INFA-Chancelæreserien:

MI 82

ISBN 87-7701-350-6

<spil.pm4>

Chancelære:

Spil

Chancer gennem tællemetoder

INFA Matematik - 1993

INFA-Matematik:
Informatik i matematikundervisningen

et delprojekt under

INFA:
Informatik i skolens fag
Et forskningsprogram på Danmarks Lærerhøjskole

Projektledelse:

Allan C. Malmberg
Inge B. Larsen
Viggo Sadolin

Distribution af programmer og tekster:

INFA, Danmarks Lærerhøjskole
Emdrupvej 115B, 2400 NV

ISBN 87-7701-350-6

Indholdsfortegnelse

*

Tekst: Allan C. Malmberg

Layout: Leif Glud Holm

Forord

Dette hæfte indgår i INFA-matematikserien Chancelære. Det viderefører behandlingen af emner fra hæftet "Chancer gennem optællinger", som introducerede chancesituationer der beskrives ved ligevægtede udfald i små overskuelige udfaldsrum.

Når udfaldsrummene bliver mere komplekse må optællingerne udføres ved hjælp af metoder fra den elementære kombinatorik. Hæftet indledes derfor med en behandling af en tællemetode, som kan anvendes i situationer der beskrives som udtagelser af elementer fra en forelagt mængde. Omtalen af kombinatorikken er dog holdt på et minimum, og der gives ikke nogen systematisk gennemgang af de sædvanlige modeller for stikprøveudtagelse. Behandlingen fokuserer på metoder til udførelse af antalsbestemmelser, ikke på formler.

Som et hjælpemiddel ved beskrivelsen af tællesituationer indføres begrebet *K(n,r)*, antallet af udvalg på *r* elementer der kan udtages fra en mængde bestående af *n* elementer.

I hæftets anden del anvendes den indførte tællemetode på en række eksempler der er hentet fra området spil. Det drejer sig både om velkendte spil og om spil der er konstrueret til lejligheden.

Kombinatorik er erfaringsmæssigt et fagområde der giver vanskeligheder både for begyndere og for mere erfarne. Hæftet vil derfor sikkert opfattes af elever som værende mere teoretisk og mere vanskeligt end de øvrige hæfter i Chancelære-serien.

Mange af de behandlede spillesituationer vil imidlertid kunne afprøves af eleverne, enten gennem rigtige spil eller gennem spil der udføres på datamaskine. Eleverne vil således have gode muligheder for at efterprøve de foretagne beregninger gennem praktiske forsøg.

En del af indholdet af dette hæfte er tidligere behandlet i afsnittene 6 og 8 i *Hvad er chancen*, Gad 1980.

Allan C. Malmberg

1. En tællemetode

I hæftet "Chancer gennem optællinger" har du arbejdet med at bestemme sandsynligheder i situtioner hvor der foreligger ligevægtede udfald, dvs. udfald som alle har samme chance for at forekomme. Du har set hvordan man kan finde sandsynligheden for en forelagt hændelse ved at bestemme to antal:

(1) antallet af udfald i udfaldsrummet

(2) antallet af gevinstudfald for hændelsen.

Hvis det drejer sig om et udfaldsrum som er overskueligt, og som ikke indeholder for mange udfald, vil man let kunne gennemføre de to optællinger. Ofte kan man ved optællingen gøre brug af små skemaer som giver et billede af udfaldsrummet og hvert enkelt af dets udfald.

Men hvad nu hvis udfaldsrummene bliver store og måske indeholder tusinde udfald eller endnu flere? Så vil et skema ikke være tilstrækkeligt, der må andre hjælpemidler til. Det vil være vanskeligt at give et tegnemæssigt billede af et sådant udfaldsrum, optællingerne må derfor foregå uden at vi har et billede af hvert enkelt udfald. I en sådan situtíon kan vi benytte nogle tællemetoder fra det område i matematikken der hedder *kombinatorik*. Vi skal her se på den grundlæggende tællemetode fra kombinatorikken.

Ved denne tællemetode vil vi benytte et *tælletræ*. Et grafisk hjælpemiddel som kan være til nytte når vi skal styre optællingerne. I de fleste tilfælde vil vi slet ikke tegne tælletræet, men nøjes med at tænke os det tegnet.

Lad os antage at vi ved et kast med tre terninger ønsker at kunne beregne sandsynligheder vedrørende alle mulige øjental ved de tre kast. Kastet med de tre terninger kunne vi da illustrere ved et træ hvor hver forgrening har seks grene, én for hvert af de mulige øjental. Da træet er sammensat af tre forgreninger, F1, F2 og F3, hver med seks grene, vil det samlede antal grene i træet blive: 6x6x6= 216:

F1: (1. forgrening)	F2: (2. forgrening)	F3: (3. forgrening)
1. terning kastes 6 grene	2. terning kastes 6 grene	3. terning kastes 6 grene

I alt: 6x6x6= 216 grene

Vi kan godt tænke os til træet, men det ville ikke være rart at skulle tegne det.

Hvis vi nu ønskede at bestemme sandsynligheden for hændelsen "De tre terninger viser tre forskellige øjental", måtte vi i træet finde alle de grene der er gevinstgrene for denne hændelse. En gren af denne slags kunne være den der svarer til resultaterne 5-6-2 ved de tre terningkast, derimod er grenen der svarer til 5-5-2 ikke gevinstgren for hændelsen.

Senere i dette afsnit skal du se hvordan vi kan beregne sandsynligheden for hændelsen "De tre terninger viser tre forskellige øjental" uden at tegne chancetræet med de 216 grene.

Et andet eksempel er følgende: Et eksperiment består i 10 kast med en mønt. Vi ønsker at beregne sandsynligheden for at 5 af kastene giver Krone og 5 giver Plat.

Også i dette tilfælde er det rarest blot at tænke sig til træet for de 10 møntkast. Træet vil jo være bygget op med 10 forgreninger som hver har to grene, én for Krone og én for Plat.

F1:	F2:	F3:		F10:
1.møntkast	2.møntkast	3.møntkast	...	10. møntkast
2 grene	2 grene	2 grene	...	2 grene

Det samlede antal grene i træet bliver 2x2x2...2 = 2^{10} = 1024. Disse grene giver os alle de rækkefølger af Krone og Plat der er mulige i 10 møntkast.

