INFA-Småtryk 1996 - 1

Allan C. Malmberg

Matematisk kunnen gennem brug af edb

INFA Matematik - 1996

INFA-Småtryk 1996 - 1

Allan C. Malmberg

Matematisk kunnen gennem brug af edb

Indholdsfortegnelse

Matematisk kunnen gennem brug af edb 3

Fornyelse af skolens matematik 3

Folkeskolens afgangsprøver 4

De mundtlige prøver 5

Matematisk kunnen 6

Kunnen gennem brug af edb-værktøjet 7

Hvor er den teoretiske opbygning? 9

Problemløsning med edb-værktøjet 9

Et tilbageblik 12

Opbygningen af TRIGONOM 12

Teksthæftet TRIGONOM 13

TRIGONOM i anvendelse 14

Beregninger i tilknytning til opmålinger i naturen 15

INFAs edb-værktøjer til matematik i skolen 27

Matematisk kunnen gennem brug af edb

„Matematisk kunnen får en ny dimension, når lommeregner og datamaskine indgår som almindelige hjælpemidler. Det indebærer blandt andet, at det arbejde med beregning og tegning, som disse hjælpemidler kan anvendes til, får en anden vægt i undervisningen.“
(Centrale kundskabs- og færdighedsområder, Undervisningsministeriet 1994).

Dette udsagn kan udlægges på flere måder:

Den snævre fortolkning.
Arbejdet med de matematiske begreber skal foregå ad den traditionelle vej. Det vil sige at alle de matematiske metoder og fremgangsmåder der ligger bag de edb-værktøjer som benyttes i undervisningen, skal underbygges med teori som eleverne er i stand til at følge i lærerens fremlæggelse. Metoderne må derfor ikke have deres baggrund i matematik som ligger uden for elevernes rækkevidde.

Den brede fortolkning.
Der kan arbejdes i matematikken med edb-værktøjer som bygger på matematik der ikke har fået nogen teoretisk behandling i skolens undervisning. Det afgørende er at eleverne har indsigt i hvad værktøjernes muligheder og begrænsninger er, og at de behandlede problemsituationer i øvrigt fremtræder for eleverne i meningsfyldte sammenhænge.

Fornyelse af skolens matematik

Den snævre fortolkning vil ikke have store muligheder for at give nogen form for fornyelse til skolens matematik. Den vil give en kunstig begrænsning i udnyttelsen af de elektroniske hjælpemidler, og den vil virke ødelæggende for de gode intentioner om at sætte matematikkens anvendelser i fokus i den elementære undervisning.

Helt anderledes stiller sagen sig ved den brede fortolkning. Her vil lærer og elever kunne boltre sig med anvendelsessituationer fra et omfattende repertoire. Det afgørende er at problemstillingen kan gøres forståelig og meningsfyldt for eleverne, og at der findes lettilgængelige og letanvendelige edb-værktøjer til håndtering af sagen.

De følgende betragtninger vil bygge på den brede fortolkning af citatet fra Centrale kundskabs- og færdighedsområder. Til indtægt for dette standpunkt kan tages det tidligere fremsatte udsagn fra afsnit A i edb-supplementet fra 1990 (Edb i folkeskolens fag Regning/matematik og edb):

> *I en undervisning, hvor datamaskinen indgår som et naturligt hjælpemiddel, vil begrebet „matematisk kunnen“ få en ny facet. Kunnen betyder nu ikke nødvendigvis, at eleven mestrer alle de beregningsmæssige og tegnemæssige opgaver, der indgår i arbejdet. Det kan også betyde, at eleven har kendskab til de hjælpemidler, der er til rådighed, at eleven ved, hvilke muligheder og begrænsninger disse hjælpemidler har, og at eleven er i stand til at anvende dem med indsigt og kyndighed.*

Folkeskolens afgangsprøver

Det er velkendt blandt matematiklærere at skal man have et hurtigt indblik i et lands matematikundervisning, så skal man ikke se på love, læseplaner og bekendtgørelser. Ej heller skal man arbejde sig igennem pædagogiske artikler eller fagdidaktiske rapporter. Nej, man skal simpelthen undersøge hvordan de afsluttende prøver er udformet. Her vil man kunne se hvilke krav der i realiteten stilles, og da prøver altid har en stærk afsmittende virkning på hvad der sker i den daglige undervisning, så vil man næppe kunne hente mere præcise informationer om hverdagen i klasserne ad anden vej.

De skriftlige afgangsprøver i matematik i den danske folkeskole har hidtil udmærket sig ved at der ikke måtte bruges datamaskine i arbejdet med opgaverne. Men fra 1996 er der sket en opblødning på dette punkt, nu kan der søges om tilladelse til at eleverne må benytte de edb-programmer der har været anvendt i den daglige undervisning.

Der er imidlertid den hage ved sagen at de skriftlige opgaver vil være udformet på en sådan måde at de kan løses såvel ved brug af edb som uden brug af edb. Hvis opgaverne ikke skal stille elever der bruger edb i en gunstigere position end dem der ikke bruger edb, må formuleringerne være meget „neutrale“. De kan således ikke lægge op til situationer som illustrerer de helt nye og spændende muligheder der findes når edb inddrages som et værktøj i undervisningen.

Der vil snarere være tale om opgaver som lader eleven vælge mellem at bruge computeren som regnemaskine i stedet for at anvende en lommeregner. Det nye repertoire af spændende matematikanvendelser vil ikke kunne komme ind i undervisningen ad denne vej, sålænge der laves centrale opgavesæt som skal kunne løses lige godt, hvad enten der bruges edb eller ej. For vi er vel ikke på vej mod lokale skriftlige opgaver: Hver skole sit opgavesæt?

