunkter 6.
Areal: 4 + 3 - 1 = 6

For hele figuren får vi af gitterformlen:

Polygon ABCFGDE: Indre punkter 32, kantpunkter 14.
Areal: 32 + 7 -1 = 38

Bemærk at det kantpunkt der ligger midt på CD, bliver et indre punkt i den samlede gitterpolygon.

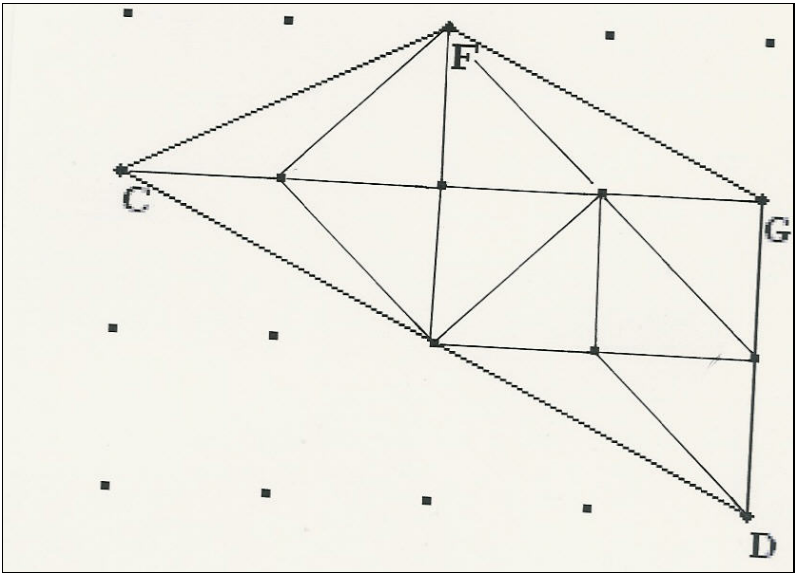
Grundtrekanter. Vi ser nu på nogle småtrekanter:



Disse trekanter er gitterpolygoner som ikke har andre gitterpunkter end punkterne i de tre vinkelspidser. Der er ingen indre punkter, og der er kun de tre kantpunkter i vinkelspidserne. Alle trekanter har en grundlinje af længden 1 og en højde på grundlinjen som også har længden 1. Arealet af en sådan trekant er ½grundlinje gange højden, dvs. $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Af gitterformlen får vi da også at arealet af en sådan trekant er:

$$A = 0 + 1\tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}$$

Trekanter af den art vil vi kalde *grundtrekanter*. Det gælder at enhver gitterpolygon kan opdeles i grundtrekanter.



Her har vi zoomet ind på den tidligere gitterpolygon CFGD og opdelt den i grundtrekanter. Bemærk at der ikke forekommer indre punkter i trekanterne, og der er kun kantpunkter i vinkelspidserne.

Hvis du tæller op, vil du se at der er 12 grundtrekanter på figuren. Det stemmer med at arealet af gitterpolygonen er 6, hver grundtrekant har jo et areal på ½.

Et bevis for gitterformlen. Vi kan nu anvende denne figur til at give en skitse til et bevis for gitterformlen.

Vi gør det ved at opstille et regnskab over hvad der forekommer af vinkler i gitterpolygonen.

Lad os antage at polygonen indeholder t grundtrekanter. Hver af disse trekanter har jo en vinkelsum på 180°. I alt $t \cdot 180°$

Herefter ser vi på de vinkler der knytter sig til de indre punkter i gitterpolygonen. Ved hvert indre punkt støder nogle grundtrekanter sammen, så de "fylder hele vejen rundt". Dvs. at der ved hvert indre punkt er en vinkelsum på 360°. I alt er vinkelsummen ved de i indre punkter derfor $i \cdot 360°$.

De vinkler vi endnu ikke har medregnet, ligger ved kantpunkterne. Her vil vi gøre brug af en sætning fra den elementære geometri. Den siger at en n-kant kan opdeles i n - 2 trekanter. Dvs. at en firkant kan opdeles i 2 trekanter, en femkant i 3 trekanter osv.

Hvis vi har en gitterpolygon med k kantpunkter, kan vi opfatte den som en k-kant. Og det gør ikke noget at nogle af vinklerne er 180°.Den kan derfor opdeles i k–2 trekanter, og vinkelsummen ved kanterne kan dermed beregnes til $(k-2)\cdot 180°$.

Vi har nu optalt vinklerne i gitterpolygonen på to måder:

(1) Ved hjælp af grundtrekanter

(2) Ved hjælp af indre punkter og kantpunkter.

De to optællinger må give samme resultat. Vi har derfor.

$$t\cdot 180° = i \cdot 360° + (k-2) \cdot 180°$$

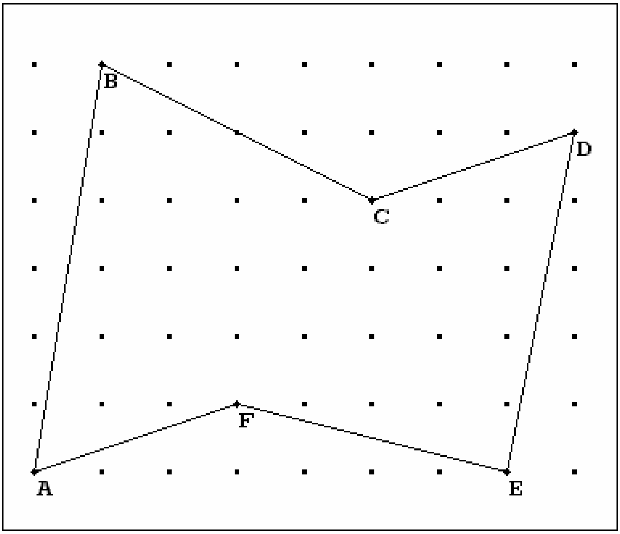
Heraf får vi: $t = 2i + k - 2$

Men da arealet A af de t grundtrekanter er $\frac{1}{2}\cdot t$, får vi resultatet:

$$\mathbf{A = i + \tfrac{1}{2}k - 1}$$

Dette er netop gitterformlen.

En ukonveks gitterpolygon. Her er en opgave. Beregn arealet af den tegnede gitterpolygon.



Polygonen på figuren er ukonveks, dvs. der er vinkler (her vinkel C og vinkel F) på over 180°. Men gitterformlen gælder alligevel.

7. Hvor mange primtal findes der?

Bliver der ved med at komme primtal i rækken af de naturlige tal, eller når vi til et punkt i talrækken hvor der ikke kommer flere primtal? Det er et problem som har fået sin løsning for mere end 2000 år siden. Vi skal her se hvad svaret er.

Vi ser først på nogle små regnestykker. Vi ganger tallene sammen forfra i talrækken, fra 2 og opefter.

$R1 = 2{\cdot}3 \quad R2 = 2{\cdot}3{\cdot}4 \quad R3 = 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 \quad R4 = 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6$
osv.

Lad os nu tage tallet R1. Det er fremkommet ved at vi har dannet produktet af tallene 2 og 3. Både 2 og 3 går derfor op i R1. Men nu danner vi tallet S1 = R1+1:

$$S1 = 2{\cdot}3 + 1$$

I tallet S1 går hverken 2 eller 3 op, de kan ikke gå op både i R1 og S1 da afstanden mellem de to tal kun er 1. S1 kan derfor ikke divideres med 2 eller med 3, det mindste primtal der går op i S1 vil være et tal der er større end 2 og 3.

Og vi kan jo let kontrollere at S1 = 7. Og det mindste primtal der går op i S1 er altså 7, et primtal der er større end 2 og 3.

Lad os nu tage R3 = $2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5$. Vi danner igen tallet S3 = R3 + 1. I R3 går tallene 2, 3, 4 og 5 alle op. I S3, som er nabotal til R3, kan ingen af tallene 2, 3, 4 og 5 derfor gå op. Så det mindste primtal der går op i S3, må være et tal der er større end 5.

Lad os kontrollere. Vi udregner let R3 til 120. S3 er derfor 121. Og da 121 = $11{\cdot}11$, så er det mindste tal der går op i S3 tallet 11, et primtal som er større end 5.

Vi har nu ideen i beviset for at de altid kan findes et nyt primtal der er større end dem vi kender i forvejen. Lad os tænke os at det største primtal var et tal N. Vi danner da produktet af alle tal fra 2 op til N:

$$R = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ldots \cdot N$$

Dette tal vil være enormt stort. Men vi behøver ikke at bekymre os om tallets størrelse. Det afgørende er at alle tallene 2, 3, 4, 5 osv. op til N går op i R. Vi danner nu tallet S ved at lægge 1 til R:

$$S = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ldots \cdot N + 1$$

I tallet S er der ingen af tallene 2, 3, 4, 5 …, N der går op. Det mindste primtal der går op i S må derfor være et primtal der er større end N.

Med andre ord: Uanset hvor stort et primtal N er, så vil der være et primtal der er større.

Der kan altså ikke findes noget største primtal. Eller sagt på en anden måde:

Der findes uendeligt mange primtal.

Dette bevis for at der findes uendeligt mange primtal går tilbage til den græske matematiker *Euklid* der levede omkring 300 f. Kr.

Læg mærke til at Euklids bevis ikke fortæller *hvordan* vi finder et primtal der er større end N. Beviset er et såkaldt *eksistensbevis*. Det sikrer os kun at *der findes et primtal større end N.* I nyere tid har man ved hjælp af computere kunnet lave en systematisk søgning efter nye primtal..

Der bliver altså ved med at komme primtal i talrækken. Men primtallene bliver ikke ved med at ligge lige tæt i rækken af de naturlige tal. Du kan undersøge sagen ved hjælp af INFAs EMMA-tema TAL.

*

Et åbent spørgsmål. Primtalstvillinger. Ved primtalstvillinger forstår vi to på hinanden følgende ulige tal som begge er primtal. Til eksempel er 3 og 5 primtalstvillinger. Det samme er 5 og 7 og 101 og 103.

Man kender primtalstvillinger der skrives med mere end 50 000 cifre.

Det er et åbent spørgsmål om der findes uendeligt mange par af primtalstvillinger.

Det største kendte primtal

Selv om der ikke findes noget største primtal, så vil der til enhver tid være et primtal som er det største der er kendt. Jagten på større og større primtal foregår til stadighed.

Rekorden (fra december 2005) indehaves af tallet

$$2^{30402457} - 1$$

Dette tal har mere end 9 millioner cifre når det skrives ud i vort sædvanlige talsystem.

Da der findes uendeligt mange primtal, vil der aldrig kunne sættes en rekord som ikke kan overgås.

8. Induktionsbeviser: At gå fra n til n+1

Vi vil her se på en bevistype som er et vigtigt værktøj i matematikken.

Eksempel 1. Summen af de n første naturlige tal
Vi ser på summen S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 +… + n. Vi vil bevise at summer af den slags kan beregnes ved hjælp af formlen:

$$S(n) = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Ved indsætning af nogle talværdier for n får vi: S(1) = 1, S(2) = 3, S(3) = 6. Du kan hurtigt se at disse resultater er korrekte.

Spørgsmålet er nu: Hvordan beviser vi at formlen gælder for alle naturlige tal n?

Her gør vi brug af et såkaldt *induktionbevis*. Det består af to dele:

Del 1: Se på n=1. Tjek at formlen passer når n=1.

Del 2: Gå fra n til n+1. Tjek at når formlen passer for n, så passer den også for n+1.

Disse to dele indgår altid i et induktionsbevis.

Del 1 er her ganske let at klare. Vi har allerede kontrolleret at formlen stemmer for n=1.

Del 2. Vi antager at formlen stemmer for n. Det betyder at:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Vi skal nu vise at den da også gælder for n+1. Hvis vi indsætter n+1 i formlen i stedet for n, får vi: S(n+1) =

$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Vi skal nu vise at dette udtryk giver den rigtige værdi af $S(n+1)$.

