

Skriveværktøj til skolens matematikundervisning

Inge B. Larsen

Danmarks Pædagogiske Universitet

ibl@dpu.dk

I det følgende har jeg forsøgt at tage hul på nogle af de spørgsmål, der dukker op i forbindelse med tilrettelæggelsen af et universelt skriveværktøj til skolens matematikundervisning. Der ligger en stor udfordring i tilrettelæggelsen af et sådant program, som skal tilgodese ikke alene skolefagets behov, men også elevernes og lærernes, så det er vigtigt, at mange byder ind på, hvad det er for behov, der bør tages hensyn til. Håbet er, at det følgende kan give inspiration til sådanne tilkendegivelser.

Målgruppen

Projektets målgruppe er 10. klasse, men skriveværktøjet bør jo nok ses i en større sammenhæng. Et skriveværktøj af den art, man tænker på, vil, uanset hvor enkel brugerfladen bliver, kræve tid at lære og specielt at blive så fortrolig med, at det falder naturligt i både hånd og hoved. På sigt må det være ideelt om eleverne fra mellemtrinnet eller begyndertrinnet bliver fortrolige med skriveværktøjet og især med nogle af de utallige situationer, hvor et sådant værktøj kan være nyttigt. At lære at håndtere værktøjet kan i sig selv ikke være mål for matematikundervisningen – det kan kun være et vigtigt middel til at kunne løse matematiske problemer, som man ellers ikke eller kun med besvær kunne løse.

Hvad skal værktøjet kunne af matematik?

Mens sprogfagene kan siges at have et enkelt hovedværktøj, nemlig tekstbehandlingsprogrammet, så er det ikke helt så enkelt i skolens matematik, der jo i 'Klare Mål' er delt op på 4 discipliner (Tal og algebra, Geometri, Anvendelser, Kommunikation og problemløsning), hvoraf de 3 første i øjeblikket stort set kræver hver sin type af fagligt e-værktøj. Er dette mon en medvirkende årsag til, at anvendelsen af it er sakket så langt bagud i matematik i forhold til sprogfagene?

Andre medvirkende årsager kunne være, at det program, man satser mest på i skolens matematikundervisning (regnearket), har en brugerflade og et indhold, der ikke er designet med skolens behov for øje. De argumenter, man hører for at anvende regneark i skolen er bl.a., at det følger nærmest gratis med computeren, og det er det, man bruger uden for skolen og det, man får brug for efter skolen, og det er da godt at have en masse muligheder indbygget i programmet, også selv om disse er uforståelige for eleverne.

De første argumenter kan naturligvis diskuteres, men det er det sidste argument, jeg især finder interessant i denne her sammenhæng. Det kan være svært at afgøre, hvor meget computerassistance man egentlig har behov for i skolen, og så kunne en let beslutning være: "Hellere for meget end for lidt." Men en sådan strategi koster både i tid og lærer-/elevfrustrationer, for jo større og kraftigere et e-værktøj er, des højere er adgangstærsklen til det. Et historisk eksempel på dette: I 1970'erne var

matematikundervisningens e-værktøj et programmeringssprog, som jo er et særdeles kraftigt værktøj, der anvendes til at frembringe de mere specialiserede programmer til fx tekstbehandling og regneark. Selv om der blev udarbejdet særlige programmeringssprog for børn, fandt man hen ad vejen ud af, at den nødvendige indsats til indlæring og vedligeholdelse af programmeringsfærdigheder ikke kunne findes inden for skolens rammer.

Jeg mener, at faciliteter, der ikke er skoler relevante, bør udelades fra et skriveværktøj til skolens matematikundervisning. Problemet er så at opnå enighed om, hvad der er skoler relevant. Et forsøg på tilnærmelse til problemet gives i det følgende.

Sprogfagernes e-værktøj har udviklet sig fra en simpel tekst-editor videre til et tekstbehandlingssystem, som hen ad vejen er blevet forsynet med udbygninger som fx stavekontrol. Anderledes har det som nævnt været for matematik, hvor der til hver matematikdisciplin udvikledes specialværktøjer. Det vil være lidt af en udfordring at samle ideerne fra specialværktøjerne i ét værktøj, der viser og udnytter de sammenhænge, der er mellem matematikdisciplinerne. Kan det mon lade sig gøre eller vil man blot få en fælles indgang til en række separate værktøjer?