I de skriftlige prøver vil det således næppe kunne ses at datamaskinen er blevet et naturligt hjælpemiddel i arbejdet med matematik i den danske skole. Det bliver derfor ikke med de skriftlige opgaver man vil kunne engagere fremtidens skoleelever og vække deres interesse for beskæftigelse med helt nye emner fra matematikkens verden. Og på grund af den afsmittende effekt kan man frygte at en stor del af undervisningen på de højere klassetrin vil komme til at lide under kunstige forbud mod at krydre undervisningen med emner som kun lader sig behandle på rimelig vis med brugen af edb-programmer. Uanset hvor oplagt og naturlig en sådan anvendelse af edb i øvrigt ville være.

Det kan derfor meget vel blive en noget underlig indførelse af edb i matematikundervisningen, vi vil komme til at opleve. En halvhjertet indsats hvor man til stadighed må kalde eleverne til orden: „Vist er det spændende at bruge edb i arbejdet med matematik, men vi må også tænke på den afsluttende prøve hvor I vil få opgaver af en helt anden slags. Så nu holder vi os fra datalokalet de næste måneder.“

De mundtlige prøver

Helt anderledes stiller sagen sig ved den mundtlige del af de afsluttende prøver. Her bestemmes det faglige indhold af den enkelte lærer, og her kan gøres brug af alle de faglige hjælpemidler der er anvendt i den daglige undervisning. Og i bekendtgørelsen anføres endda som et krav at der i prøvelokalet skal være mulighed for at anvende computer.

Om den mundtlige prøve til afgangsprøven hedder det i bekendtgørelsens §29, stk 4:

> *Til den mundtlige del af prøven opgives et alsidigt sammensat stof inden for hvert af områderne:*

a) Arbejde med tal og algebra.
b) Arbejde med geometri.
c) Matematik i anvendelse.
d) Kommunikation og problemløsning.

Om den mundtlige prøve til den udvidede afgangsprøve hedder det i §39, stk. 4:

> *Til den mundtlige del af prøven opgives et alsidigt sammensat stof, der viser fagets anvendelse knyttet til forhold vedrørende natur, samfund og kultur. Prøveoplæggene skal omfatte områderne:*
>
> *a) Matematik i anvendelse.*
> *b) Faglige begreber og arbejdsmetoder.*

Medens de skriftlige prøver således kan komme til at fremstå med et indhold der er opstået ved lunkne kompromiser, så har de mundtlige prøver alle muligheder for - gennem lærerens valg - at vise matematikken i en nutidig form hvor edb indgår som et naturligt hjælpemiddel, såvel fagligt som pædagogisk.

Af de citerede afsnit fra prøvebekendtgørelsen fremgår det at der vil være gode muligheder for at inddrage edb ved de mundtlige prøver. Især hvis man bygger edb-anvendelsen på den brede fortolkning af „matematisk kunnen“ der blev givet ovenfor. I det følgende vil mulighederne blive eksemplificeret i tilknytning til et edb-værktøj til brug for arbejdet i skolens matematik med beregninger i geometriske situationer.

Matematisk kunnen
Først nogle ord om begrebet „matematisk kunnen“ i tilknytning til skolens matematik. Også det kan fortolkes på flere måder: Nogle vil sige at det især handler om de faglige færdigheder, *at kunne anvende matematiske metoder*; andre vil lægge meget mere i begrebet „matematiske kunnen“.

Vi vil betragte „matematisk kunnen“ som et begreb der omfatter følgende elementer:

- ❑ Færdigheder
- ❑ Kundskaber og viden
- ❑ Indsigt og forståelse
- ❑ Problemløsningskompetence

Disse punkter vil her blive kommenteret i relation til et bestemt fagligt emne. Vi vælger det emne som vil blive taget op i det følgende hvor vi omtaler et edb-værktøj til brug i skolens matematik. Emnet er beregninger i tilknytning til geometriske situationer, eller sagt med et enkelt ord: *Trigonometri*.

Trigonometri hører ganske vist ikke til det faglige indhold i folkeskolens matematikundervisning, i hvert fald kun i megen beskeden udgave i form af nogle afstandsberegninger ved hjælp af den pythagoræiske sætning. Således indgår trigonometriske funktioner, som *sinus*, *cosinus* og *tangens* ikke generelt i folkeskolens matematik, og egentlige trigonometriske beregninger udført på traditionel vis er derfor udelukket.

Kunnen gennem brug af edb-værktøjet

Med adgang til et edb-program er det imidlertid muligt for eleverne at arbejde med problemstillinger der vedrører trigonometriske beregninger. Problemstillingerne i trigonometrien er nemlig lettilgængelige, og eleverne vil ikke have vanskeligheder i at følge de anvendelser der gøres af edb-programmet.

Programmet vil ikke blot kunne være et stærkt fagligt værktøj, men også et værdifuldt hjælpemiddel når eleverne skal opbygge deres matematiske kunnen:

Færdigheder

Eleverne kan med edb-programmet udføre de grundlæggende beregninger der indgår i trigonometrien i tilknytning til arbejdet med figurer i planen. Eleverne vil gennem eksempler og afprøvninger få kendskab til de muligheder der ligger for at anvende programmet i geometriske beregningsopgaver. Og de vil få øvelse i at benytte programmet som et værktøj til brug i faglige situationer.

Kundskaber og viden
Eleverne kan gennem arbejdet med edb-programmet skaffe sig kundskaber og viden om geometriske forhold: Hvordan kan trekanter fastlægges? Hvor mange af trekantens stykker skal være givet for at trekanten er fastlagt? Under hvilke betingelser er der mere end én trekant som opfylder de stillede betingelser? Hvilke data skal foreligge for at der kan foretages beregninger i en geometrisk figur?

De kan endvidere gennem brug af edb-programmet eksperimentere og efterprøve faglige spørgsmål: Hvad betyder det for nøjagtigheden af en afstandsbestemmelse at vinklerne kun er målt i hele grader? Hvad betyder basislængdens størrelse for nøjagtigheden i en opmåling af ukendte afstande? Hvad sker der i det hele taget når inddata i beregningerne ændres en lille smule?