Men $S(n+1)$ er jo fastlagt ved at vi lægger $n+1$ til $S(n)$:

$$S(n+1) = S(n) + n+1 = \tfrac{1}{2}n(n+1) + n + 1$$

Ved omregning får vi videre:

$$S(n+1) = \tfrac{1}{2}(n(n+1) + 2(n+1)) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(Kontroller omregningen)

Det viser at hvis formlen stemmer for n, så stemmer den også for n+1.

Del 1 af beviset fortæller os at formlen stemmer for n=1. Del 2 fortæller at så stemmer den også for n=2. Del 2 fortæller videre at så stemmer den også for n=3, for n=4, osv. Med andre ord: Formlen stemmer for alle værdier af n som er hele positive tal.

Dermed har vi:

Summen af de første n naturlige tal er ½n(n+1)

Kommentar. Ordet "induktion" kommer fra latin og betyder "lede" eller "føre videre".

I matematikken vil man ofte blot sige at induktion betyder "at gå fra n til n+1".

Eksempel 2: Summen af de første n ulige tal
Ethvert ulige tal kan skrives som et lige tal minus 1. Det første ulige tal kan skrives $2 \cdot 1 - 1$.

Det andet ulige tal kan skrives som $2 \cdot 2 - 1$, det tredje ulige tal kan skrives som $2 \cdot 3 - 1$. Det n'te ulige tal kan skrives som $2 \cdot n - 1$.

Vi ser her på summen : $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$.

Vi vil vise at summen $S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ kan angives ved en kort formel:

$$S(n) = n^2$$

Vi vil ved et induktionsbevis vise at formlen stemmer.

Del 1. Formlen stemmer for $n=1$. Her får vi jo $S(1) = 1$.

Del 2. Vi antager at formlen stemmer for n, dvs. $S(n) = n^2$. Vi skal nu vise at formlen da også stemmer for n+1, dvs. vi skal vise at $S(n+1) = (n+1)^2$.

$S(n+1)$ fremkommer ved at vi lægger det (n+1)te ulige tal til $S(n)$, dvs.

$$S(n+1) = S(n) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Hermed har vi at hvis formlen stemmer for n, så stemmer den også for n+1.

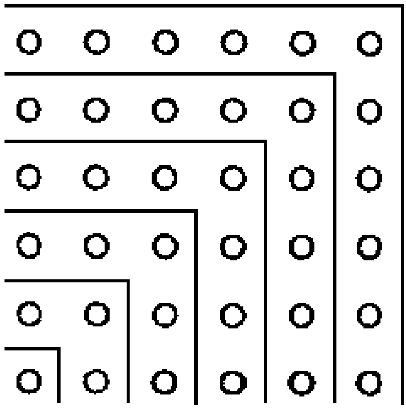
Dermed er induktionsbeviset ført, og vi har altså:

Summen af de n første ulige tal er n^2

Prøv selv. Opstil en formel for summen af de første n lige tal. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$, og vis ved et induktionsbevis at formlen gælder.

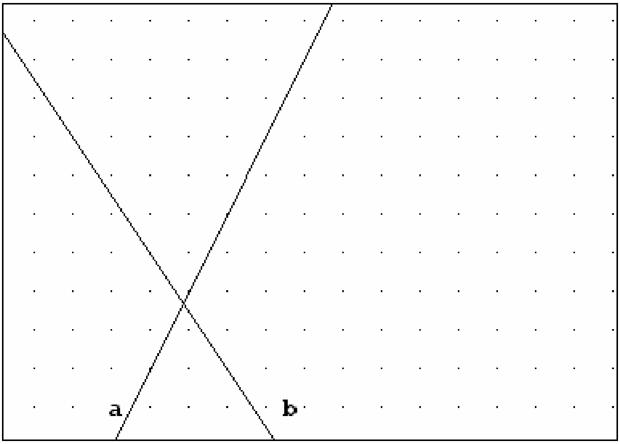
Prøv selv. Vis at summen af de n første kvadrattal $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ er givet ved $n(n+1)(2n+1) / 6$.

Summen af de første n ulige tal



Her er et anskueligt bevis, et såkaldt "figur-bevis" for at summen af de første ulige tal, 1+3+5+..., altid giver et kvadrattal.

9. Hvor mange områder?



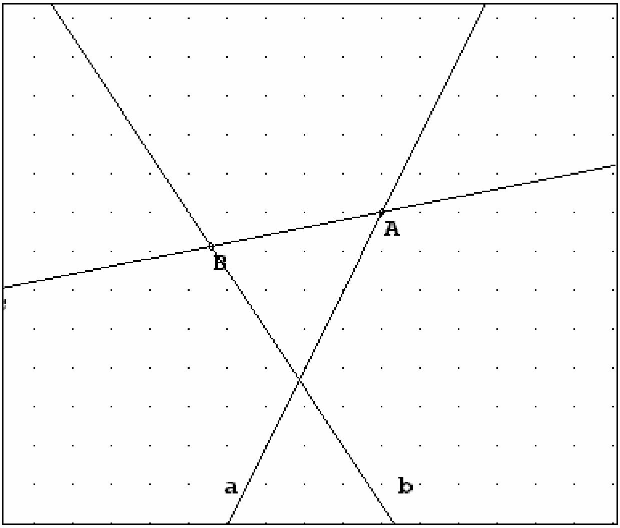
På figuren er tegnet to linjer. Du kan se at de opdeler tegneplanen i 4 områder.

Spørgsmålet er: Hvor mange områder kan planen opdeles i hvis vi tegner n linjer?

Kan vi mon finde en formel der giver os antallet af områder?

To linjer. Hvis vi kun tegnede én linje a, ville planen blive opdelt i 2 områder: Området på den ene side af a og området på de anden side af a. Vi indtegner nu b på figuren. Linjen b skærer a i et punkt og b bliver opdelt i to stykker. Hver af de to stykker som b er opdelt i giver et ekstra område på tegne-planen. Der er altså kommet to områder mere på tegneplanen.

Nu vil vi se hvad der sker når vi indtegner en tredje linje.



Tre linjer. Den tredje linje tegnes således at den skærer de linjer der allerede er tegnet. Den må altså ikke være parallel med nogen af de tegnede linjer. Og den må heller ikke gå igennem skæringspunktet for a og b. Den skal give nye skæringspunkter. Kun på den måde kan vi sikre os at tegneplanen opdeles i så mange områder som muligt.

Den nye linje opdeles ved skæringspunkterne A og B i tre stykker: Stykket AB samt stykket på AB's forlængelse ud over A og stykket på AB's forlængelse ud over B.

Hvert af disse tre stykker bevirker at der kommer et ekstra område i tegneplanen.

Antallet af områder er derfor nu: 2 + 2+ 3 = 7

En fjerde linje. Når vi indtegner en fjerde linje vil der fremkomme tre skæringspunkter på den. Den fjerde linje skal jo skære de tre linjer der allerede er tegnet . Derved bliver den fjerde linje opdelt i 4 stykker . Og hver af de fire stykker giver et ekstra område i tegneplanen.

Prøv at tegne figuren med de tre linjer og indtegn derefter en fjerde linje. Optæl antallet af områder som tegneplanen nu er opdelt i.

Vi har nu følgende:

1. linje: 2 områder, i alt 2
2. linje: 2 ekstra områder, i alt 2+2
3. linje: 3 ekstra områder, i alt 2+2+3
4. linje: 4 ekstra områder. i alt 2+2+3+4

Du kan nu se hvordan det går videre. Med 5 linjer bliver antallet af områder: 2+2+3+4+5.

Og n linjer. Her må resultatet være:

$$2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

Det kan vi omskrive således:

$$1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$

Tallet i parentesen er netop summen af de n første naturlige tal. For denne sum har vi fundet en formel (se afsnittet om Induktionsbeviser): $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Ved indsættelse får vi for antallet af områder i tegneplanen når der tegnes n linjer:

$$\text{Antal} = 1 + \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

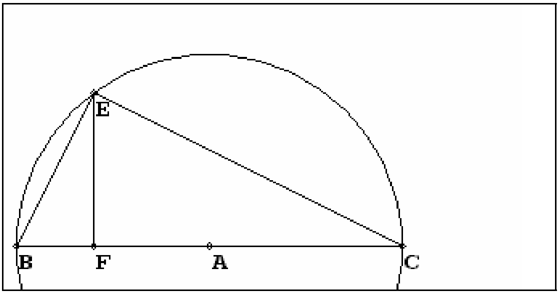
Det kan omformes til:

$$\textbf{Antal} = \tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Beregn antallet af områder når der tegnes 10 linjer. Og når der tegnes 20 linjer.

Prøv selv Opstil en formel som viser hvor mange skærings-punkter der kan fremkomme når der tegnes n linjer. Bevis dernæst at din formel er korrekt.

10. En sætning om gennemsnit



Figuren viser to linjestykker BF og FC som er lagt i forlængelse af hinanden. Vi sætter længden af BF til x og længden af FC til y. På figuren er tegnet cirklen med BC som diameter. Radius i cirklen er halvdelen af BC, dvs. ½(x+y).

I punktet F hvor x og y støder sammen, oprejses den vinkelrette som skærer cirklen i punkt E. Trekant BFE er ensvinklet med trekant EFC. De har begge en ret vinkel, og vinkel FBE er lig med vinkel FEC.

Af ensvinklede trekanter får vi da:

$$\frac{BF}{EF} = \frac{EF}{FC}$$

Som vi kan skrive: $(EF)^2 = BF \cdot FC = x \cdot y$

Heraf har vi: EF = $\sqrt{x \cdot y}$

Af figuren har vi at EF er mindre end cirklens radius, ½(x+y).

Kun hvis x og y er lige store, vil EF være lig med cirklens radius. I alle tilfælde har vi derfor:

$$\sqrt{x \cdot y} \leq ½(x+y)$$

hvor x og y er vilkårlige positive tal.

Nogle eksempler:

x = 2 y = 3: $\sqrt{x \cdot y}$ = 2.449 ½(x+y) = 2.500

x = 5 y = 10: $\sqrt{x \cdot y}$ = 7.071 ½(x+y) = 7.500

Kommentar. ½(x+y) kaldes det aritmetiske gennemsnit af x og y, og $\sqrt{x \cdot y}$ kaldes det geometriske gennemsnit af x og y. Vi har altså at for to positive tal x og y vil det geometriske gennemsnit altid være mindre end eller lig med det aritmetiske gennemsnit.

Du kan læse om disse gennemsnit i INFA-teksten: *Tre slags gennemsnit.*

Sætningen om gennemsnit kan udvides til at gælde flere tal. For tre tal positive tal x, y og z gælder:

$$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Eksempel 1. Et rektangel med størst areal
Vi ser på et rektangel som har sidelængderne x og y og som har en omkreds på 100. Vi vil nu se hvilke værdier x og y skal have for at rektanglets areal bliver så stort som muligt.

Et par eksempler:

x= 40 y = 10 Areal: 400 x= 30 y = 20 Areal: 600

Og endnu et eksempel:

$x = 25 \quad y = 25 \quad \text{Areal: } 625$

Det sidste eksempel omhandler det rektangel som har omkredsen 100 og som er et kvadrat, de fire sider er lige lange, de har alle en længde på $\frac{1}{2}(x+y)$.

Af de tre eksempler kan vi se at kvadratet har det største areal. Vi skal nu vise at dette resultat er det vi er på jagt efter.

Udtrykt ved x og y har vi at arealet af rektanglet med siderne x og y er $x \cdot y$. Og arealet af kvadratet med omkredsen $2x + 2y$ er $\frac{1}{2}(x+y) \cdot \frac{1}{2}(x+y)$, dvs. $(\frac{1}{2}(x+y))^2$

Fra sætningen om gennemsnit har vi at når x og y er forskellige, så gælder:

$$\sqrt{x \cdot y} < \tfrac{1}{2}(x+y)$$

Heraf følger ved kvadrering:

$$x \cdot y < (\tfrac{1}{2}(x+y))^2$$

Altså: Arealet af rektanglet er mindre end kvadratets areal.