Blandt de 1024 grene skal vi nu finde dem der er gevinstgrene for hændelsen "De 10 kast giver 5 Krone og 5 Plat". Der er over 200 grene af den slags, så du kan sikkert forestille dig at arbejdet med at søge efter dem vil blive stort. - Heldigvis kan vi klare os uden træet. Vi benytter i stedet en tællemetode som ikke forudsætter at chancetræet tegnes. Denne metode skal vi nu se nærmere på.

Forgreningsmetoden

Lad os antage at der er forelagt et et eksperiment med ligevægtede udfald, og en hændelse hvis sandsynlighed vi ønsker at beregne. Vi har da behov for at bestemme to antal:

1. Antallet af udfald i eksperimentets udfaldsrum.

2. Antallet af gevinstudfald for den givne hændelse.

Når vi har fundet disse to antal kan vi let beregne den ønskede sandsynlighed.

Hvis eksperimentet kan opfattes som et sammensat eksperiment kan vi i mange tilfælde benytte en tællemetode som kaldes *forgreningsmetoden*. Vi tænker os hvert deleksperiment i det sammensatte eksperiment illustreret ved en forgreningsfigur som har én gren for hvert af de mulige udfald ved deleksperimentet. Den samlede forgreningsfigur for hele det sammensatte eksperiment vil vi kalde *et tælletræ*.

For det meste vil vi ikke tegne tælletræet, vi vil nøjes med at tænke os til det. Hvis vi blot kender antallet af grene ved de enkelte forgreninger i træet kan vi let beregne det samlede antal af grene i træet. Ved hjælp af et sådant tælletræ kan vi finde antallet af udfald der er gevinstudfald for en forelagt hændelse. Vi ser på nogle eksempler.

Eksempel 1 Tre personer stilles i række

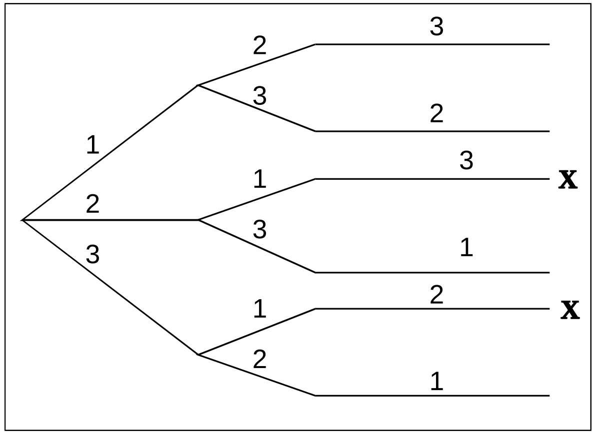
Tre personer A, B og C stilles ved hjælp af lodtrækning op i en tilfældig rækkefølge. Hvad er sandsynligheden for at B placeres på 1. pladsen?

Vi kan opfatte lodtrækningen som et sammensat eksperiment. Ved første deleksperiment udtrækker A en af de tre pladser, derefter trækker B en af de to resterende pladser og til sidst får C tildelt den tiloversblevne plads. Lodtrækningen kan vi illustrere ved et tælletræ med tre forgreninger:

F1:	F2:	F3:
A placeres 3 grene	B placeres 2 grene	C placeres 1 gren

I alt: 3x2x1 = 6 grene

I dette tilfælde er tælletræet let at overskue:



Den øverste gren i træet svarer til at A placeres på 1. pladsen, B på 2. pladsen og C på 3. pladsen.

Træet giver et billede af lodtrækningens udfaldsrum: Der er en nøje overensstemmelse mellem udfaldene ved lodtrækningen og grenene i tælletræet, og hver gren i tælletræet svarer til netop ét udfald ved lodtrækningen: Træet giver et nøje billede af lodtrækningen. - Lodtrækningen har altså 6 mulige udfald. Dem vil vi opfatte som ligevægtede udfald.

På tælletræet kan vi let optælle at der er to udfald der er gevinstudfald for hændelsen "B placeres på 1. pladsen". Grenene for de to udfald er på figuren afmærkede med et kryds. Hændelsen "B placeres på 1. pladsen" har derfor sandsynligheden 2:6 = 1/3.

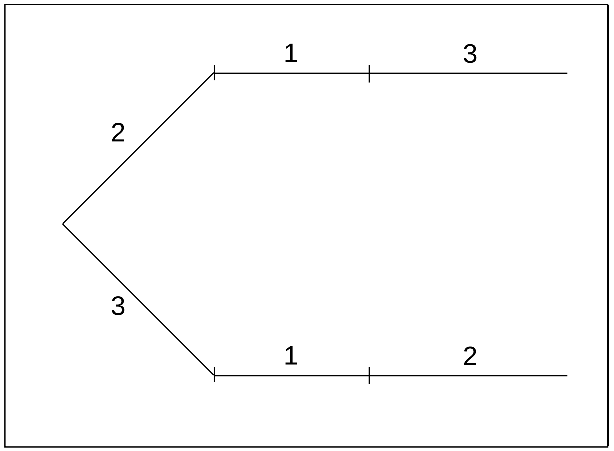
Men vi kan også finde antallet af gevinstudfald for hændelsen ved hjælp af forgreningsmetoden. Vi skal blot tælle op på hvor mange måder A, B og C kan placeres på de tre pladser, når det forlanges at B skal placeres på 1. pladsen.

Ved denne optælling kan vi igen benytte et tælletræ med tre forgreninger. Først placeres A, dernæst B, og til sidst C. Ved placeringen af A er der kun to muligheder, A kan jo ikke placeres på 1. pladsen, den er reserveret til B. Ved placeringen af B er der kun én mulighed (1. pladsen), og ved placeringen af C er der også kun én mulighed (den tiloversblevne plads). Vi har da:

F1:	F2:	F3:
A placeres 2 grene	B placeres 1 gren	C placeres 1 gren

I alt: 2x1x1 = 2 grene

Tælletræet der svarer til optællingen vil se således ud:



Optællingen viser altså at 2 af lodtrækningens 6 mulige udfald placeres B på 1. pladsen. Og sandsynligheden for hændelsen "B placeres på 1. pladsen" er som vi beregnede før: 2:6 = 1/3.