Indsigt og forståelse
Eleverne kan gennem eksempler og opgaver få et indblik i hvorledes trigonometriske beregninger er anvendt i naturvidenskaberne gennem tiderne, og hvordan de danner grundlaget for beregninger i en række almene anvendelsessituationer fra forskellige faglige områder.

De kan endvidere undersøge almene geometriske sagsforhold ved hjælp af edb-værktøjet: egenskaber ved trekanten, egenskaber ved trekantens højder, medianer og vinkelhalveringslinier, relationer mellem vinkler og mellem afstande i mere komplekse geometriske figurer.

Et empirisk resultat i arbejdet med værktøjet vil ofte kunne give anledning til en efterfølgende mere teoretisk præget efterforskning af geometriske sammenhænge.

Problemløsning
Edb-programmet vil for eleverne kunne blive et værdifuldt værktøj i problemløsningsarbejdet. De vil blive fortrolige med værktøjets muligheder og dets begrænsninger, og de vil kunne se hvor programmet kan benyttes i forelagte opgaver. Programmet kan medvirke til at opbygge og videreudvikle deres problemløsningskompetence inden for det forelagte geometriske felt og inden for anvendelseområder der gør brug af trigonometriske beregninger.

Hvor er den teoretiske opbygning?
Bemærk at der i den givne beskrivelse af den matematiske kunnen ikke stilles krav om teoretiske studier og kendskab til matematiske begrebsdannelser fra trigonometrien. Den matematiske kunnen inden for feltet opbygges i vor model uden at eleverne (og læreren med) behøver at have kendskab til de trigonometriske funktioner, og uden at de fx har arbejdet med faglige hjælpemidler som sinusrelationer og cosinusrelationer.

I en traditionel behandling af stoffet er disse hjælpemidler helt afgørende for gennemførelsen af de trigonometriske beregninger, og ved et stort tal af eksempler og opgaver opøves og vedligeholdes elevernes færdigheder i at udføre de grundlæggende beregninger. Beregninger som udføres skridt for skridt, med opslag i tabeller eller med indtastninger på lommeregner. Beregninger som derfor tager tid, som kræver elevernes opmærksomhed rettet mod de regnetekniske detaljer, og som lægger en dæmper på deres lyst til at afprøve alternative beregninger med nye inddataværdier.

Hvis den matematiske kunnen skal opbygges og udvikles på den skitserede måde, er det helt afgørende at eleverne opnår fuld fortrolighed med deres nye matematik-værktøj, og at det bliver et hjælpemiddel de har mod på og lyst til at bruge. Det må fremtræde som et lettilgængeligt edb-program der direkte lader sig anvende. Og de må indføres i dets muligheder gennem et rigt varieret repertoire af eksempler fra vidt forskellige anvendelsessitutioner. Programmet bør for eleverne blive et naturligt hjælpemiddel ved geometriske beregninger, ganske som lommeregneren er det i matematikundervisningens og hverdagens talberegninger.

Problemløsning med edb-værktøjet
Det er ikke nok at eleverne møder nogle standardsituationer hvor programmet kan anvendes. Kun gennem opgaver af åben karakter, hvor de skal arbejde kreativt med brugen af det nye værktøj, vil de få de rette betingelser for „at blive i stand til at anvende edb-værktøjet med indsigt og kyndighed“.

Der må således ikke hos eleverne blive tale om en ureflekteret anvendelse af et edb-program, hvor den hele indsats blot består i at indtaste data til programmet.

Vi kan se arbejdet med problemløsning i matematikundervisningen opdelt i tre faser:

1. Problemsituationen analyseres. Det faglige værktøj vælges.

2. Det faglige værktøj anvendes.

3. Resultater fortolkes. Konsekvenser overvejes.

Ofte har arbejdet med problemer i matematik været begrænset til en beskæftigelse med fase 2, idet problemet har været forelagt eleven i en færdig matematisk formulering: „Løs ligningen...“ eller „Beregn længden af...“. Her har de vigtige aktiviteter i fase 1 og 3 spillet en underordnet rolle i elevernes arbejde. Der var intet krav om en indledende fase med analyse og overvejelse over den mest formålstjenlige matematisering af et forelagt problem. Ej heller var der tale om en efterfølgende fase med fortolkning og vurdering af opnåede resultater.

Med et edb-program som hjælpemiddel i fase 2 vil en væsentlig del af elevernes besvær med udførelse af beregninger og tegninger være fjernet. Og anvendelsen af hjælpemidlet kræver ikke den store selvstændige indsats af eleverne. Det egentlige arbejde kan nu lægges i de to andre faser. Og det er vel også her de givende „lær matematik“- aktiviteter er at finde.

Til et sådant arbejde er programmet TRIGONOM udviklet. Med TRIGONOM som matematisk værktøj vil eleverne vide at de trigonometriske beregninger er lette at udføre, og det er ganske ligetil at afprøve alternative muligheder. Så snart de har besluttet sig for hvilke inddata der skal benyttes i TRIGONOM, er beregningerne i realiteten udført.

Det forudgående tænkearbejde med analyse af den forelagte geometriske situation og den efterfølgende tilrettelæggelse af anvendelsen af TRIGONOM, kan give anledning til gode matematiske betragtninger hvor eleven skal bygge på sine geometriske kundskaber. Her kan blive behov for faglige ræsonnementer: „Hvis jeg beregner den vinkel, så kan jeg opdele firkanten og finde de manglende stykker...“, eller „Den ukendte længde optræder som højde i den trekant, så jeg må på jagt efter inddata til beregning af trekanten“, eller „Hvis jeg her bruger ligedannede trekanter, så kan jeg komme videre med beregningerne.“

Der vil også blive tale om oversættelse fra den forelagte situation fra virkeligheden til en trigonometrisk opgave: „Hvordan kan opgaven formuleres som en beregning? Hvordan får jeg i det hele taget fastlagt nogle trekanter i den foreliggende situation?“

Efter anvendelsen af TRIGONOM skal de opnåede resultater *fortolkes* og *vurderes*: Hvad var så svaret på det givne problem, og hvad er den praktiske konsekvens af dette svar? Kan det overhovedet bruges i virkeligheden, eller er det kun af teoretisk interesse? Og hvor meget kan jeg stole på beregningerne: Hvis der er lidt usikkerhed i inddata, hvad betyder det så for mit forslag til løsning?