Med en fast omkreds får vi altså størst areal ved at lade rektanglet være et kvadrat.

Af alle rektangler med samme omkreds har kvadratet størst areal

Resultatet kan også gengives sådan:

For alle tal a og b med en given sum bliver produktet a·b størst når a=b.

Eksempel: Opdel 8 i to tal: 8 = a+b således at produktet a·b bliver størst muligt. Svaret er at det det største produkt opnås når a=b. I eksemplet skal vi altså vælge a=b=4.

Af resultatet i eksempel 1 følger: Hvis du skal indrette en rektangulær løbegård til din hund, og du har 60 meter hegn til omkredsen, så får du den største løbegård ved at indrette den med lige lange sider, nemlig 15 meter til hver side.

Eksempel 2. Et rektangel med mindst omkreds.
Vi ser på et rektangel med siderne x og y og med at areal på 100. Vi vil undersøge hvilke værdier x og y skal have for at omkredsen af rektanglet bliver så lille som muligt.

Nogle eksempler:

x = 5   y = 20 Omkreds: 50   x = 8 y = 12.5 Omkreds: 41

Og endnu et eksempel:

x = 10   y = 10   Omkreds: 40

Det sidste eksempel omhandler det rektangel som har arealet 100 og som er et kvadrat. De fire sider er lige lange, de har alle en længde på $\sqrt{x \cdot y} = 10$

Af de tre eksempler kan vi se at kvadratet har den mindste omkreds. Vi skal nu vise at dette resultat er det vi er på jagt efter.

Udtrykt ved x og y har vi at omkredsen af rektanglet med siderne x og y er 2(x+y). Og omkredsen af kvadratet med arealet x·y er $4 \cdot \sqrt{x \cdot y}$

Fra sætningen om gennemsnit har vi at når x og y er forskellige, så gælder:

$$\sqrt{x \cdot y} \;<\; ½(x+y)$$

Heraf følger ved multiplikation med 4:

$$4 \cdot \sqrt{x \cdot y} \;<\; 2 \cdot (x+y)$$

Altså: Omkredsen af kvadratet er mindre end rektanglets omkreds.

Med et fast areal får vi altså den korteste omkreds ved at lade rektanglet være et kvadrat:

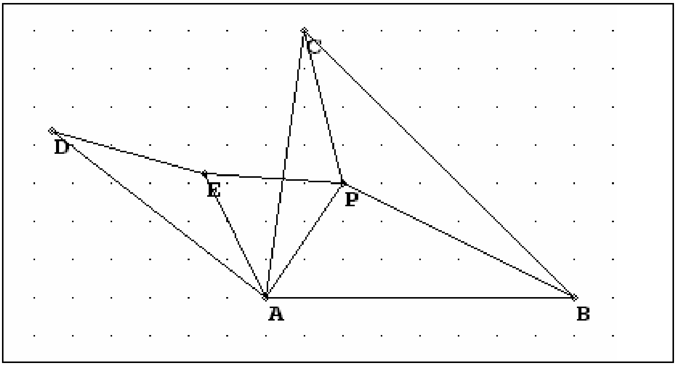
Af alle rektangler med samme areal
har kvadratet den mindste omkreds.

Resultatet kan også formuleres sådan:

For alle tal a og b med et givet produkt
bliver summen a+b mindst når a=b.

Eksempel: For to tal gælder a·b = 100. Summen a+b bliver mindst når a=b, dvs. a=b=10.

11. Hvor er den bedste placering?



Figuren viser trekant ABC og et indre punkt P i trekanten. Vi søger en sådan placering af P så summen af punktets afstande fra de tre vinkelspidser:

$$PA + PB + PC$$

er mindst mulig.

Med centrum i A drejer vi nu trekant APC en vinkel på 60°. Herved fremkommer trekant AED. Endvidere tegner vi linjestykket EP.

I trekant AEP er vinkel A = 60° og AE = AP. Trekant AEP er derfor ligesidet, og alle tre vinkler er på 60°.

Da EP = PA og ED = PC, så har vi at summen PA + PB + PC kan udtrykkes ved:

$$PB + PE + ED$$

Vi skal altså finde en sådan beliggenhed af P at denne sum bliver mindst mulig.

Summen er udtrykt ved længden af et brudt linjestykke, og den vil blive mindst mulig når linjestykket er uden knæk, altså når linjestykket BPED udgør et linjestykke uden knæk.

Da vinkel APE = 60°, skal vinkel APB være 120° hvis der ikke må være knæk ved punkt P.

Og da vinkel AEP = 60°, skal vinkel AED også være 120° hvis der ikke må være knæk ved E.

Men vinkel AED er lig med vinkel APC, så de to vinkler ved punkt P, vinkel APB og vinkel APC, skal altså begge være 120°. Dermed er også den tredje vinkel ved punkt P, vinkel BPC, på 120°.

For den søgte placering af P har vi dermed: P skal have en sådan beliggenhed at de tre vinkler APB, BPC og CPA alle har en størrelse på 120°.

Der findes kun ét punkt der har denne beliggenhed, det kaldes trekantens *Fermat*-punkt efter den franske matematiker Fermat (1601-65).

Den udledning vi her har foretaget, gælder for trekanter hvor alle vinkler er under 120°.

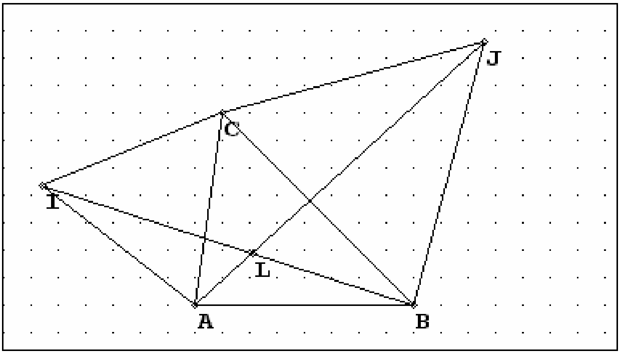
Hvis der i trekant ABC forekommer en vinkel på 120° eller derover er det ganske let at finde det punkt P for hvilket der gælder at PA+PB+PC er mindst mulig. (Prøv!)

Hvordan finder vi Fermat-punktet?

Men hvordan finder man så Fermat-punket i en trekant hvor alle vinkler er under 120°?

Bemærk at i figuren vi har set på, er trekant ACD en ligesidet trekant. Vinklen ved A er jo 60° og AC = AD. Dette giver os en metode til at finde det søgte Fermat-punkt.

Her er en figur som viser punktets beliggenhed i den trekant ABC vi har set på.



På to af siderne i trekant ABC er tegnet ligesidede trekanter: trekant ACI og trekant BCJ.

Derefter tegnes linjestykkerne BI og AJ. Hvor de to linjestykker skærer hinanden, ligger det søgte Fermat-punkt.

I INFA-programmet GEO kan du arbejde med bestemmelsen af Fermat-punktet for en forelagt trekant.

12. Kvadratroden af 2 er ikke et brøktal

I skolen har du arbejdet med hele tal, både positive og negative hele tal. Du har også arbejdet med brøktal som fx

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{12}{17} \qquad \frac{19}{360}$$

"Blandede tal" som $2\frac{5}{12}$ og $3\frac{4}{9}$ er også brøktal. Endvidere er alle decimaltal brøktal, fx kan decimaltallet 0,47 jo skrives som $\frac{47}{100}$.

Ethvert positivt brøktal x kan skrives som en uforkortelig brøk:

$$x = \frac{p}{q}$$

hvor p og q er hele positive tal.

Vi skal nu vise at $\sqrt{2}$ ikke er et brøktal, dvs. vi skal vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$ hvor p og q er hele positive tal. (Et bevis for dette findes allerede hos Euklid, 300 år f. Kr.).

Vi vil i beviset gøre brug af nogle egenskaber hos hele tal.

Hvis n er et lige tal, så er også n^2 et lige tal

Hvis n er et ulige tal, så er også n^2 et ulige tal

Vi antager nu at $\sqrt{2}$ kan skrives om en uforkortelig brøk:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Vi vil herefter vise at denne antagelse ikke kan være sand.

Vi kvadrerer udtrykket:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

og flytter om:

$$2q^2 = p^2$$

Vi ser at venstre side er et lige tal, 2 går jo op. Så må højre side også være et lige tal. Det betyder at p ikke kan være ulige, for så ville p^2 jo også være ulige. Tallet p er altså lige, og p må derfor kunne skrives som $2 \cdot r$. Vi kan nu regne videre

$$2 \cdot q^2 = (2r)^2$$

Hvoraf vi får:

$$2 \cdot q^2 = 4 \cdot r^2$$

der kan skrives som

$$q^2 = 2 \cdot r^2$$

Men dette udtryk viser nu at q også må være et lige tal.

Vi har derfor at både p og q må være lige tal. Men vi forudsatte at brøken $\frac{p}{q}$ var uforkortelig, og hvis p og q begge er lige tal, kan brøken jo forkortes med 2.

Med andre ord: Vor antagelse om at $\sqrt{2}$ kan skrives som en uforkortelig brøk har ført til en modstrid. Antagelsen må derfor være forkert. $\sqrt{2}$ er altså ikke et brøktal.

Vi har her ført et såkaldt *indirekte* bevis: Vi har opstillet en antagelse og derefter bevist at den fører frem til en modstrid. Vi konkluderer da at den opstillede antagelse må være forkert.

Med $\sqrt{2}$ har vi dermed et eksempel på et tal som ikke er med i klassen af brøktal.

Brøktallene kaldes også for **rationale tal**, den nye klasse af tal som bl.a. indeholder $\sqrt{2}$, kaldes **de irrationale tal.** Mængden af brøktal og irrationale tal kaldes **de reelle tal.**

De reelle tal kan beskrives ved uendelige decimalbrøker.

*

Et linjestykke uden længde. I et kvadrat med siden 1 vil diagonalen ifølge den Pythagoræiske læresætning have en længde x der er givet ved $x^2 = 2$. Diagonalens længde er derfor givet ved $x=\sqrt{2}$. Men som vi har vist, kan denne længde ikke udtrykkes ved et brøktal. Så hvis vi kun har de rationale tal til rådighed, så må vi sige at diagonalen i kvadratet ikke har nogen længde. Først med de irrationale tal får vi mulighed for at give diagonalen en længde.

Når vi skal fortælle hvad længden er, vil vi dog ofte bruge en tilnærmelsesværdi udtrykt ved et brøktal (fx et decimaltal) der ligger tæt på det irrationale tal. Til eksempel kan vi skrive

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

hvor det krøllede lighedstegn angiver at der er tale om en tilnærmet værdi.

Alle kvadratrødder som "ikke går op", er eksempler på irrationale tal, fx $\sqrt{3}$ og $\sqrt{5}$, men ikke $\sqrt{9}$ som jo er identisk med 3.

Prøv selv. Gør rede for at kvadratroden af 3 ikke er et brøktal

Også tallet π er et irrationalt tal. Det er altså ikke lig med $\frac{22}{7}$, denne værdi er kun en tilnærmelsesværdi. At π er et irrationalt tal blev bevist i 1761.

Kommentar. I Gunnar Bomans matematikleksikon kan du læse om de gamle grækeres reaktion på at kvadratroden af 2 ikke er et rationalt tal:

Denne opdagelse rystede forståeligt nok de gæve grækere. De havde hidtil troet, at to vilkårlige linjestykker var kommensurable, dvs. at man ved at vælge (et til lejligheden afpasset) lille linjestykke som måleenhed kunne angive måltallene for de to linjestykker som hele tal og på denne måde sammenligne de to linjestykkers længder. Med den nævnte opdagelse blev selv noget så enkelt som siden og diagonalen i et kvadrat usammenlignelige (inkommensurable) linjestykker.

13. Euklids algoritme

En algoritme er en opskrift på hvordan en proces, fx en beregning, kan gennemføres. Du kender fra skolematematikken en gangealgoritme. Den fortæller hvordan du fx ganger to fircifrede tal med hinanden. Også en algoritme til udførelse af division har du mødt. Ved hjælp af den kan du fx dividere et syvcifret tal med et trecifret.