Øvelse 1
Foretag en tilsvarende optælling af gevinstudfaldene for hændelsen "A placeres på 1. pladsen" og for hændelsen "C placeres på 1. pladsen". ✦

Eksempel 2 Tre terninger kastes
Tre terninger kastes. Hvad er sandsynligheden for at de viser tre forskellige øjental?

Vi kan opfatte terningkastene som et sammensat eksperiment: 1. terning kastes, 2. terning kastes, 3. terning kastes. Eksperimentets udfaldsrum kan vi illustrere ved et tælletræ med tre forgreninger:

F1:	F2:	F3:
1. terning kastes 6 grene	2. terning kastes 6 grene	3. terning kastes 6 grene

I alt: 6x6x6 = 216 grene

Tælletræet, som vi denne gang kun tænker os til, vil give et billede af eksperimentets udfaldsrum. Vi har i dette tilfælde et eksperiment med 216 udfald som vi betragter som ligevægtede udfald.

Vi vil nu optælle antallet af gevinstudfald for hændelsen "De tre terninger viser tre forskellige øjental". Ved denne optælling kan vi benytte forgreningsmetoden. Ved første forgrening optæller vi antallet af mulige øjental på 1. terning. Det er 6. - Ved anden forgrening optælles antallet af mulige øjental på 2. terning. Det er kun 5, den anden terning må jo ikke vise det samme som den første terning. - Ved tredje forgrening optælles antallet af mulige øjental på den tredje terning. Det er 4, den tredje terning må jo hverken vise det samme som den første terning eller det samme som den anden terning. - Altså har vi:

F1:	F2:	F3:
1. terning kastes 6 grene	2. terning kastes 5 grene	3. terning kastes 4 grene

I alt: 6x5x4 grene, dvs. 120 grene

Blandt udfaldsrummets 216 udfald er der altså 120 gevinstudfald for hændelsen "De tre terninger viser tre forskellige øjental". Hændelsens sandsynlighed er da:

120:216= 5/9 = 0,56.

Øvelse 2
Angiv (uden at foretage en ny optælling) sandsynligheden for hændelsen "Mindst to terninger viser samme øjental".

Øvelse 3
Beregn ved hjælp af forgreningsmetoden sandsynligheden for hver af følgende tre hændelser:

1. Den første terning viser 5 eller 6 øjne.

2. Alle tre terninger viser samme øjental.

3. Ingen af terningerne viser 5 eller 6 øjne.

Og angiv sandsynligheden for følgende hændelse "Mindst én af terningerne viser 5 eller 6 øjne". ✦

Eksempel 3 Fire spillere trækker et kort
Fire spillere A, B, C og D trækker hver et kort fra et sædvanligt sæt spillekort med 52 kort (13 kort af hver af "farverne" ruder, hjerter, spar og klør).

Hvad er sandsynligheden for at A og B begge trækker et ruder-kort, og at C og D begge trækker et hjerter-kort?

Vi opfatter kort-trækningen som et sammensat eksperiment, hvor spillerne i rækkefølgen A, B, C, D udtrækker et kort fra kortbunken. Eksperimentets udfaldsrum kan illustreres ved et tælletræ med fire forgreninger:

F1:	F2:	F3:	F4:
A trækker et kort 52 grene	B trækker et kort 51 grene	C trækker et kort 50 grene	D trækker et kort 49 grene

I alt: 52x51x50x49 grene, dvs. 6 497 400 grene

Udfaldsrummet for eksperimentet indeholder altså nær ved 6,5 millioner udfald.

Vi finder nu ved forgreningsmetoden antallet af udfald der er gevinstudfald for hændelsen "A og B trækker et ruder-kort og C og D trækker et hjerter-kort". Ved denne optælling kan vi igen benytte et tælletræ med fire forgreninger, én for hver af de fire spillere. Da der i kortbunken findes 13 ruder-kort og 13 hjerter-kort vil forgreningerne nu få følgende gren-antal:

F1:	F2:	F3:	F4:
A trækker et ruder-kort 13 grene	B trækker et ruder-kort 12 grene	C trækker et hjerter-kort 13 grene	D trækker et hjerter-kort 12 grene

I alt: 13x12x13x12 grene, dvs. 24 336 grene

Blandt udfaldsrummets 6497400 udfald er der altså kun 24336, der er gevinstudfald for hændelsen "A og B trækker et ruder-kort, og C og D trækker et hjerter-kort". Hændelsens sandsynlighed er derfor:

24336:6497400 = 0,0037.

Øvelse 4
Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser ved kort-udtagelsen:

1. A trækker et ruder-kort, B, C og D trækker et spar-kort eller et klør-kort.

2. A og B trækker et ruder-kort eller hjerter-kort, C og D trækker et spar-kort eller klør-kort.

3. Alle fire trækker kort af samme farve (dvs. enten alle rudere, alle hjerter, alle sparer eller alle klør).

4. De fire spillere trækker kort af hver sin farve. ✦

Vi har nu givet nogle eksempler på, hvordan forgreningsmetoden kan benyttes ved optællinger af udfald.

Det afgørende er at det forelagte eksperiment kan opdeles i en række deleksperimenter *som alle skal udføres*, ét for ét i en bestemt rækkefølge, og at hvert deleksperiment har et antal udfald som er *det samme uanset hvad der er sket i de foregående deleksperimenter*.

Hvis disse betingelser er opfyldt kan antallet af udfald i det sammensatte eksperiment bestemmes ved forgreningsmetoden. Vi kan knytte optællingen til et tænkt tælletræ hvor vi lader de enkelte forgreninger svare til deleksperimenterne i det sammensatte eksperiment. Ved hver forgrening bestemmer vi antallet af grene ved at se på hvor mange udfald det pågældende deleksperiment kan have.