Der er således mange seriøse matematiske aktiviteter overladt til eleverne, selv om de gør brug af et edb-værktøj. Balancen styres gennem de problemsituationer de kommer til at arbejde med. Banale opgaver uden udfordring vil ikke give dem mulighed for at udvikle deres problemløsningskompetence og deres fortrolighed med edb-værktøjet. Men i arbejdet med de rette problemer kan eleverne gennem faglige aktiviteter opnå indsigt i det nye værktøjs muligheder, og det vil kunne indgå som et naturligt hjælpemiddel i deres arbejde med matematik i skolen.

Der er ingen tvivl om at vor måde at tænke på i problemløsningssituationer påvirkes af de værktøjer vi har til rådighed. Ved udviklingen af edb-værktøjer til brug i folkeskolen må vi derfor være opmærksom på den virkning dette værktøj kan have på elevernes arbejdsform og tænkemåde, ja på hele deres forhold til matematikken. Vi må stille os spørgsmål som: *Indfører vi med det udviklede værktøj et hjælpemiddel som støtter eleverne i deres arbejde med at opnå indsigt i matematiske sammenhænge? Fremmer vi elevernes eksperimenterende og udforskende aktiviteter? Giver det nye værktøj dem mulighed for at nå frem til svar på egne faglige spørgsmål? Styrker det deres lyst til at gå på opdagelse i matematikkens verden?*

Hvis vi ikke kan svare bekræftende på sådanne spørgsmål, bør vi overveje værktøjets udformning endnu engang.

Et tilbageblik
Trigonometri har haft sin store tid i matematikundervisningen i gymnasiet, hvor det traditionelt var et væsentlig emne i det første års matematikpensum. Mange tidligere gymnasieelever vil huske trigonometriens trekantstilfælde med de tilhørende beregningsskemaer. Forud for 70’erne foregik beregningerne jo uden lommeregnere, men med anvendelse af håndregning og tabeller. Her benyttedes ikke blot tabeller over de trigonometriske funktioner, men også over deres logaritmiske værdier. Ofte skulle der jo udføres multiplikationer hvori der forekom værdier af sinus, cosinus eller tangens til en vinkel. Det var derfor bekvemt at have tabeller over log sinus, log cosinus og log tangens.

Gymnasieelever fra 60’erne vil huske at arbejdet med trigonometri optog mange af deres timer. Hundredevis af opgaver blev løst ved håndregning og tabelbrug.

I et tilbageblik kan man måske sætte spørgsmålstegn ved hvor meget matematik der blev lært i disse mange timer. Der blev opøvet færdighed og sikkerhed i anvendelsen af beregningsskemaer, men det egentlig matematiske udbytte kunne næppe stå mål med det store timeforbrug.

Hvis man lod en gymnasieelev i 90’erne udforme et edb-program der dækker den beregningsmæssige del af indholdet i TRIGONOM, så ville han sandsynligvis herved få større faglig indsigt i trigonometrien end den hans forgænger for 30 år siden nåede gennem alle de mange timer anvendt på udførelse af trigonometriske beregninger. Og et sådant program burde han kunne udarbejde i løbet af en halv snes timer.

Opbygningen af TRIGONOM
Edb-programmet TRIGONOM er beregnet til at anvendes på klassetrinnene 7-10. Der stilles ingen krav til brugeren om kendskab til trigonometriske beregninger, men der forudsættes et beskedent kendskab til trekantsgeometri, herunder til begreberne *højder*, *medianer* og *vinkelhalveringslinier*, samt kendskab til *vinkelsummen i en trekant*, og til begrebet *ligedannethed*.

Programmets opbygning er hurtigt beskrevet: En trekant er karakteriseret ved 6 „stykker“: tre vinkler og tre sider. I programmet indtastes data for tre ukendte stykker (heraf mindst én trekantside), og programmet beregner derefter de ukendte stykker. På skærmen frembringes en tegning af den forelagte trekant.

Brugeren kan endvidere få udført en række supplerende beregninger i tilknytning til trekantens højder, medianer og vinkelhalveringslinier. Også beregning af trekantens areal og dens omkreds, samt beregning af radius i trekantens indskrevne cirkel og i den omskrevne cirkel kan udføres.

Inddataværdier kan let ændres: Ved et klik på talfeltet åbnes for en ny indtastning. Det vil derfor være ganske ligetil i programmet at afprøve alternative inddataværdier og at undersøge deres betydning for den frembragte trekant.

Programmets trekanter er standardnavngivet til at hedde ABC, men brugeren kan ændre navngivningen efter behag.

Af pædagogiske grunde giver programmet valgmulighed mellem situationerne „Vilkårlige trekanter“ og „Retvinklede trekanter“. I mange anvendelser af trigonometrien holder man sig i de indledende eksempler og opgaver traditionelt til trekanter der er retvinklede. Man kan ved anvendelsen af menupunktet „Retvinklet trekant“ også i TRIGONOM udnytte de forenklinger i beregning og tegning der foreligger når talen er om trekanter hvori der indgår en vinkel på 90°.

TRIGONOM er lettilgængeligt. Eleverne skulle kunne blive fortrolige med dets anvendelse gennem en indsats af en times varighed.

Teksthæftet TRIGONOM

En indføring i programmets anvendelse
Eleverne får først en indføring i de matematiske problemstillinger der kan behandles ved hjælp af TRIGONOM.