Vi skal nu se på en algoritme som kan benyttes ved beregningen af den største fælles divisor for to tal.

Lad os tage tallene 30 og 18. Vi kan let se at 3 går op i begge tal. 3 er altså en fælles divisor for de to tal. Men 3 er ikke den største fælles divisor for 30 og 18, det er tallet 6.

Vi vil beskrive algoritmen til beregning af største fælles divisor ved et taleksempel.

Vi lader a være 100 og b være 64. Vi skal da finde den største fælles divisor for a og b.

Vi dividerer a med b og finder resten:

100 = 1·64 + 36 Vi kan "tage 64 én gang" og resten bliver 36.

Dernæst dividerer vi 64 med 36:

64 = 1·36 + 28 Vi kan tage 36 én gang og resten bliver 28.

Nu dividerer vi 36 med 28:

36 = 1·28 + 8 Vi kan tage 28 én gang og resten bliver 8.

Nu dividerer vi 28 med 8:

28 = 3·8 + 4 Vi kan tage 8 tre gange og resten bliver 4.

Herefter dividerer vi 8 med 4:

8 = 2·4 + 0.

Det sidste tal vi dividerede med er den søgte **største fælles divisor**, altså tallet 4.

Vi skal nu vise at denne metode altid fører til det ønskede resultat. Det betyder at vi skal vise tre ting:

(1) Metoden fører til et resultat, dvs. den afsluttes efter et antal divisioner

(2) Metoden fører til en fælles divisor for de to givne tal

(3) Den fundne divisor er den største fælles divisor for de to givne tal.

1. Metoden fører til et resultat
Ved metoden opstår der ved hver division en rest. Resterne bliver mindre for hver division der udføres. Efter et antal skridt må resten derfor komme ned på 0, og processen er afsluttet.

I vort taleksempel var resterne 36, 28, 8, 4 og 0. Her blev processen altså afsluttet efter 5 divisioner.

2. Metoden fører til en fælles divisor for a og b
Vi gengiver her de fem divisioner:

$100 = 1 \cdot 64 + 36$	$a = k1 \cdot b + b1$
$64 = 1 \cdot 36 + 28$	$b = k2 \cdot b1 + b2$
$36 = 1 \cdot 28 + 8$	$b1 = k3 \cdot b2 + b3$

$28 = 3 \cdot 8 + 4$	$b2 = k4 \cdot b3 + b4$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$	$b3 = k5 \cdot b4 + 0$

I venstre spalte har vi anført taleksemplet. I højre spalte har vi gengivet divisionerne som de generelt ville se ud uden at vi bygger på specielle talværdier. Det generelle skema vil ikke nødvendigvis indeholde netop 5 divisioner, her kan forekomme både flere og færre. Men skemaet vil altid efter et antal skridt slutte med en rest på 0.

Vi vil nu gøre brug af et alment resultat vedrørende tal . Lad os antage vi har et taludtryk med tre led: A = B + C. Der gælder da: Hvis et tal går op i to af de tre led, så går det op i alle tre led.

Tag til eksempel den tredje division i skemaet: Hvis et tal går op i både 1·28 og i 8, så går det også op i 36.

Vi bruger nu skemaet i højre spalte, og vi vil redegøre for at b4 er en fælles divisor for a og b. Vi ser at b4 går op i b3 (sidste division). Heraf følger i næstsidste division at da b4 går op i de to led på højre side af lighedstegnet, så går det også op i venstre ide, altså i b2.

Videre får vi af den foregående division: Da b4 går op i de to led på højre side, så går det også op i b1. Og vi fortsætter med den næstøverste division: Da b4 går op i de to led på højre side, så går det også op i b.

Og endelig den øverste division: Da b4 går op i de to led på højre side, nemlig k1·b og b1, så går det også op i venstre side, altså i a.

Alt i alt har vi derfor at b4 går op i både a og b. Dermed er b4 en fælles divisor for a og b.

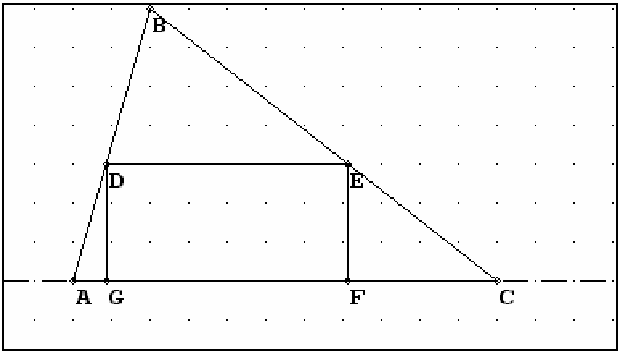
3. Metoden fører til den største fælles divisor for a og b
Lad os antage at vi har et tal x som er divisor i både a og b. Af den første division i skemaet får vi da at x også er divisor i b1. Af den anden division følger at x er divisor i b2, derefter af de næste divisioner at x er divisor i b3 og at x er divisor i b4.

Vi har dermed at en tilfældig divisor x i a og b også vil være divisor i b4. Men så kan x ikke være større end b4. Det fundne tal b4 er dermed ikke blot fælles divisor for a og b, men også den største fælles divisor.

Prøv selv: Find største fælles divisor for tallene

(1)	132 og 24	(2)	89 og 55
(3)	860 og 688	(4)	4401 og 1793

14. Største- og mindsteværdi



Figuren viser en trekant ABC hvori der er indskrevet et rektangel DEFG. Rektanglet har den ene side FG på trekantens side AC, og de to andre vinkelspidser i rektanglet ligger på siderne AB og BC.

Problemet er: Hvor stort et rektangel kan indskrives i trekant ABC? Hvad er arealet af det største rektangel der kan indskrives, og hvor højt oppe i trekanten skal vi placere DE?

Vi sætter højden i trekant ABC til h (det er højden fra punkt B). Endvidere sætter vi siden DG til x.

Vi har nu at rektanglets areal er givet ved: areal = x · DE.

Af ensvinklede trekanter DEB og ACB har vi nu:

$$\frac{DE}{AC} = \frac{h-x}{h}$$

Hvis vi indsætter DE i arealudtrykket, får vi:

$$\text{Areal} = x \cdot (h - x) \cdot \frac{AC}{h}$$

AC og h er faste størrelser I trekanten, dem kan vi ikke ændre længden af.

Men de to størrelse x og h–x kan vi styre. Hvis arealet af rektanglet skal være størst muligt, så skal produktet x·(h–x) være størst muligt.

Vi bruger nu vort resultat fra afsnittet om gennemsnit:

For alle tal tal a og b med en given sum
bliver produktet størst når a=b.

Vi har derfor at produktet x·(h-x) er størst muligt når x = h-x, dvs. når x = ½h.

Dermed har vi svaret på det stillede spørgsmål:

Det største rektangel fremkommer
når vi lader rektanglets højde være
det halve af trekantens højde.

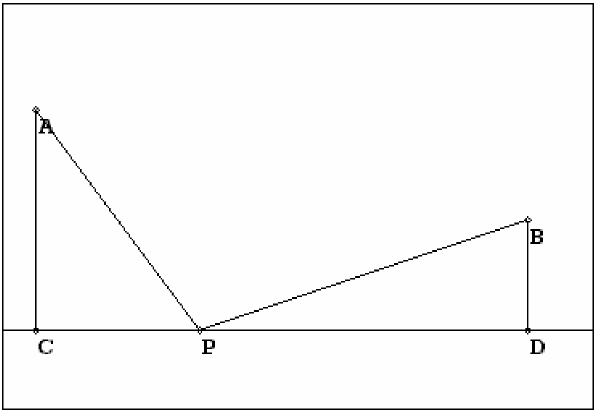
Hvad er arealet af dette rektangel? Ved indsættelse af x=½h i arealudtrykket får vi:

$$\text{Areal} = \tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{AC}{h} = 1/4 \cdot h \cdot AC$$

Men dette er netop halvdelen af arealet af trekant ABC som jo er ½·h·AC.

Det største rektangel der kan indskrives i trekant ABC har et areal der er det halve af trekantens areal.

Eksempel 2. Den korteste vej



Figuren viser punkt A og B og et linjestykke APB der forbinder A og B gennem et punkt P på AB.

Det oplyses at AC = 80 og at BD = 40. Endvidere: CD = 180.

Spørgsmålet er nu: Hvor på CD skal P placeres for at vejstrækningen APB bliver så kort som muligt?

Lad os sætte CP = x. Da er PD= 180 - x.

Af de retvinklede trekanter ACP og PDD har vi:

$$x^2 + 80^2 = AP^2 \quad \text{og} \quad (180 - x)^2 + 40^2 = PD^2$$

For vejstrækningen APB har vi da:

$$APB = \sqrt{x^2 + 6400} \;+\; \sqrt{(180 - x)^2 + 1600}$$

For hvilken værdi af x er APB kortest?

Vi bruger lommeregneren og gennemregner tre eksempler (kontroller tallene):

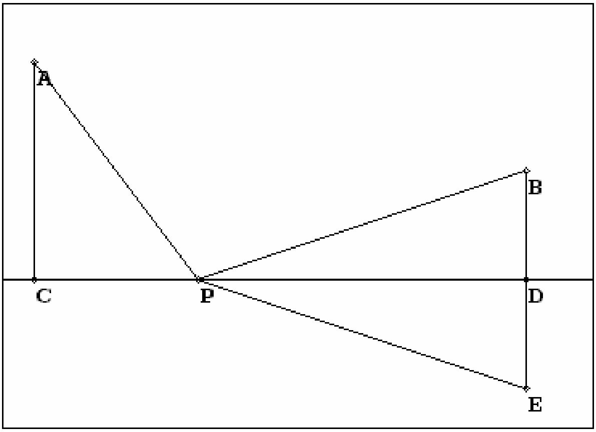
x = 40: APB = 235.04

x = 50: APB = 230.35

x = 60: APB = 226.49

Det fortæller os ikke hvad den kortest mulige vejstrækning er, men mon ikke den er under 220?

Vi skal nu se at vi med et geometrisk ræsonnement let finder den rette placering af P.

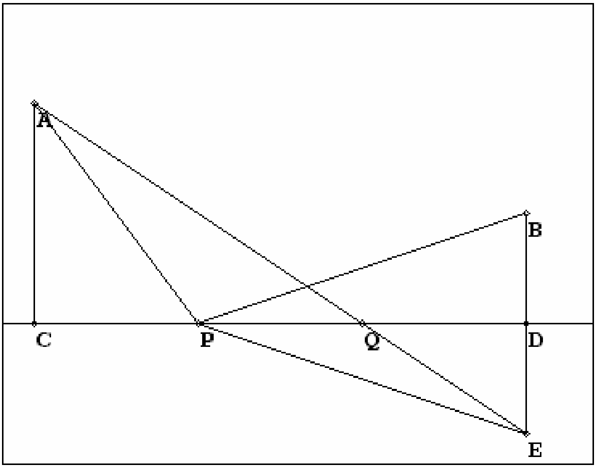


På figuren har vi indlagt et ekstra punkt, E. Det er placeret sådan at ED = BD = 40.

Vi kan nu fastslå at den søgte vejstrækning APB har samme længde som vejstrækningen APE. PB og PE er jo lige lange.

At søge den korteste strækning APB er derfor det samme som at finde den korteste strækning APE.

Men denne strækning er jo kortest hvis der ikke er knæk på linjestykket APE. Den korteste afstand får vi hvis APE er en ret linje. Denne linje er indtegnet på figuren nedenfor.



Den rette linje fra A til E skærer CD i punket Q. Her er så den søgte placering af P: P skal placeres hvor punktet Q ligger. Og den korteste vejstrækning Mellem A og E har samme længde som linjestykket AE.