Med baggrund i 'Klare Mål' er det følgende mit bud på, hvad ét universelt skriveværktøj til skolens matematik bør omfatte af muligheder:

1. Udregning af værdien af et taludtryk
(skal kunne anvendes som en avanceret lommeregneren (med alle de gængse matematiske funktioner til rådighed (kvadratrods, cosinus, heltal, ...), hvor alle indtastninger er synlige)
2. Udregning af værdien af et udtryk, hvori der indgår variable, der andetsteds er tillagt værdier
(m.a.o. mulighed for at opbygge simple algebraiske modeller med anvendelse af informative variabelnavne)
3. Kontrollfunktion, der kan fortælle om elevens omformning af et algebraisk udtryk eller en ligning er korrekt
(skolens elever forventes efter 9. klasse at kunne klare simple opgaver af denne art, men FSA i matematik viser at det kun lykkes for 20 % - 30 % (jf. [1])).
4. Funktionstabeller / Funktionstegning
(mulighed for fra en algebraisk model at opsamle funktionsværdier i tabel og samtidig se dem afbildet i et koordinatsystem)
5. Simulering
(mulighed for på enkel vis at opbygge simple simuleringsmodeller, opsamle data fra dem og afbilde disse grafisk)
6. Statistik
(mærketal, tabeller og diagrammer, der anvendes i skolen)
7. Dynamisk geometri med yderligere mulighed for simpel mønstertegning
(klassisk geometri, analytisk geometri, navigationsgeometri)

De 7 muligheder dækker over emner, der i mere eller mindre grad er sammenhængende, og det bør da tilstræbes, at værktøjet giver mulighed for at visualisere disse sammenhænge, sådan som det fx antydes ved 2., 3., 4. og 5.

Sorte bokse

En sort boks er et program eller en del af et program, der på passende inddata udfører en matematisk operation og leverer resultatet af denne uden at gøre rede for, hvordan resultatet er opnået. Et eksempel er kvadratrodsfunktionen på en lommeregner.

Det er min klare opfattelse, at en af hovedopgaverne for fremtidens matematikundervisning på alle niveauer vil blive at indkredse, hvilke sorte bokse, der er passende at anvende på et givet niveau. Kort sagt er problemet, at det er herligt, hvis en sort boks kan overtage en tidskrævende og besværlig matematisk operation. Men uden en forståelse hos eleven af i hvilke situationer og med hvad, man kan fodre en sådan sort boks samt en viden om, hvordan dens resultater skal fortolkes, så er man tilbage i gold udenadslæren – ikke af definitioner, teoremer og beviser, men af håndtering af brugerfladen i et (for eleven uforståeligt) program.

Kvadratrodsfunktionen på lommeregneren og i regneprogrammer er en sort boks, hvis forløbere har været en ret uigennemskuelig papir-og-blyant algoritme, kvadratrodstabeller og regnestok. Denne sorte boks har den kønne egenskab, at dens resultat meget nemt lader sig efterprøve, blot man har kendskab til multiplikation, og der er næppe nogen matematiklærer, der i dag ville gøre indvendinger mod dens anvendelse i skolen.

Andre sorte bokse kan det være sværere at opnå enighed om, og i sidste ende er det ofte et spørgsmål om hvilke kompetencer, man ønsker eleverne skal opnå.

Et eksempel på dette kunne være funktionstegning. Der findes programmer, hvor eleven blot skal taste en given funktionsforskrift ind og så klikke på knappen med billedet af en graf, og straks tegnes en funktionens graf i et koordinatsystem. For den elev, der ikke aner hvordan en sådan graf kan fremstilles ud fra funktionsforskriften, er dette ren og uforståelig magi. Anvendes derimod et regneprogram må eleven selv bruge funktionsforskriften til først at fremstille en tabel over funktionen og så få tabellens værdier afbildet i et koordinatsystem. Elevens forkundskaber kan således være afgørende for om den ene eller den anden tilgang til funktionstegning er passende.

Man kan jo så medtage begge muligheder i programmet, men det kan naturligvis også skabe problemer.

Et andet eksempel: Både Scientific Notebook og Mathematica tilhører programtypen CAS (Computer Algebra System), der bl.a. udmærker sig ved at kunne foretage symbolmanipulationer. De symbolmanipulationer, der dyrkes i skolens matematik, er reduktion af simple algebraiske udtryk og simpel ligningsløsning.