Her gennemgås de fire typer af beregningssituationer der kan forekomme i trekant ABC:

1) Siderne a, b og c er kendt
2) Vinkel A og siderne b og c er kendt
3) Vinklerne A og B og siden c er kendt
4) Vinkel A og siderne a og b er kendt

I tilknytning til type 4 vises at der kan forekomme situationer hvor de forelagte inddata-værdier giver mulighed for at der kan fastlægges to trekanter. Beregningerne har altså her „to løsninger“. I de øvrige typer af beregningssituationer kan der ikke være tale om mere end én løsning.

Eleverne afprøver TRIGONOM med beregninger fra de fire typer, og de får lejlighed til at udføre supplerende beregninger af højder, medianer etc.

Herefter gennemføres en „*Tegn og beregn*“-fase. Eleverne tegner trekanter ud fra tre opgivne stykker, og ved hjælp af lineal og vinkelmåler sætter de tal på trekantens ukendte stykker. Derefter lader de TRIGONOM foretage beregningen, og de sammenligner beregningerne med deres egne måleresultater.

Eleverne tegner endvidere trekanter „på må og få“, og måler i hver trekant tre af dens stykker. De lader nu TRIGONOM beregne de resterende stykker, og de sammenligner derefter beregningerne med de målinger der kan foretages på figurerne.

Denne „Tegn og beregn“-fase skal gøre eleverne fortrolige med værktøjet. De skal få tillid til at edb-programmets beregninger er i overensstemmelse med de målinger der kan foretages på „de virkelige figurer“. De skal også blive fortrolige med at den matematiske model i edb-programmet og virkelighedens måleresultater fra de tegnede figurer stemmer overens til en vis grad, men næppe på alle de beregnede cifre.

TRIGONOM i anvendelse

Herefter går eleverne over til at arbejde med et bredt repertoire af eksempler på brugen af TRIGONOM. Gennem arbejdet med opgavesituationer får de indsigt i programmets muligheder og begrænsninger.

Hovedparten af opgaverne i elevteksten kan opdeles i følgende typer:

1. Beregninger i tilknytning til opmålinger i naturen

2. Situationer forelagt ved geometriske og tekniske tegninger

3. Klassiske beregninger fra den matematiske geografi

4. Beregninger med sigte på at give eleverne kendskab til geometriske emner og sagsforhold

Opgaverne i elevteksten er for de flestes vedkommende ledsaget af en tegning som beskriver den forelagte geometriske situation. Derved er der givet en hjælp til eleverne: De har med figuren fået et oplæg til en geometrisk model hvori beregningerne kan udføres.

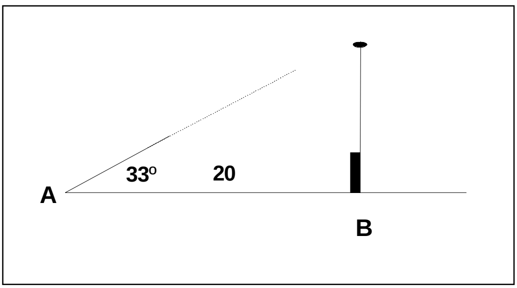
Det vil være en naturlig videreførelse af arbejdet med TRIGONOM at eleverne også møder opgavesituationer hvor problemet er formuleret i en tekst uden tilhørende tegning. De indledende overvejelser vil da føre til at der udarbejdes en skitse som kan danne grundlag for den efterfølgende anvendelse af edb-værktøjet.

Her skal nu gives kommentarer til udvalgte eksempler fra de fire typer af opgaver. I tilknytning hertil følger en række bemærkninger om de faglige aktiviteter der kan indgå i elevernes arbejde med de givne opgaver.

Beregninger i tilknytning til opmålinger i naturen

Opgave 1

Hvor høj er flagstangen?



Du skal måle højden af en flagstang. Du placerer et punkt A i en afstand af 20 meter fra flagstangen, og fra A sigter du mod flagstangens top. Du måler sigtevinklen ved A til at være 33°.

(1) Brug TRIGONOM til at beregne flagstangens højde.

(2) Hvor høj er flagstangen hvis sigtevinklen ved A måles til at være 42°?

(3) I kan ikke blive enige om hvor stor sigtevinklen ved A er. Nogle af jer måler den til ca. 31°, andre til ca. 35°. Hvor stor en forskel betyder det for flagstangens højde om vinklen er 31° eller 35°?

En klassisk eksempel på anvendelsen af trigonometri „i fri luft". Eleverne kan her gøre brug af menupunktet „Retvinklet trekant" i TRIGONOM.

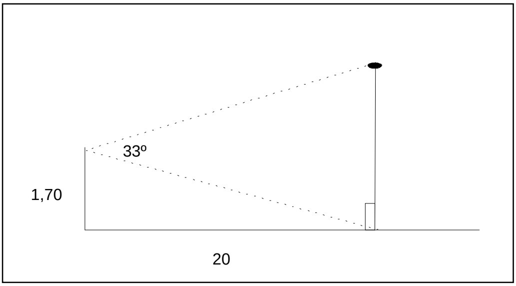
De beregnede flagstang-højder kan let kontrolleres ved hjælp af en tegning udført i en passende skala. Med erfaringerne fra den indledende „Tegn og beregn"-fase vil eleverne vide hvilken grad af overensstemmelse der kan forventes mellem tegning og beregninger.

Allerede i denne første opgave rettes elevernes opmærksomhed mod den usikkerhed der ofte vil foreligge i de anvendte inddata: De opfordres i spørgsmål (3) til at undersøge hvad en usikkerhed i den målte vinkel betyder for den beregnede højde.

De indledende opgaver med iscenesættelse fra den nære fysiske verden har endvidere det sigte at give lærer og elever ideer til at gå udendørs og foretage opmålinger der. De indsamlede data kan så benyttes som inddata i TRIGONOM.

Det vil være naturligt at stille opgaver hvor flere elevgrupper skal foretage den samme måling, men med forskellige udgangspunkter. En efterfølgende sammenligning af beregningsresultaterne kan være meget givende.