Du kan nu let beregne længden af AE:

Trekant QDE og trekant QCA er ensvinklede. Heraf får vi:

$$\frac{QD}{QC} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

Det betyder at QD udgør en tredjedel af CD. QD har altså længden 60, og QC har længden 120. Det søgte punkt P skal altså ligge i en afstand af 120 fra C.

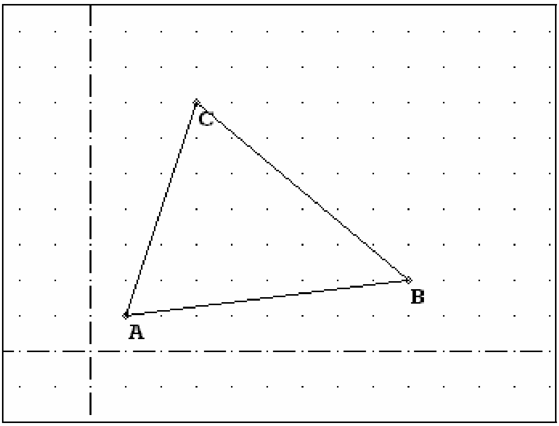
Prøv selv. Beregn afstanden APB når CP = 120.

Med INFA-programmet GEO kan du foretage eftersøgninger af største- og mindsteværdier af den slags du har mødt i dette afsnit.

15. Arealer i koordinatsystemet

Vi skal opstille en formel til beregning af arealer af figurer i koordinatsystemet. I et tidligere afsnit har vi allerede set på Gitterformlen. Men den kan kun benyttes hvis vi arbejder med figurer som har vinkelspidserne placeret i gitterpunkter, dvs. i punkter i koordinatsystemet med koordinater som er hele tal.

Den nye formel, som vi vil betegne HV-formlen (efter Højre og Venstre), gælder derimod for alle placeringer af figurens vinkelspidser.



Figuren viser trekant ABC hvor vinkelspidsernes koordinater er.

A(1,1) B(9,2) C(3,7)

Vi foretager nu udregningen af to udtryk H og V som fremkommer ved at vi foretager to ture rundt om trekanten, en Højre-tur og en Venstre-tur.

H: 1x2 + 9x7 + 3x1 = 68

H fremkommer ved at vi tager punkt A som udgangspunkt og ganger x-værdien for A med y-værdien for B, dernæst tager vi x-værdien for punkt B og ganger med y-værdien for C, og til sidst tager vi x-værdien for C og ganger med y-værdien for A. Vi har nu fuldført Højre-turen, og vi lægger de fundne tal sammen. Det giver H= 68.

Derefter gennemfører vi Venstre-turen:

V: 1x7 + 3x2 + 9x1 = 22

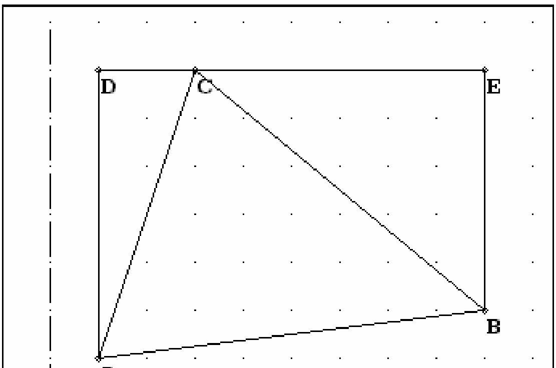
Vi tager igen udgangspunkt i A, men går nu venstre om i trekanten. Vi ganger x-værdien for A med y-værdien for C, dernæst ganger vi x-værdien for C med y-værdien for B, og til sidst ganger vi x-værdien for B med y-værdien for A. Vi har nu fuldført Venstre-turen, og vi lægger de fundne tal sammen. Det giver V = 22.

HV-formlen siger nu at trekantens areal er givet ved:

Areal = ½(H–V)

Vi får altså at trekantens areal er: ½·(68 - 22) = 23.

Vi ser nu på et bevis for formlens rigtighed.



På figuren fra før er indtegnet en linje gennem C parallel med x-aksen og linjer gennem A og gennem B parallelle med y-aksen. Herved fremkommer skæringspunkterne D og E.

Den oprindelige trekant ABC indgår nu som en del af firkanten ADEB. Denne firkant er et trapez: Siderne AD og BE er parallelle.

Vi vil nu beregne arealet af trapezet ADEB og af de to retvinklede trekanter ADC og BEC.

Trapez ADEB
Areal = ½·DE·(AD + BE) = ½·(DC + EC)·(AD + BE)

Trekant ADC Areal = ½·AD·DC

Trekant BEC Areal = ½· BE· EC

Når vi trækker de to trekantarealer fra trapezets areal frem-kommer arealet af trekant ABC:

Trekant ABC Areal = ½(AD·EC + BE·DC)

Vi kan nu anvende koordinaterne for trekantens vinkelspidser. Med xA betegner vi x-koordinaten til punkt A, med yA betegner vi y-koordinaten til A, osv.

Vi har da for længderne af de fire linjestykker der indgår i arealet for trekant ABC:

AD = yC - yA EC = xB - xC

BE = yC - yB DC = xC - xA

Ved indsættelse af disse udtryk får vi:

Areal af ABC = ½·((yC - yA)·(xB - xC) + (yC - yB)·(xC - xA))

Det kan omformes til:

Areal af ABC =

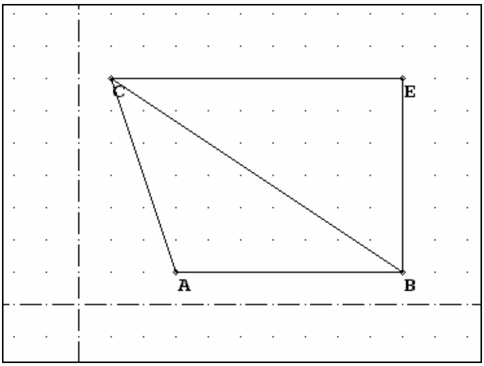
$\frac{1}{2} \cdot (xA \cdot yB + xB \cdot yC + xC \cdot yA - xA \cdot yC - xC \cdot yB - xB \cdot yA)$

Men dette udtryk er netop lig med ½(H–V).

Vi har i vor udledning forudsat at trekant ABC har en sådan beliggenhed i koordinatsystemet at de tre hjælpefigurer, et trapez og to retvinklede trekanter, kan indtegnes på den angivne måde.

Andre beliggenheder. Men andre beliggenheder kan forekomme. For eksempel kan trekanten have en eller to sider parallel med en koordinatakse. Med to sider parallel med akserne vil trekanten være retvinklet. Det kan let vises at HV-formlen gælder for en sådan trekant. (Prøv selv!)

Hvis en af siderne i trekant er parallel med en koordinatakse, vil der kunne tegnes et trapez samt en retvinklet trekant:

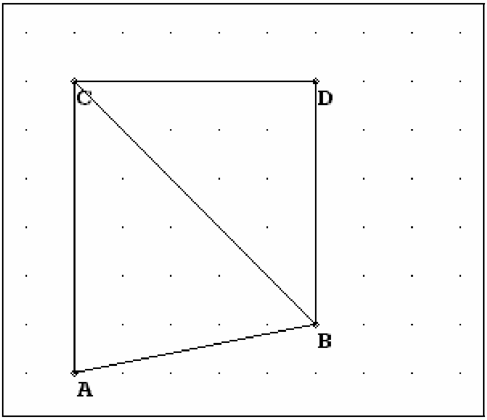


På figuren er AB parallel med x-aksen. Hjælpefigurerne er her trapezet ACEB og den retvinklede trekant BEC.

Prøv selv. Vis at HV-formlen gælder for en trekant med denne beliggenhed.

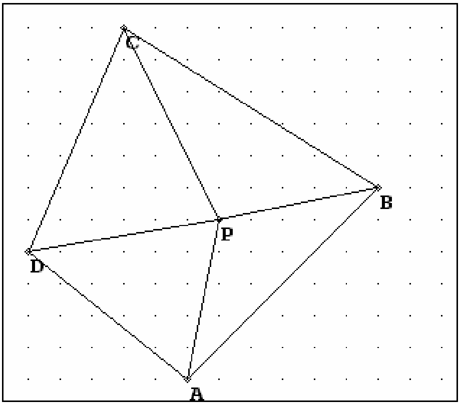
*

På figuren nedenfor er siden AC i trekant ABC parallel med y-aksen. Hjælpefigurerne er her trapezet ABDC og den retvinklede trekant BDC.



Også for en trekant i denne beliggenhed kan vi let eftervise gyldigheden af HV-formlen.

Vi vil nu se at HV-formlen også gælder for andre "kanter" end trekanter. Vi ser på en firkant ABCD:



I firkantens indre har vi afsat et punkt P, og derefter har vi opdelt firkanten i fire trekanter.

Vi vil nu vise at HV-formlen anvendt på firkanten giver et resultat der stemmer med at vi anvender HV-formlen på hver af de fire trekanter og derefter lægger de fundne arealer sammen.

Af hensyn til overskueligheden bruger vi betegnelsen A*B for tallet ½· xA·yB, og tilsvarende for de andre punkter på figuren. A*B er altså det halve produkt af x-koordinaten for A og y-koordinaten for B. Med denne betegnelse kan HV-formlen for trekant ABC udtrykkes ved:

A*B + B*C + C*A – A*C – C*B – B*A

For de fire trekanter på figuren får vi nu følgende udtryk for arealerne:

Trekant PAB: P*A + A*B + B*P – P*B – B*A –A*P

Trekant PBC: P*B + B*C + C*P – P*C – C*B – B*P

Trekant PCD: P*C + C*D + D*P – P*D – D*C – C*P

Trekant PDA : P*D + D*A + A*P – P*A – A*D – D*P

Af arealudtrykkene kan vi se at B*P der forekommer med positivt fortegn ved trekant PAB, optræder med negativt fortegn ved trekant PBC. Ligeledes ses det at P*B der forekommer med negativt fortegn ved trekant PAB, optræder med positivt fortegn ved trekant PBC.

Hvis vi går de fire arealudtryk efter, vil vi se at hver gang et udtryk indeholder P, så forekommer det to gange med hver sit fortegn. Ved sammenlægning af de fire arealer vil alle udtryk med P derfor forsvinde.

Tilbage får vi for summen af de fire udtryk:

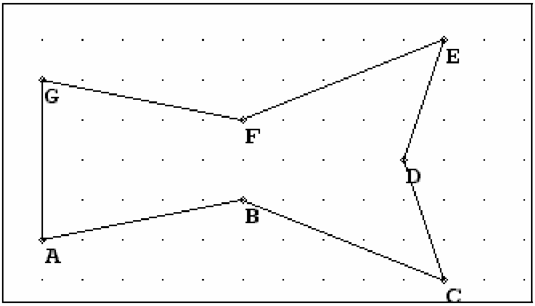
Areal af firkant:

A*B + B*C + C*D + D*A – A*D – D*C – C*B – B*A

Men dette er netop det resultat vi ville få ved at benytte HV-formlen på firkant ABCD.

På tilsvarende vis kan HV-formlens gyldighed vises for enhver polygon som ved hjælp at et indre punkt kan opdeles i trekanter. Beviset for formlens gyldighed vil også gælde for ukonvekse polygoner hvor det er muligt at vælge et indre punkt hvorfra man kan "se ud i alle hjørner".

Her er en sådan figur:



Beregn ved hjælp af HV-formlen arealet af denne syvkant.
Punkternes koordinater er:

A(2,2)   B(7,3)   C(12,1)   D(11,4)   E(12,7)   F(7,5)   G(2,6)

16. Lidt talteori

Eksempel 1. To på hinanden følgende lige tal
Tag to på hinanden følgende lige tal og gang dem sammen. Produktet vil altid være deleligt med 8.

Taleksempler:
$4 \cdot 6 = 24$, er deleligt med 8. $8 \cdot 10 = 80$, er deleligt med 8.

Beviset. De to tal kan skrives som $2n$ og $2n+2$. Vi skal da vise at 8 går op i $2n \cdot (2n+2)$.