Man kan i CAS programmer bl.a. indtaste udtryk som

$(2a-b) \cdot 2-2b$ eller

$a^2 - 2 \cdot (3b + a)$ (for nu at tage 2 eksempler fra Færdighedsregningen i FSA i matematik 2002)

og med et klik få dem reduceret. Men hvis hverken de indtastede algebraiske udtryk eller det reducerede udtryk siger eleven noget (kun 20 % - 30 % af eleverne klarede disse opgaver, se [1]), så

er det en meningsløs aktivitet. Her mener jeg, at der mere er brug for en støttefunktion for eleven i arbejdet frem mod en løsning (se punkt 3. ovenfor). Eleven giver et bud på næste skridt i reduktionen eller ligningsløsningen og programmet kontrollerer, om det er korrekt.

Man kunne sige, at fx støvsuger og hårtørrer er sorte bokse i den forstand, at man udmærket kan anvende dem uden at have kendskab til, hvordan de er konstrueret, og hvorfor de virker. Når vi alligevel kan have glæde af dem (til hver sit formål), skyldes det, at vi med vore fysiske sanser (synet og følesansen) kan erkende deres virke. Anderledes forholder det sig med matematikkens sorte bokse, der kun kan erkendes gennem tankestrukturer. En elev må for at have fornøjelse af en matematisk sort boks være i besiddelse af tankestrukturer, der giver grundlag for en fortolkning og en form for forståelse af virkemåden af den sorte boks.

Kompetencer

Valget af sorte bokse kunne ligeledes være styrende for hvilke kompetencer, man ønsker eleverne skal have.

Eksempel 1:

En sort boks giver trekantsberegninger. Man indtaster størrelsen på de sider og vinkler, som man kender i trekanten, og er oplysningerne tilstrækkelige, får man alle andre oplysninger om trekanten: størrelsen på de resterende sider og vinkler, højderne, radius i ind- og omskrevne cirkel osv. For en elev, der med blyant, lineal og vinkelmåler kan konstruere trekanten, og dermed måle sig frem til de resterende størrelser, giver det vel mening, at programmet kan levere disse tal. Man er således i stand til at løse en række geometriske problemer, som uden den sorte boks ville kræve kendskab til trigonometri.

Eksempel 2:

For nogle år siden stillede man til den skriftlige lærereksamen i matematik følgende opgave:

I et koordinatsystem er givet linierne k , l , m og n med ligningerne:

$$k : y = 2x + 1, \quad l : y = 2x + 4, \quad m : y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad n : y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2},$$

- (1) Tegn linierne i et koordinatsystem og bevis, at de fire linier afgrænser et kvadrat, dvs. at liniernes skæringspunkter danner et kvadrat.

Det var tilladt at bruge diverse computerprogrammer, bl.a. GeomeTricks, der er et dynamisk geometriprogram.

En studerende, der ikke brugte computer, fandt støttepunkter og tegnede de 4 linier ind i et selvskabt koordinatsystem. Så blev koordinaterne til hver af de fire skæringspunkter fundet ved løsning af to ligninger med to ubekendte. Dernæst blev afstandsformlen anvendt til at vise, at de fire sider var lige store, og endelig blev hældningskoefficienterne brugt til at vise, at linierne var parvis parallelle og at de ikke parallelle linier stod vinkelret på hinanden. Den studerende fik således demonstreret kendskab til kvadrater og analytisk geometri.

En studerende, der valgte at bruge GeomeTricks, tastede i dette program de fire opgivne ligninger ind og fik automatisk tegnet de tilhørende linier i et koordinatsystem. Dernæst blev programmet bedt om at finde først de fire skæringspunkter, så længden af hver af de fire sider (som så kunne ses at være lige store) og endelig vinklerne (som alle kunne ses at være 90 grader). Den studerende fik således demonstreret kendskab til kvadrater og GeomeTricks.

Det er jo vidt forskellige kompetencer, de to studerende her demonstrerer, og man kunne da nok stille spørgsmål ved, om det er rimeligt, at de vurderes ens. Men måske er det i fremtidens skole og seminarium ligegyldigt med fx analytisk geometri og trigonometri, når vi nu kan erstatte dem med sorte bokse. Det vi så vil se er, at matematiske færdigheder afløses af færdighed i at håndtere programmer, der har disse færdigheder. Hvad vil det mon betyde for skolefaget matematik? Hvilke fordele/ulemper kan det give?

Den basale færdighed, man gerne vil have eleven til at tilegne sig, er det næppe hensigtsmæssigt at forsyne programmet med. Derimod kunne det være helt fint om programmet kunne tjekke om eleven i sit arbejde med programmet udnytter denne færdighed på rette vis (altså en slags 'stavekontrol').