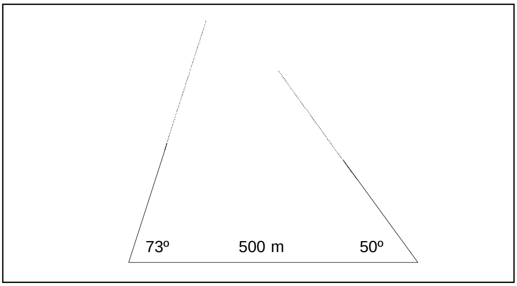
Opgave 2
En anden opmåling



Beregn flagstangens højde ud fra tallene på figuren.

Opgave 2 i teksthæftet tager den samme fysiske situation op, men nu med en iagttager der måler synsvinklen fra øjeposition. Beregningen kræver dermed anvendelse af to trekanter før den ukendte størrelse er beregnet.

Opgave 6
Hvor langt er der ud til båden?



Fra to punkter A og B på strandbredden sigtes der ud til en båd. AB har en længde på 500 meter, og de to sigtevinkler måles til 73° og 50°.

(1) Beregn afstanden fra A til båden, og beregn afstanden fra B til båden.

(2) Hvor stor er den korteste afstand fra strandbredden til båden?

(3) Hvad betyder det for afstanden fra strandbredden til båden hvis længden af AB har en måleusikkerhed på ± 25 meter?

Et typisk eksempel på en afstandsbestemmelse som udføres med enkle hjælpemidler fra trigonometrien.

I beregningerne findes først de ukendte afstande fra båden til A og B. Disse afstande beregnes jo direkte som sidelængder i den forelagte trekant. Derefter må eleverne finde ud hvordan de beregner den afstand der er søgt i spørgsmål (2). Med et elementært geometrisk kendskab vil de vide at denne afstand er længden af en af trekantens højder. Her vil de da kunne gøre brug af programmets supplerende beregninger.

I denne opgave vil det være naturligt at vurdere betydningen af usikkerheden i den benyttede basislængde. Dette spørgsmål tages op i (3).

Opgave 14

En spejderkonkurrence

Spejderne skal finde afstanden mellem de to punkter P og Q som ligger på hver sin side af et vandløb.

Gruppen fastlægger punkterne A, B og C, og måler følgende afstande:

AB = 36 m BC = 32 m AC = 40 m

Endvidere er vinkel PAC målt til 42°, og vinkel PBQ til 35°.

Beregn afstanden mellem P og Q.

En lidt mere kompleks beregningsopgave. Her må eleverne tænke opgaven grundigt igennem og lægge en strategi for den rækkefølge hvori beregningerne skal udføres. Når den første trekant er beregnet, vil de have tilstrækkelige data til at gå videre med den næste. Beregningerne kan afsluttes når de kender tre stykker i en trekant hvori den søgte afstand PQ indgår.

I arbejdet med denne opgave, hvor der foretages beregninger i en række trekanter med forskellige navne, kan det være en fordel for eleverne at gøre brug af mulighederne for at omdøbe trekanterne fra ABC til mere passende navne.

Opgaven kan suppleres med overvejelser over hvilke af de givne måleresultater der er særlig kritisk over for det givne beregningsresultat: Hvor vil en lille ændring i inddata give anledning til stor forskel i længden af PQ?

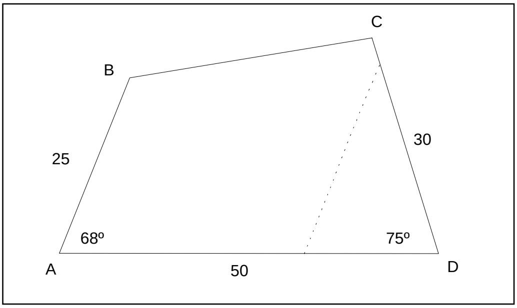
Også begrebet „*underbestemmelse*“ og „*overbestemmelse*“ kan her tages op. Fjern oplysningen om et af de givne inddata: Kan beregningen da gennemføres, eller er opgaven „underbestemt“, dvs. man må konkludere at beregningen ikke kan gennemføres pga. manglende data? - Også overbestemmelse kan komme for: Der opgives flere data end der egentlig er nødvendigt for en gennemføring af beregningen. En sådan overbestemmelse kan være på sin plads hvis beregningen er så kompleks at eleverne vanskeligt kan lægge den rette strategi. En ekstra oplysning kan her ændre opgaven fra det svære til det lettere.

Et ekstra raffinnement er at lade opgaven være „*kontrabestemt*“, dvs. givet med oplysninger der strider mod hinanden. Det bliver nu elevernes opgave at påvise at de givne oplysninger ikke kan realiseres i en virkelig verden, og konklusionen er da at beregningerne ikke kan gennemføres. - Argumentationen for en sådan påstand kan give anledning til megen god geometrisnak.

Situationer forelagt ved geometriske og tekniske tegninger

Opgave 19

Jordstykke: Vinkler og areal



Beregn jordstykkets vinkler og dets areal. Benyt eventuelt den tegnede hjælpelinie som er parallel med AB.

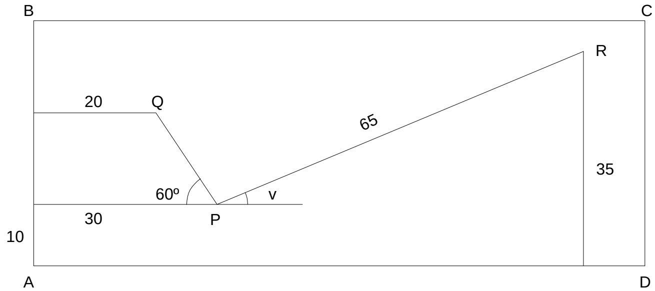
Blandt opgaverne vil der være en række eksempler på beregninger der foretages i tilknytning til tegninger over jordstykker med form af firkanter, femkanter, osv.

Eleverne skal her bruge TRIGONOM som et værktøj til at finde de ukendte afstande og vinkler. I figuren i opgave 19 er der indtegnet en hjælpelinie som kan gøre brugen af TRIGONOM enklere. Men en sådan hjælpelinie kan kun udnyttes hvis eleverne har kendskab til trekanters ligedannethed, og hvis de på figuren ser et sæt af ensliggende vinkler.