De to tal $2n$ og $2n+2$ er to på hinanden følgende tal i 2-tabellen. Det betyder at det ene af dem er deleligt med 2 og det andet med 4. Så vil produktet af de to tal være deleligt med $2 \cdot 4$, altså med 8.

Eksempel 2. Tre på hinanden følgende lige tal
Tag tre på hinanden følgende lige tal og gang dem sammen. Produktet vil altid være deleligt med 48.

Taleksempler:
$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, er deleligt med 48. $8 \cdot 10 \cdot 12 = 960$, er deleligt med 48.

Beviset. De tre tal kan skrives som $2n$, $2n+2$ og $2n+4$. Vi skal da vise at 48 går op i produktet $2n \cdot (2n+2) \cdot (2n+4)$.

De tre tal er tre på hinanden følgende tal i 2-tabellen. De kan alle tre deles med 2, og mindst ét af dem kan deles med 4. Dvs. produktet kan deles med $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$.

Men for tre på hinanden følgende lige tal gælder yderligere at et af dem er deleligt med 3. Altså vil produktet af de tre tal være deleligt med $16 \cdot 3 = 48$

Eksempel 3. Kvadratet på et primtal
Tag et primtal p større end 3. Da gælder at $p^2 - 1$ er deleligt med 24.

Taleksempler: $5^2 - 1 = 24$, er deleligt med 24. $7^2 - 1 = 48$, er deleligt med 24.

Beviset. Vi omskriver: $p^2 - 1 = (p-1)\cdot(p+1)$. Da p er et primtal større end 3, må $p-1$ og $p+1$ begge være lige tal. Da de er to på hinanden følgende lige tal, må det ene af dem være deleligt med 4. Produktet af de to tal er derfor deleligt med $2\cdot 4 = 8$.

Vi ser nu på de tre tal: $(p-1)\ p\ (p+1)$. De er tre på hinanden følgende tal i talrækken. Et af dem vil kunne deles med 3. Men det kan ikke være p som er et primtal større end 3, derfor må 3 gå op i enten $p-1$ eller i $p+1$. Produktet $(p-1)\cdot(p+1)$ er derfor deleligt med både 8 og med 3, dvs. med 24.

Prøv selv. Tag et lige tal og gang det med de to efterfølgende tal i talrækken (fx $4\cdot 5\cdot 6$). Vis at 24 altid går op i produktet.

Prøv selv. Vis at 120 altid går op i produktet af fem på hinanden følgende tal.

Eksempel 4. Hvis $n>1$ og $n^2 + 2$ er et primtal, så går 3 op i n.
To taleksempler: For $n=3$ er $n^2 + 2$ et primtal, og 3 går op i n. Og for $n=9$ er $n^2 + 2$ et primtal, og 3 går op i n.

Bemærk: For $n=6$ er $n^2 + 2$ ikke et primtal, men 3 går op i n. (Er det i modstrid med påstanden i eksempel 4?)

Beviset. Vi vælger at dreje beviset for påstanden i eksempel 4 sådan:

Hvis 3 *ikke* går op i n, så er $n^2 + 2$ *ikke* et primtal.

Hvis 3 ikke går op i n, så vil n give resten 1 eller 2 ved division med 3. Vi har altså to muligheder for n:

(1) n giver rest 1 ved division med 3, dvs. n kan skrives som $3x + 1$.

(2) n giver rest 2 ved division med 3, dvs. n kan skrives som $3x + 2$.

(1) For $n = 3x+1$ har vi: $n^2 + 2 = (3x+1)^2 + 2 = 9x^2 + 6x + 3$. Dette tal kan ikke være et primtal (forklar hvorfor).

(2) For $n = 3x+2$ har vi: $n^2 + 2 = (3x+2)^2 + 2 = 9x^2 + 12x + 6$. Dette tal kan heller ikke være et primtal.

Altså har vi: Hvis 3 ikke går op i n, så er $n^2 + 2$ ikke et primtal.

Gør rede for at vi dermed har ført bevis for den opstillede påstand i eksempel 4.

Prøv selv
Bevis at hvis p er et primtal større end 3, så går 3 op i $p^2 + 2$.

Et åbent spørgsmål
I talteorien findes en del åbne spørgsmål, og nogle af dem kan forstås på baggrund af skolematematikken. Et af dem er den såkaldte Goldbach-formodning. Goldbach fremsatte i 1742 den formodning at **ethvert lige tal større end 2 kan skrives som summen af to primtal**. Her er nogle eksempler:

$4 = 2 + 2$ $6 = 3 + 3$ $8 = 3 + 5$ $10 = 3 + 7$

$28 = 5 + 23$ $40 = 3 + 37$ $100 = 3 + 97$

De fleste lige tal vil på flere måder kunne skrives som summen af to primtal. Når tallene bliver større, vil der være mange muligheder for at skrive dem som sum af to primtal. Fx kan tallet 100 millioner skrives som en sum af to primtal på over 200 000 måder.

Der er ikke fundet noget eksempel på at Goldbachs formodning ikke gælder. Men der er heller ikke ført bevis for at den er sand. Med computere har man påvist at hvis der skal findes et modeksempel, så har det mere end 15 cifre.

Hvis Goldbachs formodning er sand, så kan vi fremsætte følgende resultat:

> **Ethvert ulige tal større end 5 kan skrives som summen af tre primtal.**

Beviset. Lad n være et ulige tal større end 5. Så vil tallet n–3 være et lige tal større end 2. Dette lige tal vil ifølge Goldbachs formodning kunne skrives som en sum af to primtal, a og b. Men så vil n kunne skrives således: n = a + b + 3, altså som summen af tre primtal.

Og et spørgsmål der blev besvaret

Omkring 1637 fremsatte den franske matematiker Fermat (1601-65) en påstand som er gået over i historien som *Fermats store sætning*. Her siger han at ligningen

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n},$$

hvor x, y og z er hele positive tal og n er et helt tal større end 2, ikke har nogen løsning.

Når n=2, så kender vi ligningen fra omtalen af retvinklede trekanter og de pythagoræiske talsæt. Her ved vi der er uendelig mange løsninger til ligningen. Den enkleste af dem er:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Men når n er større end 2, er der ingen løsninger, siger Fermats store sætning. Således har ligningen $x^3 + y^3 = z^3$ ingen løsninger hvor x, y og z er hele positive tal.

Der skulle gå over 250 år før der blev givet et bevis for Fermats store sætning. Gennem årene har mange forsøgt med et bevis, men først i 1990'erne lykkedes det for en matematiker at komme med det endelige bevis for sætningen.

Fermat påstod at han selv havde et bevis for "denne vidunderlige sætning", men at margenen i hans matematikbog var for lille til at han kunne gengive beviset der. Den matematiske verden kom til at vente i mere end 250 år på et bevis.

17. Uendeligt mange

Vi ved at der findes uendeligt mange hele positive tal, de såkaldte naturlige tal.

Vi kan stille de naturlige tal op i rækkefølge efter størrelse:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Rækken slutter aldrig, vi kan blive ved med at føje nye tal til.

Vi siger at der findes *tælleligt* mange naturlige tal, eller at de naturlige tal udgør en tællelig mængde.

Dermed mener vi at de naturlige tal udgør en uendelig mængde som vi kan opstille i en rækkefølge så alle tal kommer med i rækken, og hvert tal kun kommer med én gang. Det princip vi her opstiller tallene efter, er tallenes størrelse. Som vi skal se om lidt, så er det ikke altid tallenes størrelse der ligger til grund for en opstilling af en tællelig mængde.

Ser vi nu på de *lige tal,* så udgør de også en tællelig mængde. Vi kan opstille de lige tal i rækkefølge efter størrelse:

$$2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots$$

Til nr. 7 i rækken svarer det lige tal $2 \cdot 7 = 14$. Til tal nr. n svarer det lige tal $2n$. Ethvert lige tal kommer med i rækkefølgen, og det er kun med én gang.

Også *kvadrattallene* udgør en tællelig mængde: De kan på tilsvarende måde opstilles i rækkefølge efter størrelse:

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

Til nr. 7 i rækken svarer $7^2 = 49$. Til nr. n svarer kvadrattallet n^2. Ethvert kvadrattal kommer med i rækkefølgen, og det er kun med én gang.

Også ***primtallene*** kan opstilles i en række efter størrelse:

2, 3, 5, 7, 11, 13, …

I et tidligere afsnit har vi vist at der findes uendeligt mange primtal.

Her kan vi ikke give en formel som fortæller hvilket tal der er nr. n i rækken. Vi må nøjes med at sige: Tal nr. n i rækken er det n'te primtal når primtallene opstilles i rækkefølge efter størrelse. - Mængden af primtal er en tællelig mængde.

Hvad med *brøktallene*? Lad os se på mængden af uforkortelige brøker mellem 0 og 1. Her finder vi fx brøktallene 1/2, 2/3, 19/126 og 113/355.

Udgør denne mængde af brøktal en tællelig mængde?

Vi kan ikke opstille brøktallene i rækkefølge efter deres størrelse. For hvad skulle det første tal i rækken være? Hvis vi tænker os at vi forsøger med 1/1000 som det første brøktal, så kan vi straks angive et andet tal som er mindre og som derfor kommer før vores forslag, fx 1/2000 eller 1/1001. Begge disse tal er jo mindre end 1/1000.

På samme måde kan vi indse at mængden af brøktal er uendelig. Var den ikke det, måtte der jo være et mindste brøktal, og det kan ikke være sandt. Vi kan jo altid finde et brøktal der er endnu mindre.

Vi kan altså ikke opstille brøktallene i rækkefølge efter størrelse. Vi må finde en anden måde at opstille dem på.

Vi vælger her at opstille dem efter brøktallenes nævner. Først tager vi tal med nævneren 2, derefter tal med nævneren 3, osv. Rækkefølgen vil nu se sådan ud:

1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 ….

Et tal der allerede er med i rækkefølgen, springes over, fx er 2/4 ikke taget med, det findes allerede som 1/2.

Ethvert brøktal mellem 0 og 1 vil på denne måde komme med i rækkefølgen, og det vil kun komme med én gang.

Vi skal ikke her give en formel til beregning af det tal der står som nr. n i rækkefølgen. Vi skal blot nævne at en sådan formel kan opstilles, og den viser fx at 1/100 er nr. 3004 i rækken.

Vi sammenfatter: At en uendelig mængde er *tællelig* betyder at dens elementer kan opstilles i en rækkefølge svarende til de naturlige tal: Element nr. 1, nr. 2, nr. 3, osv.

Ikke-tællelige mængder

Der findes uendelige mængder som ikke er tællelige. Vi skal se på et eksempel. Som du ved findes der hele tal og brøktal. Og i et tidligere afsnit har vi vist at $\sqrt{2}$ ikke er et brøktal, men et såkaldt irrationalt tal. Også tallet π er et irrationalt tal. De irrationale tal kan beskrives ved hjælp af uendelige decimalbrøker:

$\sqrt{2}$ = 1,41421356…. π = 3,14159265 …

(decimalerne fortsætter i det uendelige)

Vi vil nu se på en mængde af uendelige decimalbrøker, nemlig den mængde som består af de uendelige decimalbrøker som ligger i området mellem 0 og 1 og hvor alle decimaler er enten

1 eller 2. For eksempel kan tre af de tal der er med i mængden skrives ved decimalbrøker der indledes sådan:

0,11212212..   0,2221111..   0,21212121…

Lad os nu antage at denne mængde af uendelige decimalbrøker var tællelig. Så ville tallene i mængden kunne skrives op i en rækkefølge, tal nr. 1, tal nr. 2 , osv. Vi vil nu påvise at en sådan rækkefølge ikke kan indeholde alle tal fra mængden. Og derfor kan mængden ikke være tællelig.

Det viser vi ved at konstruere et tal, en uendelig decimalbrøk, som ikke er med i rækkefølgen af tal i mængden.

Vi danner et tal på følgende måde:

1. decimal i tallet: Hvis 1. decimal i 1. tal i rækkefølgen er 1, så vælger vi 2. Hvis 1. decimal i 1. tal rækkefølgen er 2, så vælger vi 1.