Vi starter altså optællingen med at gøre os klart hvad der foregår i hvert deleksperiment, og hvor mange udfald der er mulige ved det pågældende deleksperiment. Til hver forgrening kan vi give en lille beskrivelse, som dem vi har benyttet os af i dette afsnit. Til eksempel:

Forgrening nr.	F1
Hvilket eksperiment udføres?	A trækker et kort
Hvor mange muligheder?	52 grene

Når alle forgreninger er beskrevet kan vi let beregne antallet af grene i det tælletræ der ville kunne sammensættes af disse forgreninger. Og hvis vi sikrer os at tælletræet giver et nøje billede af den samling af udfald vi er interesseret i, har vi nu gennemført den ønskede optælling.

Øvelse 5

Tre forskellige bøger skal ved lodtrækning fordeles mellem fem børn. Optæl ved forgreningsmetoden hvor mange fordelinger der er mulige, når:

1. Ingen af børnene må få mere end én bog.

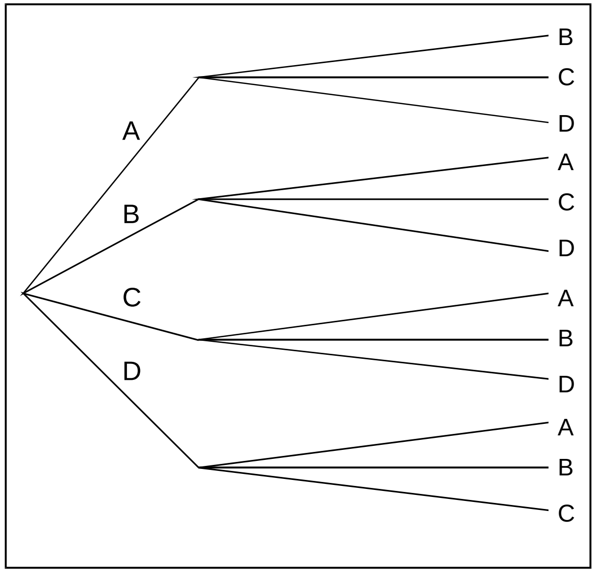
2. Fordelingen sker helt frit (samme barn kan få to bøger eller alle tre bøger). ✦

2. Rækkefølger og udvalg

Fra en gruppe på fire personer skal udtages to. Hvor mange forskellige udvalg er mulige? - Denne optælling vil vi udføre ved hjælp af forgreningsmetoden. Vi deler udtagelsen op i to deleksperimenter: Ved det første udtages én af de fire personer, ved det andet udtages én af de resterende tre personer. Udtagelseseksperimentet kan vi illustrere ved et tælletræ med to forgreninger:

F1:	F2:
En person udtages 4 grene	En person udtages 3 grene

Tælletræet får i alt 4x3 grene, altså 12 grene. Det samlede udtagelseseksperiment kan altså forløbe på 12 forskellige måder:



På tegningen af tælletræet er de fire personer angivet med bogstaverne A, B, C og D. Tælletræet viser de 12 forløb som kan forekomme ved udtagelseseksperimentet. Den øverste gren i tælletræet svarer til at A udtages først, og at B udtages derefter. Udvalget består derfor i dette tilfælde af personerne A og B. Men dette udvalg forekommer én gang til i tælletræet. Det samme udvalg kan jo fremkomme ved at B udtages først og at A derefter udtages. Denne situation er angivet ved den fjerde gren i træet.

Også de andre udvalg forekommer to gange i tælletræet. Træet viser jo alle de *rækkefølger* af to personer som kan forekomme, og inden for hvert udvalg kan de to personer udtrækkes i to rækkefølger. Udvalget bestående af for eksempel C og D forekommer derfor i tælletræet både med rækkefølgen C-D og med rækkefølgen D-C. (Find dem i træet!)

De 12 grene i tælletræet svarer således ikke til 12 forskellige udvalg. Og træet giver derfor ikke et nøje billede af antallet af udvalg. Hvert udvalg er repræsenteret ved to grene, så antallet af forskellige udvalg er kun 12:2, altså 6.

Tælletræet må "udtyndes" før vi har det rigtige antal af udvalg. Vi må her fjerne halvdelen af grenene, vi udtynder derfor træet ved at dividere grenantallet med 2.

På tilsvarende måde kan vi anvende forgreningsmetoden med efterfølgende udtynding hver gang vi skal optælle antallet af udvalg der kan udtages fra en forelagt samling. Men vi skal ikke altid udtynde ved at dividere med 2. Lad os se på endnu et eksempel.

Eksempel 1 Fra syv udtages et udvalg på tre
Fra en gruppe på syv personer skal udtages et udvalg på tre. Hvor mange forskellige udvalg er mulige?

Vi benytter først forgreningsmetoden til at finde alle de *rækkefølger* af udtagelser af tre personer der kan forekomme. Denne optælling klares ved et tælletræ med tre forgreninger:

F1:	F2:	F3:
En person vælges 7 grene	En person vælges 6 grene	En person vælges 5 grene

Tælletræet får i alt 7x6x5 grene, altså 210 grene. Der findes altså 210 forskellige rækkefølger af tre personer valgt blandt de syv personer.

Men der er ikke 210 forskellige udvalg. Lad os se på det udvalg der består af personerne A, B og C. Det vil være repræsenteret i tælletræet ved 6 grene. De tre personer kan jo udtrækkes i 6 forskellige rækkefølger:

A-B-C A-C-B B-A-C B-C-A C-A-B C-B-A

Disse seks rækkefølger har hver sin gren i tælletræet.

På samme måde ses at ethvert af de mulige udvalg af tre personer vil være repræsenteret ved 6 grene blandt tælletræets 210 grene. Antallet af forskellige *udvalg* er altså 210:6 = 35. Udtyndingen af tælletræet er denne gang foretaget ved at vi har divideret grenantallet i tælletræet med 6.

Når udvalget består af 2 personer foretager vi en udtynding af tælletræet ved at dividere med 2, *fordi udvalgets 2 personer kan opstilles i 2 rækkefølger*. Hvert udvalg forekommer derfor 2 gange i tælletræet.

Når udvalget består af 3 personer foretager vi en udtynding af tælletræet ved at dividere med 6, *fordi udvalgets 3 personer kan opstilles i 6 rækkefølger*. Hvert udvalg forekommer derfor 6 gange i tælletræet.

Ved bestemmelse af det tal der skal divideres med kan vi gå frem på følgende måde. Vi bestemmer blot antallet af rækkefølger som udvalgets personer kan opstilles i. Dette antal kan findes ved forgreningsmetoden.