I den efterfølgende opgave 20 må eleverne selv indlægge en eventuel hjælpelinie på den givne figur og udnytte deres erfaringer fra arbejdet med opgave 19.

Opgaverne lægger i øvrigt op til at eleverne skal blive fortrolige med de beregningssituationer der kan forekomme i tilknytning til firkanter: Hvor mange „frie stykker“ er der i en firkant, og hvor mange af dem skal være kendte før alle de ukendte stykker kan beregnes?

Opgave 40
Placeringer i et rektangel



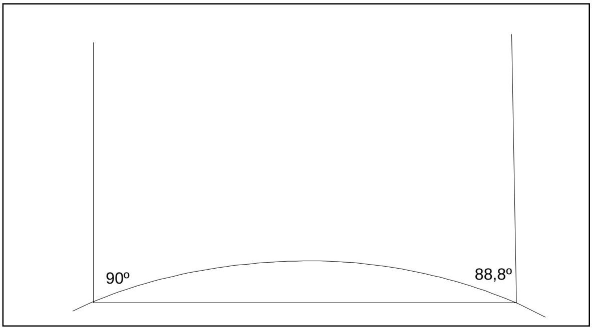
Beregn den ukendte vinkel v, samt Q's afstand fra AD og R's afstand fra AB.

I det givne rektangel skal beregnes en vinkel og to afstande. Eleverne må her analysere figuren for at finde ud af hvor de kan sætte ind med beregninger: Hvor er der givet så mange data at TRIGONOM kan komme i anvendelse?

I analysefasen må der foretages geometriske ræsonnementer i tilknytning til den givne figur. Eleverne må vise at de er i stand til at hente oplysninger fra figuren, og at de kan bygge videre på de givne data.

Klassiske beregninger fra den matematiske geografi

Opgave 9
Hvor langt er der til Månen og hvor stor er den?
Fra to sigtepunkter på Jorden, der ligger i en afstand af 8000 km fra hinanden (målt gennem Jordkugken), sigter man samtidig mod et punkt på Månens overflade. De to sigtevinkler er 90° og 88,8°.



(1) Beregn afstanden til Månen.
(2) Der er en måleusikkerhed i de 88,8° på ±0,1°.
Hvad betyder det for den beregnede afstand?
(3) Beregn dernæst Månens diameter når en iagttager på Jorden ser Månen under en synsvinkel på 0,53°.

En opgave hvis problemstilling går mere end 2000 år tilbage i tiden. Flere hundrede år før vor tidsregning udførtes de første beregninger af afstanden til Månen.

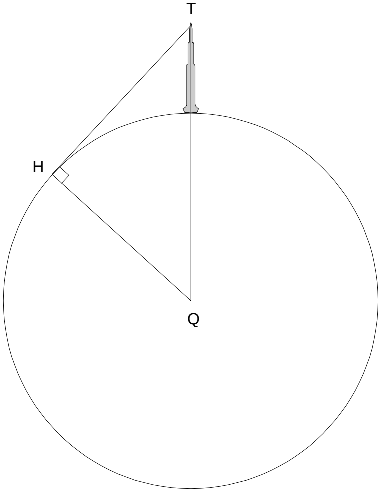
Opgaven kan benyttes som en anledning til at tage et historisk blik på anvendelsen af trigonometriske beregninger og deres anvendelse ved udforskning af vor fysiske verden: Først de nære omgivelser med landmåling og navigation, derefter de fjernere med måling af afstande og størrelser i astronomisk sammenhæng.

Et naturligt spørgsmål at tage op i tilknytning til opgave 9: Hvilke praktiske vanskeligheder er ved fremskaffelse af inddata til beregningen, og hvilke fejlkilder er der? - Og et andet spørgsmål: Hvordan målte man i oldtiden afstanden til Solen?

Opgave 24

Hvor langt kan du se?

Du befinder dig i et tårn 30 meter over havets overflade. Hvor langt kan du se, eller "hvor langt er der til horisonten"?



Figuren viser en skitse hvor tårnet (i overdreven størrelse) er placeret på Jordkuglen. Afstanden til horisonten er givet ved liniestykket TH. Jordkuglens radius kan sættes til 6375 km.
Beregn afstanden TH når tårnets højde h er:

(1) h = 30 m
(2) h = 60 m
(3) h = 120 m
(4) h = 2 m

Denne opgave giver en fin anledning til at diskutere fordele og mangler ved matematiske modeller. I den givne problemstilling vil det være oplagt at gå ind på de forenklinger der ligger til grund for den geometriske model, og at drøfte anvendeligheden af de resultater der fremkommer ved brugen af TRIGONOM.

Måske burde denne opgave have været fremlagt uden ledsagende forslag til løsning. Eleverne måtte så gennem egne overvejelser og drøftelser med læreren nå frem til en passende model til brug for udførelsen af beregningerne.

Beregninger med sigte på at give eleverne kendskab til geometriske emner og sagsforhold

Opgave 31

Gæt og kontroller

En trekant er fastlagt ved: A = 68°, b = 4, c = 6. Lad TRIGONOM beregne de ukendte stykker i trekanten. Udprint beregningsresultaterne.

I en ny trekant er A = 68°, b = 8, c = 12, altså samme vinkel A som før, men dobbelt så lange sider b og c.

Fortæl uden at bruge TRIGONOM hvad målene for de ukendte stykker i denne trekant er. Og hvor lang er højden fra A og medianen fra B? Og hvad er trekantens areal? Og hvor stor er radius i dens omskrevne cirkel?

Udfør derefter beregningerne med TRIGONOM og kontroller dine gæt på de ukendte stykker.