2. decimal i tallet: Hvis 2. decimal i 2. tal i rækkefølgen er 1, så vælger vi 2. Hvis 2. decimal i 2.tal i rækkefølgen er 2, så vælger vi 1.

3. decimal i tallet: Hvis 3. decimal i 3. tal i rækkefølgen er 1, så vælger vi 2. Hvis 3.decimal i 3.tal i rækkefølgen er 2, så vælger vi 1.

På denne måde fortsættes, decimal for decimal.

Lad os antage at de tre tal fra før var de første tre tal i rækkefølgen:

0,**1**1212212..   0,2**2**21111..   0,21**2**12121…

Vi har fremhævet de tre decimaler som er bestemmende for vort forslag til et tal som ikke kan være med i den forelagte rækkefølge. Tallets første tre decimaler skal være forskellige fra de tre fremhævede tal, dvs. første decimal skal være 2, den næste 1 og den tredje også 1. Tallet indledes dermed ved:

0,211

Efter den opstillede metode kan vi fortsætte med at føje decimaler til.

Vi vil nu kunne se at det tal vi danner på denne måde, ikke kan være med i rækkefølgen over alle tal i mængden. Vort tal er jo forskellig fra det første tal i rækkefølgen da det afviger på 1. decimal. Det er også forskelligt fra det andet tal i rækkefølgen, det afviger på 2. decimal. Og det er forskelligt fra det tredje tal i rækkefølgen, det afviger på tredje decimal.

Ligegyldigt hvilket tal i rækkefølgen vi sammenligner med vort konstruerede tal, så vil der være en afvigelse. Vort tal kan derfor ikke være med i rækkefølgen.

Mængden af uendelige decimalbrøker der skrives med cifrene 1 og 2 er derfor ikke tællelig.

Du vil sikkert kunne indse at vi kunne gennemføre et tilsvarende bevis for mængden af uendelige decimalbrøker hvor alle cifre 0..9 er tilladt. Vi har dermed: Mængden af irrationale tal er ikke tællelig. - Og heraf følger umiddelbart:

Mængden af reelle tal er ikke tællelig

Vi har i dette afsnit givet eksempler på to grader af uendelighed repræsenteret ved de naturlige tal og de reelle tal. Men der findes mængder hvis grad af uendelighed "er endnu værre" og overgår den der foreligger hos de reelle tal.

18. Hvilken ugedag?

Her kommer lidt kalender-matematik. Vi vil se på en formel til udregning af ugedagen for en forelagt dato inden for perioden 1900-2099.

For datoer i denne periode tager vi udgangspunkt i datoen 1.3.1900, og herfra regner vi frem til den forelagte dato. Hver gang vi tæller 7 dage frem, kommer vi til samme ugedag. Og tæller vi fx 100 dage frem, så svarer det til at tælle to ugedage frem, 100 giver jo resten 2 når vi dividerer med 7.

I kalendermatematik drejer det sig om at regne med rester ved division med 7.

Ved beregningen får vi brug for en liste med den første dag i hver måned. Vi opstiller listen med marts som den første måned og derfor med 1. marts som dag nr. 1.

Til højre i opstillingen har vi anført hvor mange ugedage vi skal tælle frem **fra 1. marts**. Ser vi fx på 1. juni, så er den nr. 93 på listen. Fra den 1. marts tæller vi altså 92 dage frem for at komme til 1. juni. Og 92 giver rest 1 ved division med 7, så hvis ugedagen for 1. marts fx er mandag, så er ugedagen for 1. juni tirsdag. Vi skal altså tælle 1 ugedag frem fra 1. marts for at få ugedagen for 1. juni.

	Antal ugedage der tælles frem fra 1. marts:
1. marts: Dag nr. 1	Vi tæller 0 ugedage frem
1. april: Dag nr. 32	Vi tæller 3 ugedage frem
1. maj: Dag nr. 62	Vi tæller 5 ugedage frem fra
1. juni: Dag nr. 93	Vi tæller 1 ugedag frem

1. juli: Dag nr. 123	Vi tæller 3 ugedage frem
1. august: Dag nr. 154	Vi tæller 6 ugedage frem
1. september: Dag nr. 185	Vi tæller 2 ugedage frem
1. oktober: Dag nr. 215	Vi tæller 4 ugedage frem
1. november: Dag nr. 246	Vi tæller 0 ugedage frem
1. december: Dag nr. 276	Vi tæller 2 ugedage frem
1. januar: Dag nr. 307	Vi tæller 5 ugedage frem
1. februar: Dag nr. 338	Vi tæller 1 ugedag frem

I listen har vi valgt at lade januar og februar være de sidste måneder: Dermed opnår vi at en eventuel skudårsdag (29. februar) er placeret sidst i listen. Månederne har numre fra 3 (marts) til 13 (januar) og 14 (februar). Månederne januar og februar regnes med i det foregående år. En dato som 25.1.1995 oversættes derfor til 25.13.1994.

Her er listen over det antal ugedage der skal tælles frem fra 1. marts:

Marts: 0	April: 3	Maj: 5
Juni: 1	Juli: 3	August : 6
September: 2	Oktober: 4	November: 0
December: 2	Januar: 5	Februar: 1

Vi beregner nu ugedagen efter følgende formel:

U = D + M + Å + X + 3 (modulo 7)

Betegnelserne dækker over følgende:

D: dagens nr. i måneden (for den 12. i måneden er D=12)

M: månedens tal i listen ovenfor (for april er M=3)

Å: årstal minus 1900 (for 2006 er Å=106)

X: Å /4 (der ses bort fra resten, for Å=106 er X=26)

Betegnelsen "modulo 7" betyder at vi skal beregne resten ved division med 7. Vi får altså værdien for U ved at lægge tallene sammen, D+M+Å+X+3, og tage rest ved division med 7. Så har vi ugedagen:

U = 0 : søndag
U = 1 : mandag
U = 2 : tirsdag
U = 3 : onsdag
U = 4 : torsdag
U = 5 : fredag
U = 6 : lørdag

Eksempel: Ugedagen for 4. 5. 1945
Her har vi: D= 4, M=5, Å= 45, X=11
D+M+Å+X+3 = 4+5+45+11+3 = 68.

U = 68 (modulo 7) = 5.   (Ved division med 7 bliver resten 5).
Ugedagen er en fredag.

Eksempel: Ugedagen for 6. 2. 2005
Her har vi: D=6, M= 1, Å = 104, X=26
D+M+Å+X+3 = 6+1+104+26 +3=140

U = 140 (modulo 7) = 0. (Ved division med 7 bliver resten 0).
Ugedagen er en søndag.

Kommentarer til ugedagsformlens tal: Å, X, M, D og 3:

Å: Et almindeligt år har 365 dage, og 365 giver rest 1 ved division med 7. Det betyder at går vi et år frem fra i dag, så skal vi tælle 1 frem i ugedag. Når 13. 6. 2002 er en torsdag, så er 13. 6. 2003 en fredag. - I U-formlen bliver Å 1 større for hvert år vi går frem. Det svarer til at ugedagen rykker 1 for hvert almindeligt år.

X: Et skudår har 366 dage, og 366 giver rest 2 ved division med 7. Det betyder at vi ved hvert skudår, hvor vi passerer 29. februar, skal tælle frem med en ekstra ugedag. Når 13.6. 2003 er en fredag, så er 13. 6. 2004 en søndag.

I U-formlen sørger de to tal Å og X for at vi tæller korrekt frem i ugedagene når vi går et antal år frem fra 1900. Når U-formlen stemmer for 1.3. 1900, så sørger de to tal Å og X for at formlen også stemmer for de følgende år i perioden 1900 til 2099. - I denne periode er hvert fjerde år skudår, 1904, 1908, 2096. Grunden til at formlen ikke gælder ud over 2099, er at 2100 ikke er et skudår selv om 4 går op i årstallet - Man kan dog udbygge formlen, så den gælder både før 1900 og efter 2099.

M: Tallet M sørger for at vi tæller korrekt frem fra 1. marts til den første i en anden af årets måneder. For værdierne af M har vi ovenfor opstillet en liste. Som du skal se kan tallene i M-listen erstattes af en formel.

D: Tallet D sørger for at vi tæller korrekt frem fra den 1. i måneden til den forelagte dag.

3: Dette tal er valgt sådan at U-formlen giver den rigtige ugedag for startdatoen 1. marts 1900 (en torsdag).

*

En formel for M
Det er muligt at give en formel for de tal der er anført i månedslisten ovenfor. Det kan vises at tallene i listen kan beregnes ved hjælp af at tallet $13 \cdot m - 2$ divideres med 5 (der ses bort fra resten). I udtrykket er m månedens nummer, dvs. 3 for marts, 4 for april, ..., 13 for januar, 14 for februar.

Du kender måske begrebet "den hele del" af et tal. Ved den hele del af tallet x forstår vi det største hele tal n som er mindre end eller lig med x. ("Vi smider decimalerne væk"). Den hele del af x betegner vi med kantede parenteser: [x]. Vi har fx : [3.25] = 3 og [5] = 5. Her er en tabel over omregningen fra m til M

m	[(13m – 2)/5]	M=Rest ved div. med 7
3	7	0
4	10	3
5	12	5
6	15	1
7	17	3
8	20	6
9	23	2
10	25	4
11	28	0
12	30	2
13	33	5
14	36	1

Ved brug af "hel del" kan ugedagsformlen skrives sådan:

$$\mathbf{U = D + [\,(13 \cdot m - 2)/5] + Å + [Å/4] + 3 \quad (modulo\ 7)}$$

Konstanten 3 kan inddrages i udtrykket 13m – 2. Herved bliver formlen:

$$U = D + [\,(13 \cdot m + 13)/5] + Å + [Å/4] \quad (\text{modulo } 7)$$

Prøv selv. Afprøv ugedagsformlen på nogle datoer du selv vælger.

19. Et udvalg - af den ene eller anden slags

Vi ser på et selskab af personer. Nogle i selskabet kender hinanden, andre kender ikke hinanden. Vi vil se på hvor mange personer vi skal udvælge for at være sikre på at vi enten har tre personer som alle kender hinanden, eller vi har tre personer som alle er ukendte for hinanden.

Vi vil nu bruge tal til at give en matematisk beskrivelse af sagen. Lad os tage en samling af hele tal. Hvis to tal har en fælles primtalsdivisor, altså et primtal som går op i dem begge, siger vi at de to tal er et A-par. Det svarer til at to personer kender hinanden. Hvis de to tal ikke har en fælles primtals-divisor, siger vi at de to tal er et B-par. Det svarer til at to personer ikke kender hinanden.

Lad os tage en samling på fem tal:

24 27 32 43 79

24 og 27 udgør et A-par, de to tal har jo 3 som fælles primtalsdivisor. Tallene 24 og 32 udgør også et A-par, de har jo 2 som fælles primtalsdivisor.. Men 27 og 32 har ingen fælles primtalsdivisor, de udgør derfor et B-par.

Hvis vi har tre tal som alle udgør et A-par med hvert af de andre tal, så siger vi at de tre tal udgør et A-udvalg.

Tilsvarende siger vi at tre tal udgør et B-udvalg hvis hvert af de tre tal udgør et B-par med hvert af de andre tal..

Vi kan hurtigt se at der ikke findes tre tal i samlingen ovenfor som udgør et A-udvalg. Derimod er der tre tal som udgør et B-udvalg, nemlig tallene 32, 43 og 79. Der er jo ikke to af dem som har en fælles primtalsdivisor.

I øvrigt udgør 24, 43 og 79 også et B-udvalg, og det samme gælder for 27, 43 og 79.

I vores samling på fem tal kan vi altså finde tre tal som udgør et B-udvalg, ingen af dem har en primtalsdivisor fælles med et af de andre tal.