2 personer opstilles i rækkefølge:

F1:	F2:
1. plads besættes 2 grene	2. plads besættes 1 gren

I alt: 2x1 grene

3 personer opstilles i rækkefølge:

F1:	F2:	F3:
1. plads besættes 3 grene	2. plads besættes 2 grene	3. plads besættes 1 gren

I alt: 3x2x1 grene

Ved udvalg på 2 personer skal udtyndingen af tælletræet altså foretages ved at vi dividerer grenantallet med 2x1, ved udvalg på 3 personer ved at vi dividerer grenantallet med 3x2x1.

Optællingen af udvalg kan vi nu klare ved et lille regneskema, hvor vi anfører antallet af grene i det benyttede tælletræ, samt det tal der skal divideres med ved udtyndingen. For de to eksempler vi allerede har set på, får vi:

Af 4 udvælges 2:

F1:	F2:
En person vælges 4 grene	En person vælges 3 grene

Antal grene i alt: 4x3

Antal grene for hvert udvalg: 2x1

Antal udvalg: $\dfrac{4x3}{2x1} = 6$ udvalg

Af 7 udvælges 3:

F1:	F2:	F3:
En person vælges 7 grene	En person vælges 6 grene	En person vælges 5 grene

Antal grene i alt: 7x6x5

Antal grene for hvert udvalg: 3x2x1

Antal udvalg: $\dfrac{7x6x5}{3x2x1} = 35$ udvalg

Af skemaerne kan vi se et mønster for beregningen af antallet af udvalg på mere end 3 personer. Vi anfører to eksempler på sådanne beregninger:

Af 8 udvælges 4:

F1:	F2:	F3:	F4:
En person vælges 8 grene	En person vælges 7 grene	En person vælges 6 grene	En person vælges 5 grene

Antal grene i alt: 8x7x6x5

Antal grene for hvert udvalg: 4x3x2x1

Antal udvalg: $\dfrac{8x7x6x5}{4x3x2x1} = 70$ udvalg

Af 10 udvælges 5:

F1:	F2:	F3:	F4:	F5:
10 grene	9 grene	8 grene	7 grene	6 grene

Antal grene i alt: 10x9x8x7x6

Antal grene for hvert udvalg: 5x4x3x2x1

Antal udvalg: $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ = 252 udvalg

En kort skrivemåde: K-værdier

Det kan være rart at have en kort måde at angive de antal på der forekommer ved optællingen af udvalg. I matematikken taler man om hvor mange *kombinationer* der kan dannes når der blandt 10 personer skal udvælges 5. Dette antal betegner man kort ved:

K(10,5)

Ved udregningen af K(10,5) skal du altså udregne tallet:

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Som du så før udregnes dette tal til 252. Af 10 personer kan der dannes 252 kombinationer med 5 personer, eller af 10 personer kan der opstilles 252 forskellige udvalg med 5 personer i hvert.

Vi har altså: K(10,5) = 252. Vi har også allerede udregnet følgende K-værdier:

K(4,2) = 6 K(7,3) = 35 K(8,4) = 70.

I nogle tabelsamlinger findes tabeller over K-værdier, fx i *Erlang F*. Men ved hovedregning eller ved hjælp af lommeregner kan du selv klare udregningen af mange K-værdier.

Det er vigtigt at du er klar over hvordan du finder de tal der indgår i nævner og tæller ved beregningen af K-værdier. Her kan du altid tænke dig tallene i nævner og tæller som antal der fremkommer ved anvendelse af forgreningsmetoden. Helt på samme måde som du har set det i de eksempler vi har taget op.

Øvelse 1

Beregn følgende K-værdier:

K(6,2) K(6,3) K(6,4)

Angiv også tallene K(6,1) og K(6,5). ✦

Vi skal nu se nogle eksempler på anvendelsen af den nye tællemetode i forbindelse med beregningen af sandsynligheder.

Eksempel 2 Udvalg fra en klasse

Fra en klasse med 12 piger og 8 drenge udtages et tilfældigt udvalg bestående af 4 elever. Hvad er sandsynligheden for at udvalget kommer til at bestå af

(1) 4 piger (2) 4 drenge (3) 2 piger og 2 drenge.

Disse spørgsmål kan vi besvare ved at tælle udvalg. Først finder vi antallet af udvalg der kan udtages blandt klassens elever. Da der er 20 elever i klassen, og da udvalget skal bestå af 4 elever, får vi ved hjælp af forgreningsmetoden (og med efterfølgende udtynding):

Af 20 udtages 4.

Antal udvalg: K(20,4)= $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ = 4845 udvalg.

Udtagelseseksperimentet som består i at udtage 4 elever blandt klassens 20 elever kan give 4845 forskellige resultater. Eksperimentet har altså et udfaldsrum med 4845 udfald. Disse udfald betragter vi som ligevægtede, hvert af de mulige udvalg har samme sandsynlighed for at blive udtaget.

Vi ser nu på hændelsen "Udvalget består af 4 piger". Vi skal her tælle op hvor mange af de 4845 mulige udvalg der består af 4 piger. Det kan vi gøre ved at finde antallet af udvalg på 4 elever der kan udtages blandt klassens 12 piger. Ved hjælp af forgreningsmetoden får vi:

Af 12 udtages 4.

$$\text{Antal udvalg: } K(12,4) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495 \text{ udvalg.}$$

Fra klassen kan der udtages 495 udvalg som er rene pige-udvalg. Af de 4845 mulige udvalg vil altså 495 udvalg bestå af 4 piger. Sandsynligheden for hændelsen "Udvalget består af 4 piger" er da:

495:4845 = 0,102.

På tilsvarende måde kan vi beregne sandsynligheden for hændelsen "Udvalget består af 4 drenge". Denne gang skal vi finde hvor mange 4-udvalg der kan udtages blandt klassens 8 drenge. Vi får:

Af 8 udtages 4.

$$\text{Antal udvalg: } K(8,4) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70 \text{ udvalg.}$$

Fra klassen kan der altså udtages 70 udvalg som er rene drenge-udvalg. Sandsynligheden for hændelsen "Udvalget består af 4 drenge" er da:

70:4845 = 0,014.