Eleverne skal her afprøve deres intuition med hensyn til ændringen i målereultater når en trekant „ganges op“. De skal blive fortrolige med hvad der sker med vinkler og sider, og hvad der sker med de øvrige målinger som fx højder og medianer, hvad der sker med radius i de indskrevne og omskrevne cirkler, og hvad der sker med trekantens areal.

I opgaven multipliceres der med 2, men der kan selvfølgelig let foretages beregninger svarende til andre faktorer, både hele tal og brøktal, og både med tal større end 1 og tal mindre end 1.

Opgave 32

Samspil mellem medianer og sider

Undersøg ved nogle eksempler om det er rigtigt at i en trekant vil den længste median altid være den der har sit fodpunkt på den korteste side.

Foretag beregningerne for nogle trekanter hvor du selv vælger de tre sidelængder. Prøv både med spidsvinklede trekanter (hvor alle vinkler er mindre end 90°) og stumpvinklede trekanter (hvor en af vinklerne er over 90°).

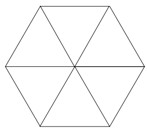
I denne opgave kan eleverne benytte TRIGONOM til indsamling af erfaringer vedrørende samspillet mellem medianernes længde og sidernes længde i vilkårlige trekanter.

Det er ikke tanken at de indsamlede data skal føre til at eleverne skal gøre et forsøg på at opstille et geometrisk bevis for den fundne sammenhæng. Men de indhentede erfaringer kan føre til spørgsmålet om tilsvarende relationer gælder for vinkelhalveringslinier og højder. Og ved højderne vil eleverne se at der kan gives et elementært og letforståeligt argument for almengyldigheden af de observerede sammenhænge.

Opgave 42

En cirkels omkreds og areal

I matematikkens historie har man beregnet omkreds og areal af cirkler ved at foretage en tilnærmet beregning ved hjælp af trekanter.



Figuren viser en regulær 6-kant sammensat af seks trekanter der har topvinklen 60° og med to sider som har længden 1.

Beregn figurens omkreds og dens areal. Disse to tal kan bruges som en første tilnærmelse til omkreds og areal af en cirkel med radius 1.

Foretag dernæst beregningen med en regulær 12-kant. Og prøv med en regulær 24-kant. Sammenlign de fundne værdier med dem du får når du bruger de matematiske formler for omkredsen og arealet af en cirkel med radius 1.

Hvis du ønsker at prøve med fx en regulær 180-kant, har du brug for trekantens sidelængde og areal med en bedre nøjagtighed end den der umiddelbart gives i "Resultater". Ved et tryk på F6 får du resultaterne angivet i den såkaldte eksponent-notation. Her er sidelængde og areal angivet med flere cifre. Det er disse tal du skal bruge når du skal beregne omkreds og areal af 180-kanten.

Undersøg hvor godt 180-kantens omkreds og areal stemmer med cirklens.

Prøv eventuelt også med en 360-kant.

Et eksempel som kan illustrere hvorledes polygoner er blevet benyttet til beregning af tilnærmelsesværdier for cirkelbuers længder og cirklers areal.

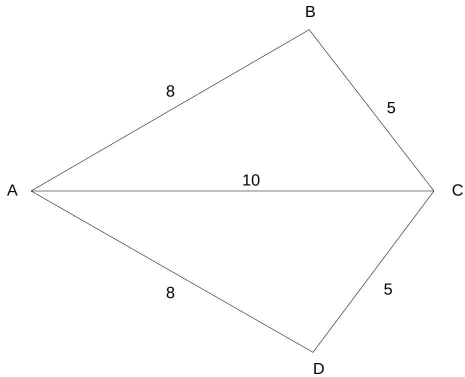
Med TRIGONOM er det let at udføre beregninger i de centraltrekanter der indgår i de regulære mangekanter. Således kan længden af grundlinien i en ligebenet trekant med en topvinkel på 2° direkte beregnes ved indtastning i TRIGONOM. Det samme gælder for trekantens areal.

Gennem beregningerne kan opstilles tilnærmelsesværdier for den matematiske konstant π. Eleverne kan dermed foretage en empirisk efterprøvning af de velkendte formler for cirklens omkreds og areal.

Opgave 45

Arealet af dragefirkanter

Figuren viser en dragefirkant: De to sider der udgår fra A er lige store, og det samme gælder for de to sider der udgår fra C.



Beregn arealet af firkanten og beregn længden af den ukendte diagonal BD. Opstil derefter en formel til beregning af arealet af dragefirkanter. Afprøv den på nogle dragefirkanter hvor du selv vælger længden af de givne afstande.

Undersøg om den opstillede formel gælder for parallelogrammer, rhomber (firkanter med fire lige store sider), rektangler, kvadrater.

Opgaven lægger op til at eleverne først beregner det søgte areal og derefter går på jagt efter en formel til beregning af arealer for figurer af den givne art.

Hvis jagten fører til et forslag, vi eleverne måske efter vellykkede afprøvninger føle behov for at få bekræftet den opstillede formel med et teoretisk argument. Herefter vil de let kunne afgøre hvilke andre typer af firkanter formlen er anvendelig på.

INFAs edb-værktøjer til matematik i skolen
I Serien af INFA-Småtryk er tidligere givet en omtale af to edb-værktøjer til brug for arbejdet med matematik i skolen:

> **INFA Småtryk 1995-2:**
>
> **To edb-modeller - to stærke værktøjer til den elementære undervisning**

Her gives en beskrivelse af ideerne bag edb-programmerne LOD og KUGLE. Disse to programmer er beregnet til at være værktøjer for eleverne i deres arbejde med sandsynligheder.

Hvad der ovenfor er sagt om opbygningen af matematisk kunnen i tilknytning til arbejdet med TRIGONOM, vil også være gældende for arbejdet med LOD og KUGLE. For disse to programmers vedkommende er der i INFA-regi udført forsøg med anvendelsen på klassetrin 7-10, og resultater fra dette arbejde er fremlagt i INFAs rapporter. Der vil i et senere Småtryk blive berettet om erfaringer fra arbejdet med TRIGONOM i skolen.