Vi ser på en anden samling af fem tal:

12 14 21 79 97

De tre tal 12, 14 og 21 udgør et A-udvalg: 12 og 14 har 2 som fælles divisor, 12 og 21 har 3 som fælles divisor, og 14 og 21 har 7 som fælles divisor. - Tallene 21, 79 og 97 udgør et B-udvalg, der er ikke to af tallene der har en fælles primtalsdivisor.

I denne samling af tal har vi altså både et eksempel på tre tal som udgør et A-udvalg og tre tal som udgør et B-udvalg..

I de to samlinger af tal har vi altså kunnet finde eksempler på tre tal som enten udgør et A-udvalg eller som udgør et B-udvalg. Det svarer til at vi i en samling af fem personer kan udtage tre som alle kender hinanden, eller vi kan udtage tre personer hvoraf ingen kender hinanden.

Prøv selv. Her er fem samlinger af tal. Undersøg om der i hver af dem kan findes tre tal som udgør et A-udvalg eller tre tal som udgør et B-udvalg.

1:	11	26	29	32	59
2:	12	34	52	59	60
3:	24	40	52	56	60
4:	15	17	41	56	57

```
5:        14     16     40     44     47
```

Fem personer er ikke altid nok

Lad os se på samlingen:

6 10 21 55 77

Tallene 6 og 10 udgør et A-par, det samme gør 6 og 21, men 10 og 21 udgør et B-par. Andre A-par: 10 og 55, 21 og 77 samt 55 og 77.

Men vi kan ikke i samlingen finde tre tal som udgør et A-udvalg. Og vi kan heller ikke finde tre tal som udgør et B-udvalg. (Kontroller at det er sandt).

Dette eksempel viser os at i en forsamling af personer er det ikke nok at udtage fem hvis vi vil være sikker på udtage enten tre personer som alle kender hinanden eller tre personer hvoraf ingen kender hinanden.

Hvor mange personer skal vi mon udtage for at være sikker på at få enten tre personer som alle kender hinanden, eller at få tre personer hvoraf ingen kender hinanden. Som vi kan se, er det ikke nok at udtage 5 personer.

Svaret er: 6 personer

Vi vil nu vise at hvis vi udtager 6 personer, så vil der altid enten være tre som alle kender hinanden eller tre hvoraf ingen kender hinanden. Eller sagt med A- og B-udvalg: Hvis vi udtager seks tal, så vil der blandt tallene altid kunne findes tre tal som udgør et A-udvalg, eller der vil findes tre tal som udgør et B-udvalg.

Vi kunne føre et bevis for påstanden ved at opskrive alle muligheder. Lad os kalde de seks tal for a,b,c,d,e og f. Vi skal da se på alle muligheder for A-par og B-par. Til eksempel kunne a danne et A-par med d og e, b kunne danne A-par med f, c kunne danne A-par med e og f, osv. Vi skulle her opskrive alle mulige kombinationer og derefter optælle om der i hver situation findes enten et A-udvalg eller et B-udvalg.

Denne fremgangsmåde vil vi ikke vælge: Der findes nemlig i alt 32 768 mulige kombinationer. Vi skal altså gennemgå hele 32 768 tilfælde før vi kan være sikker på at påstanden om de seks personer er sand.

Vi vil i stedet give et matematisk ræsonnement. Vi kalder de seks tal for a,b,c,d,e og f. Vi vælger nu a som udgangspunkt og sammenholder a med de andre fem tal. Med hvert af de fem tal vil a enten have en fælles primtalsdivisor eller ikke have en fælles primtalsdivisor. De fem tal kan altså opdeles i to grupper: dem der har en fælles primtalsdivisor med a og dem der ikke har det. En af de to grupper må indeholde mindst tre af tallene. Vi ser nu på to situationer:

(1) Der er tre tal blandt de fem som har en fælles primtalsdivisor med a.

(2) Der er tre tal blandt de fem som ikke har en fælles primtalsdivisor med a.

Situation 1: Lad os antage at det er b, c og d der har en fælles primtalsdivisor med a. Hvis to af dem har en indbyrdes fælles primtaldivisor, fx b og c, så vil de tre tal a, b og c udgøre et A-udvalg. - Hvis der ikke er to af tallene b, c og d som har en fælles primtalsdivisor, så vil de tre tal b, c og d udgøre et B-udvalg.

Situation 2: Lad os antage at det er b, c og d som ikke har en fælles primtalsdivisor med a. Hvis der er to af de tre tal som ikke har en fælles primtalsdivisor, fx b og c, så vil de tre tal a, b og c udgøre et B-udvalg. - Hvis der ikke er to af tallene b, c og d som udgør et B-par, så vil de tre tal b, c og d udgøre et A-udvalg.

I begge situationer har vi altså at der er tre tal som enten udgør et A-udvalg eller et B-udvalg. - På denne måde slap vi for at undersøge de 32 768 tilfælde.

*

Mange matematikere har beskæftiget sig med spørgsmål vedrørende udvalg af denne slags: Hvor mange personer skal der udtages for at vi kan være sikker på at have et udvalg på n personer som enten alle kender hinanden eller hvor ingen af dem kender hinanden?   For n=3 har vi set at svaret er : 6.

Men problemet bliver meget vanskeligere når vi ser på større n-værdier. For n=4 er svaret:18. Det vil sige at hvis vi vil være sikker på at kunne opstille et udvalgmed 4 personer som enten alle kender hinanden eller hvor ingen af dem kender hinanden, så skal vi udtage 18 personer.

Man kunne fx tænke sig at der i en forsamling skulle udvælges fire personer til et kortspil. For at undgå at nogle af kortspiller-ne kendte hinanden og andre ikke kendte hinanden, så ville man have et udvalg hvor enten alle fire kendte hinanden, eller hvor ingen af dem kendte nogen af de andre. - Det ville altså kræve et selskab på 18 personer for at man kunne være sikker på at kunne opstille et sådant kortspilhold.

For n=5 er svaret ikke kendt. Man har dog i en årrække vidst at svaret ligger i området fra 43 til 49. - For højere værdier af n er svarene endnu mere usikre.

20. En berømt sætning

Du har flere gange i det foregående hørt om Fermat: *Fermat-punktet* i en trekant og *Fermats store sætning* inden for tal-teorien. Men Fermat er også kendt for den såkaldte "lille sætning". Af Fermats lille sætning har vi:

Når p er et primtal, så vil $2^p - 2$ være deleligt med p.

Et taleksempel: Lad p være 7. Da er $2^p - 2 = 126$. Og tallet 126 er deleligt med 7.

Vi giver en skitse til beviset for sætningen ved hjælp af et kombinatorisk argument. Vi vil benytte striber med p farvede felter. Vi har to farver til rådighed: rød og blå.

Vi ser på det eksempel at p=5. Vi tænker at vi har en stribe med 5 felter som hvert skal farves enten rødt eller blåt. Vi betegner de to farver med tallene 0 og 1.

Hvor mange forskellige 5-striber kan vi fremstille?

Her er tre af striberne: 10010 og 00111 og 10101.

For hvert af felterne i striben har vi to valg, vi kan enten sætte et 0 eller et 1. Da der er fem felter i en stribe, har vi $2·2·2·2·2$ muligheder for at farve felterne med de to farver, dvs. $2^5 = 32$ forskellige striber kan vi fremstille.

De to af disse 32 striber er mindre interessante. Det er nemlig dem der er ensfarvede, enten er alle felter røde eller alle felter er blå. De to striber tager vi fra, tilbage er der da

$$2^5 - 2$$

striber. Disse striber indeholder alle både røde og blå felter.

Lad os tage en af disse striber, fx den første af dem vi før skrev op: 10010. Ud fra denne stribe vil vi nu lave fire andre striber. Det gør vi ved en gradvis forskydning af felterne:

Vi starter med:	10010
Vi skubber ét felt mod højre, og sætter det bageste felt forrest:	01001
Det gentager vi :	10100
Og en gang til:	01010
Og en sidste gang:	00101

Hvis vi prøvede en gang til, ville vi komme tilbage til den første stribe.

Ved forskydning og omflytning, såkaldt cyklisk forskydning, har vi nu fået frembragt 5 striber, og vi kan se at der er tale om fem forskellige striber.

På samme måde kan vi gå frem med andre striber: Hver gang vi har en stribe, kan vi lave fire andre ved at foretage forskydning og omflytning. Og de fem striber vil alle være forskellige.

Det betyder at vi kan opdele de tofarvede striber i klynger med 5 striber i hver klynge. Og der vil ikke være nogen stribe som optræder i to klynger. Hvis vi nemlig havde en stribe der var med i to klynger, fx striben 10101, så ville begge klynger komme til at indeholde striberne:

10101	11010	01101	10110	01011

De to klynger ville altså være ens.

Det betyder at de tofarvede striber, dvs. de $2^5 - 2$ striber, må falde i klynger med 5 i hver, og hver stribe er med i netop én klynge.

Med andre ord: Tallet $2^5 - 2$ er deleligt med 5.

En gavnlig øvelse: Opskriv de 30 tofarvede striber og undersøg hvilke klynger der fremkommer ved forskydning og ombytning.

*

Hvorfor et primtal? Hvorfor kan vi nu ikke lige så godt føre dette bevis for et sammensat tal? Hvor gjorde vi brug af at 5 er et primtal?

Lad os belyse det med et andet taleksempel, nemlig med p=6.

Her har vi striber med 6 felter. En af striberne kunne være: 101010. Vi foretager nu forskydning og omflytning ud fra denne stribe:

Startstribe:	1010
Anden stribe:	10101
Tredje stribe:	1010

Vi ser at vi ikke her får seks forskellige striber frem ved forskydning og omflytning. Den tredje stribe er nemlig den samme som den vi startede med. Vi kan altså ikke på denne måde frembringe 5 nye striber så vi i alt har en klynge med 6 forskellige striber.

Dette sker fordi antallet p af felter i striben er et sammensat tal. I det tilfælde kan vi ikke være sikker på at hver stribe vil frembringe p -1 nye striber. Men hvis p er et primtal, vil hver stribe frembringe p - 1 nye striber, således at striberne falder i klynger med p i hver klynge. (At dette altid er tilfældet når p er et primtal, kræver en nærmere redegørelse).

Hvis p er et primtal, vil p altså gå op i tallet $2^p - 2$. Og det var netop indholdet af Fermats lille sætning.

Tilføjelse: I Fermats lille sætning kan tallet 2 udskiftes med et vilkårligt større tal. I den almene form siger sætningen nemlig at

Når p er et primtal, så vil tallet $a^p - a$ være deleligt med p

Beviset for denne almene udgave af sætningen kan foregå helt efter skitsen fra før, nu er der blot tale om striber hvor felterne skal farves med a forskellige farver.

Bemærk: Fermats lille sætning siger ikke at tallet $a^p - a$ *kun* er deleligt med p når p er et primtal. Der findes sammensatte tal p for hvilke der gælder at tallet $a^p - a$ er deleligt med p. For eksempel er $2^{341} - 2$ deleligt med 341 selv om 341 ikke er et primtal.

Du kan arbejde videre med primtal og sammensatte tal i INFAs EMMA-tema *Primtal* og i EMMA-temaet *Hele tal*. Her gør du brug af INFA-programmet TAL.

Register

Tallene henviser til bogens afsnit

I

K

M

O

P

R

S

T

U

V

Matematik i glimt
Denne INFA-publikation giver i små afsnit nogle glimt af hvordan beviser og faglige ræsonnementer kan tage sig ud i den elementære matematik. Afsnittene er stort set uafhængige af hinanden, og de kan tages op i den rækkefølge der passer den enkelte.

Det er et sigte med teksten at give elever i 8. og 9. klasse med særlig interesse og evne for matematik en forsmag på hvordan faglige ræsonnementer kan tage sig ud når eleverne møder matematikken efter grundskolen.

Af samme forfatter foreligger:

CHANCE – Et it-læremiljø, INFA 2002

Håndbog i sandsynlighed og statistik, INFA 2003

Lær om chancer. Sanne og Malene går på opdagelse med computeren, INFA 2005

Chance og Risiko: Kan det virkelig passe? INFA 2006