Vi ser nu på udvalg som består af 2 piger og 2 drenge. Det er lidt mere kompliceret. Antallet af sådanne udvalg vil vi finde ved hjælp af forgreningsmetoden. Et udvalg af den pågældende art kan nemlig tænkes udtaget ved to deleksperimenter:

Først udtages et udvalg på 2 piger blandt klassens 12 piger, og dernæst udtages et udvalg på 2 drenge blandt klassens 8 drenge. Når vi

kender antallet af mulige udfald ved hvert af disse to deleksperimenter, kan vi ved forgreningsmetoden finde antallet af udfald ved det samlede eksperiment. Vi får (kontrollér de to K-værdier):

F1:	F2:
Af 12 piger udtages 2	Af 8 drenge udtages 2
Antal udvalg: K(12,2) = 66	Antal udvalg K(8,2) = 28

Det samlede eksperiment, som består i udtagelse af 2 piger og 2 drenge, har derfor 66x28 mulige udfald, dvs. 1848 udfald.

Blandt klassens 12 piger og 8 drenge kan altså udtages 1848 udvalg bestående af 2 piger og 2 drenge. Sandsynligheden for hændelsen "Udvalget består af 2 piger og 2 drenge" er da:

1848:4845 = 0,381.

Du kan se at det er mere sandsynligt at udvalget består af 2 piger og 2 drenge end at det består af 4 piger eller af 4 drenge.

Øvelse 2
Beregn sandsynligheden for hændelsen "Udvalget består af 3 piger og 1 dreng" og for hændelsen "Udvalget består af 1 pige og 3 drenge".

Eksempel 3 Ti møntkast
En mønt kastes 10 gange. Hvad er sandsynligheden for at to af kastene giver Krone og otte giver Plat?

Vi har tidligere opstillet et udfaldsrum for de 10 møntkast. Hvert af kastene har to mulige udfald: det kan resultere i Krone eller det kan resultere i Plat. Ved anvendelse af forgreningsmetoden fandt vi at det samlede møntkast-eksperiment har et udfaldsrum med 2^{10} udfald, dvs. 1024 udvalg. Disse udfald betragter vi som ligevægtede, hvert af udfaldene har altså en sandsynlighed på 1/1024.

Et af de 1024 udfald er for eksempel at 1. og 2. kast giver Krone, medens de resterende otte kast giver Plat. Et andet udfald, hvor der også er to kronekast og otte platkast, er at kast nr. 2 og nr. 9 giver Krone medens de øvrige kast giver Plat.

Hvor mange af de 1024 udfald resulterer i to Krone og otte Plat? Dette antal har vi netop brug for når vi vil beregne sandsynligheden for hændelsen "To af de ti kast giver Krone".

Vi kan bestemme antallet af disse udfald ved at tælle op hvor mange af de 1024 kasteresultater der svarer til to Krone og otte Plat. Det gør vi ved at udvælge to kast blandt de ti kast. De to udvalgte kast svarer så til dem der skal give Krone. Dette antal af udvalg bestemmer vi på den velkendte måde:

Af 10 udtages 2. Antal udvalg: K(10,2) = 45 udvalg.

Af de 1024 udfald i møntkast-eksperimentets udfaldsrum er der altså 45 der svarer til at "To af de ti kast giver Krone". Hændelsens sandsynlighed er derfor:

45:1024 = 0,044.

På tilsvarende måde kan vi nu bestemme antallet af gevinstudfald for hændelsen "Tre af de ti kast giver Krone".

Vi optæller i dette tilfælde på hvor mange måder vi kan udvælge de tre kast der skal give Krone:

Af 10 udtages 3. Antal udvalg: K(10,3) = 120 udvalg

Af de 1024 udfald svarer 120 til at tre af de ti kast resulterer i Krone. Sandsynligheden for hændelsen "Tre af de ti kast giver Krone" er altså:

120:1024 = 0,117.

Øvelse 3

Beregn sandsynligheden for at fire af de ti kast giver Krone, og beregn sandsynligheden for at fem af de ti kast giver krone.

Hvad er mon sandsynligheden for at seks af de ti kast giver Krone?

Eksempel 4 Kast med terninger

Der kastes med tre terninger. Hvad er sandsynligheden for at der opnås to seksere?

I et kast med tre terninger er der som vi har set 6x6x6 mulige kasteresultater, dvs. 216. Disse 216 udfald betragter vi som ligevægtede, de er altså lige sandsynlige. Det vil sige at der fx er samme chance for at de tre terninger viser 5-4-2, som for at de viser 6-3-3. (Du må gerne gå ud fra at terningerne har hver sin farve, så du kan kende forskel på dem.)

Vi vil nu se hvor mange af de 216 kasteresultater der svarer til at to af terningerne viser 6 øjne. Vi tæller op ved hjælp af forgreningsmetoden:

F1: De to terninger der skal vise 6 udvælges.

F2: Et øjental til den sidste terning vælges.

I 1. forgrening skal der blandt 3 terninger vælges 2. Det kan give K(3,2) forskellige udvalg, dvs. 3 udvalg.

I 2. forgrening er der 5 valg. Den sidste terning må ikke vise 6 øjne, men ellers er der frit valg.

Alt i alt er er 3x5 = 15 kasteresultater blandt de 216 hvor to terninger viser 6 øjne. Sandsynligheden for to seksere er derfor:

15/216 = 0.069

Hvad er sandsynligheden for én sekser i kastet med de tre terninger.?Vi benytter igen en optælling:

F1: Den terning der skal vise 6 øjne vælges.
Her er 3 valg.

F2: Der vælges øjental til den næste terning.
Her er 5 valg.

F3: Der vælges øjental til den sidste terning.
Her er 5 valg.

Antallet af kasteresultater med én sekser er derfor: 3x5x5 = 75. Sandsynligheden for én sekser er således:

75/216 = 0.347

Øvelse 4
Hvad er sandsynligheden for følgende hændelser ved et kast med tre terninger:

1. Der opnås tre seksere.
2. Der opnås mindst én sekser.
3. Der opnås ingen seksere. ✦

En oversigt
Du har nu set eksempler på optællinger, hvor der somme tider er tale om ting der placeres i *rækkefølger*, og hvor der somme tider er tale om *udvalg*, hvor rækkefølgen ingen rolle spiller.