Matematisk notation

Her kan man vælge at lægge sig op ad den matematiske notation, der gennem århundreder har været standard ved håndskrivning, og hvis variabel- og funktionsnavne ikke synes at have været videre befordrende for skoleelevers forståelse af de tilhørende begreber.

Eksempel:

$$y = 7x + 20$$

hvor y er taxaprisen, man skal betale for at køre x antal km.

Eller man kan tillade brugen af informative variabel- og funktionsnavne

$$\text{taxapris} = 7 \cdot \text{antal_km} + 20$$

der vel må siges at befinde sig på et lavere abstraktionsniveau. Her skal man ikke først til at afkode, hvad x og y står for.

Det er en nærliggende tanke, at brug af informative navne, der tager udgangspunkt i elevens hverdag, kunne medvirke til at overvinde nogle af de enorme vanskeligheder, som eleverne har med variabel og funktionsbegrebet. Vanskeligheder som er dokumenteret i utallige artikler i ind- og udland, og som man altså også, som nævnt ovenfor, kan se dokumenteret i statistikken fra færdighedsdelen i FSA i matematik.

Det har været fremhævet, at fremkomsten af e-værktøjer i skolens matematikundervisning må betyde et skift af fokus fra det at udføre en regneoperation til det at vælge den rette regneoperation (den rette model) for en given situation. Det er således vigtigt, at eleverne har et værktøj, der sætter dem i stand til på enkel vis at opstille (og bruge) sådanne modeller.

Udtryk bør naturligvis kunne bygges op successive, sådan at man kan starte med simple udtryk og lade dem indgå i efterfølgende udtryk.

Variabelnavne er i programmer som fx Scientific Notebook reduceret til variabelbogstaver. Sådanne kan i sagens natur ikke være særligt informative.

En helt igennem uacceptabel notation er den, der anvendes i regneark som Works og Excel:

$$= \$C\$2 * A3^2 + \$D\$2 * A3 + \$E\$3$$

Den kan få selv

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

til at virke 'spiseligt'.

Det krav, der ligger i regneprogrammer, om at et udtryk skal kunne stå på én linie, og som forhindrer den gængse brøknotation, bør fjernes, således at man på enkel vis har mulighed for fx udtryk som:

$$\frac{x+3}{x^2-3} + \frac{34}{\frac{1}{2}}$$

Underforståede regneoperationstegn er nok en overvejelse værd, da vores brug af dem ind imellem mangler konsistens. Tag fx udtrykket: $2x$. Her er der underforstået et gangetegn mellem 2 og x . Lader man nu x være $\frac{1}{2}$, så står der altså $2\frac{1}{2}$, men nu er der jo ifølge gængs notation ikke længere underforstået et gangetegn men et plustegn.

Hvad skal værktøjet kunne af tekstbehandling/layout?

Problemet her er nok, at sprogfagene så eftertrykkeligt har overhalet matematik. Man kan næppe forestille sig at sproglærerne vil være villige til at skifte deres allerede etablerede tekstbehandlingssystem ud med et matematisk skriveværktøj med mindre dettes tekstdel er lig det tekstbehandlingssystem, de og deres elever allerede er fortrolige med. Det vil næppe heller være acceptabelt, at eleverne skal svinde mellem to forskellige tekstbehandlingssystemer. Kort sagt: det bør være så tæt på Word tekstbehandlingssystemet som muligt.

Endvidere bør der være let og glidende (umærkelig?) overgang mellem tekstskrivning og matematikskrivning.

Uanset hvor altfavnende man forsøger at gøre programmet, vil det helt sikkert være vigtigt, at det gennem klippe/klistre aktiviteter kan udveksle informationer med andre programmer.

Referencer:

- [1] Enggaard, Karsten m.fl. *Prøver, Evaluering, Undervisning. Matematik – Fysik/Kemi* Undervisningsministeriet 2002 <http://pub.uvm.dk/2002/peumatematik/>
- [2] Larsen, Inge B. *Kan man regne med regneark i skolen?* Matematik, nr. 5, september 2000
- [3] Larsen, Inge B. *En e-bro mellem regning og algebra.* Matematik, nr. 2, marts 2001
- [4] Larsen, Inge B. *What Should be Asked of a Computer Program for Mathematical Modelling in Primary/Lower Secondary School?* In Matos, J.F. et al (eds). *Modelling and Mathematics Education* (ICTMA 9: Applications in Science and Technology). Horwood Publishing 2001.
- [5] Larsen, Inge B. *It i folkeskolens matematikundervisning*, Forum for Matematikkens Didaktik, Nyhedsbrevet, 6. årgang, Nr. 2, April 2002