Vi laver en lille oversigt i tilknytning til et eksempel.

Eksempel: Fra 10 udtages 3
Rækkefølger uden mulighed for gentagelse: 10x9x8 = 720

Rækkefølger med mulighed for gentagelse : 10x10x10 = 1000

Udvalg (Altid uden gentagelse) : K(10,3) = 120

Der er altså tre typer af situationer som alle bygger på forgreningsmetoden. Når du skal foretage en optælling ved hjælp af forgreningsmetoden, må du selv finde ud af hvilken af de tre situationer der er tale om: *Betyder rækkefølgen af udtagelserne noget? Er der mulighed for at samme element kan udtages flere gange? Er der tale om et udvalg?*

Hvis du er i tvivl, og det kan man let komme i forbindelse med optællinger, så brug forgreningsmetoden skridt for skridt: Notér hvad der skal ske i hvert deleksperiment, og bestem antallet af grene i hver forgrening. Overvej derefter om træet giver et nøje billede af optællingen, eller om der skal foretages en udtynding blandt træets grene.

Kun gennem øvelse bliver du sikker i at udføre optællinger.

Her er tre små eksempler på anvendelser:

Eksempel A. Tre ordstyrere vælges
I en klub med 10 medlemmer skal vælges en ordstyrer til hvert af sæsonens 3 møder. Hvor mange valg er mulige?

Vi vil antage at samme person godt kan vælges flere gange.
Forgreningsmetoden giver derfor følgende optælling:

F1: Der vælges ordstyrer til første møde.
10 valg.

F2: Der vælges ordstyrer til andet møde.
10 valg.

F3: Der vælges ordstyrer til tredje møde.
10 valg.

I alt: 10x10x10 valg = 1000.

Eksempel B. Der vælges en bestyrelse
I klubben med 10 medlemmer skal vælges en bestyrelse på tre: en formand, en næstformand og en kasserer. Hvor mange bestyrelser kan vælges?

Ved brug af forgreningsmetoden får vi:

F1: Formanden vælges.
10 valg.

F2: Næstformanden vælges.
9 valg.

F3: Kassereren vælges.
8 valg.

I alt: 10x9x8 valg = 720.

Eksempel C. Et festudvalg nedsættes
I klubben med 10 medlemmer skal vælges et festudvalg på 3. Hvor mange forskellige udvalg kan nedsættes?

Her er direkte tale om et udvalg: Af 10 skal vælges 3. Antallet af sådanne udvalg er: K(10,3) = 120.

Programmet KOMBINAT
Til brug for beregninger af antal i forbindelse med optællinger kan du anvende INFA-programmet KOMBINAT. Det giver dig mulighed for at foretage en hurtig beregning af de antal der forekommer i forbindelse med opgaver af de tre typer vi har set på i eksempel A, B og C.

3. Opgaver

1. Et festudvalg nedsættes
I en klasse med 9 drenge og 6 piger skal nedsættes et festudvalg bestående af 3 elever. Udvalget vælges ved lodtrækning. Beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Udvalget kommer til at bestå af 3 drenge.

2. Udvalget kommer til at bestå af 3 piger.

3. Udvalget kommer til at bestå af 2 drenge og 1 pige.

2. Lotterisedler
I et lotteri i Sørens klasse fordeles 10 gevinster blandt 30 lodsedler. Søren køber 5 sedler i lotteriet.

1. Beregn hvor mange forskellige udvalg af 5 sedler Søren kan få når han frit kan vælge mellem alle 30 sedler.

2. Beregn hvor mange udvalg af 5 sedler Søren kan få ved at

   vælge blandt de 20 sedler som ikke giver gevinst.

Beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

3. Ingen af Sørens sedler giver gevinst.

4. Alle Sørens sedler giver gevinst.

5. En af Sørens sedler giver gevinst, og fire giver ikke gevinst.

6. To af Sørens sedler giver gevinst, og tre giver ikke gevinst.

3. Banko
Ved et tallotteri udtrækkes tal, ét for ét og uden tilbagelægning, fra tallene 1, 2, 3, ..., 90. Antag at der på hver af lotteriets spilleplader findes et tilfældigt udvalg af 15 af disse tal. Søren deltager i spillet

Beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Alle de første fire udtrukne tal findes på Sørens spilleplade.

2. Ingen af de første fire udtrukne tal findes på Sørens spilleplade.

3. Et af de første fire udtrukne tal findes på Sørens spilleplade.

4. Trecifrede tal
Blandt tallene 000, 001, 002,...,999 udvælges et tal ved lodtrækning. Beregn sandsynligheden for hændelsen "Det udvalgte tal indeholder tre forskellige cifre".

5. Fircifrede tal
Blandt tallene 0000, 0001, 0002, ...,9999 udvælges et tal ved lodtrækning. Beregn sandsynligheden for at det udvalgte tal vil indeholde to eller flere ens cifre.

6. Ugedage
Beregn sandsynligheden for at der blandt tre tilfældigt valgte personer findes to der er født på samme ugedag. -Gå ud fra at de syv ugedage kan betragtes som ligevægtede.

7. Fire personers fødselsdagsmåneder
Beregn sandsynligheden for at der blandt fire tilfældigt valgte personer findes to der har fødselsdag i samme måned. Gå ud fra at de tolv måneder kan betragtes som ligevægtede.

8. 6 møntkast
6 mønter kastes. Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

1. 2 af mønterne viser Krone, 4 viser Plat.

2. 3 af mønterne viser Krone, 3 viser Plat.

3. 4 af mønterne viser Krone, 2 viser Plat.

9. 10 møntkast
Lav en tabel over sandsynligheden for at 10 møntkast resulterer i Ingen Krone, 2 Krone, ..., 10 Krone.

10. Hvad mener folket?
En formiddagsavis laver en undersøgelse af folks mening om EF. Avisen spørger 10 tilfældigt valgte personer på gaden om de er for eller imod EF. Hvis halvdelen af befolkningen er for EF og halvdelen imod (og det samme gælder for folk på gaden), hvad er da sandsynligheden for at der blandt de 10 adspurgte personer vil være:

1. Fem der imod og fem der er for.

2. Mindst seks der er imod.

3. Mindst syv der er imod.

Benyt tabellen fra opgave 9 ved besvarelsen.

11. Fire kort på hånden
Fra et almindelig sæt spillekort med 52 kort udtages fire kort. Beregn sandsynligheden for følgende hændelser (brug lommeregneren):

1. Der udtages 2 spar-kort og 2 klør-kort.

2. Der udtages 2 spar-kort og 2 kort som ikke er sparkort.

3. Der er to sorte kort og to røde kort blandt de udtagne kort.

4. Der er ét es blandt de udtagne kort.

5. Der er to billedkort blandt de udtagne kort.

6. Der er ét es og to billedkort blandt de udtagne kort.

12. Ét par af cifre
Blandt tallene 0000, 0001, 0002, ...,9999 udvælges et tal ved lodtrækning. Beregn sandsynligheden for at tallet indeholder ét par af ens cifre (eksempler på tal: 2732 og 4478, men ikke 4477 der indeholder to par, og ikke 4447 som indeholder tre ens cifre).

Optæl antallet af tal med ét par af ens cifre ved hjælp af forgreningsmetoden. Her er et forslag:

F1: Blandt de ti cifre vælges det der skal optræde som par.

F2: Af de fire pladser i tallet udvælges to til cifferparret.

F3: Et ciffer vælges til den første frie plads i tallet.

F4: Et ciffer vælges til den sidste frie plads i tallet.

13. Pokerterninger: Ét par
Fem terninger kastes. Du må gerne tænke dig at de fem terninger har hver sin farve. Hvor mange forskellige kasteresultater kan du få?

Beregn sandsynligheden for at der opnås ét par (to terninger viser ens, de tre andre viser tre forskellige andre øjental).

Benyt fx en optælling svarende til den der er brugt i opgave 12:

F1: Vælg det øjental der skal optræde som par.

F2: Af de 5 terninger vælges de 2 der skal vise ens.

F3..F5: .... (dem klarer du selv)

I hæftet " Chancer gennem eksperimenter", afsnit 3, opgave 8, har du fundet sandsynligheden for "Ét par" ved hjælp af eksperimenter.

Sammenlign med det resultat du nu har beregnet på grundlag af optællinger.

Beregn endvidere sandsynligheden for hændelsen "Mindst to terninger viser det samme". Forklar hvorfor du uden at foretage beregningen kan sige at sandsynligheden for denne hændelse er større end sandsynligheden for hændelsen "Ét par".

14. Pokerterninger: To par
Beregn sandsynligheden for "To par" i et kast med fem terninger: To af terningerne viser ét øjental, to viser et andet øjental, og den sidste terning viser et tredje øjental.

Benyt fx følgende optælling:

F1: De to øjental der hver skal optræde i par vælges.

F2: De to terninger som skal vise det største af de to valgte øjental udvælges.

F3: De to terninger som skal vise det mindste af de to valgte øjental udvælges.

F4: Der vælges øjental til den sidste terning.

Sammenlign den fundne sandsynlighed med det resultat du har opnået i opgave 9 i afsnit 3 i hæftet "Chancer gennem eksperimenter".

15. Fup i Legestuen?
I en udsendelse i Legestue i TV benyttes et lykkehjul med seks felter. Lykkehjulet snurres, og det udvalgte felt bestemmer hvilken aktivitet der nu skal foregå. I løbet af udsendelsen snurres lykkehjulet seks gange, og hver gang viser det sig at hjulet standser ved et felt som ikke tidligere har været udtrukket. Tror du det er gået ærligt til?

I den næste Legestue går det på samme måde. Hvad mener du nu?

16. Lige eller ulige?
Sanne foreslår Malene følgende spil: *Jeg kaster en håndfuld mønter. Du vinder hvis der er et ulige antal mønter der viser Krone, jeg vinder hvis der er et lige antal der viser Krone*.

Malene mener at vinderchancerne må afhænge af hvor mange mønter der kastes, men Sanne vil ikke sige hvor mange mønter der går på en håndfuld. Malene må derfor i gang med nogle beregninger.

Udfør beregningerne når der kastes 10 mønter (benyt tabellen fra opgave 9), og udfør beregningerne når der kastes 9 mønter (lav selv en tabel).

17. Blommespillet
I en børnebog omtales et spil der hedder blommespillet: 8 blommesten farves på den ene side. Stenene kastes på bordet, og der opnås point efter hvor mange af de farvede sider der vender opad.

Der gives point ved 8, 7 og 6 og ved 2, 1 og 0 farvede sider, men ikke ved 3, 4 og 5 farvede sider. I børnebogen står: "Det mærkelige er at der næsten altid bliver 3, 4 eller 5 farvede sider i et kast. Forklar det, hvem der kan".

Den forklaring kan du give. Beregn sandsynligheden for at der bliver 3, 4 eller 5 farvede sider. Du kan gå ud fra at chancen for at en blommesten falder med den farvede side opad er 50%.

18. Mindst én sekser
Beregn sandsynligheden for at få mindst én sekser i et kast med fire terninger.

4. Spil

Spil har alle dage hørt til vores kæreste tidsfordriv, og spilleglæde og spillelidenskab har været kendt gennem hele menneskehedens historie. De former for spil som kan føres længst tilbage i tiden er terningspil. Arkæologiske fund tyder på at spil med terninger eller andre "kasteting" har været i brug i mere end 10 000 år.

Terninger har ikke altid været de sekssidede terninger vi nu kender. Som terning benyttedes i de ældste tider forskellige dyreknogler med en særlig regelmæssig form. Ofte var det en knogle fra hælebenet fra et får eller en hjort. Når en sådan knogle benyttedes som kasteredskab var der fire mulige udfald. Udfaldene var dog ikke ligevægtede, forsøg med arkæologiske terninger viser at to af terningens sider kunne tillægges sandsynligheder på ca. 3/8, medens de to andre havde sandsynligheder på ca. 1/8. De fire udfald havde -ifølge historiske beretninger - værdierne 1,3,4 og 6, hvor 1 og 6 var de sjældne udfald. Et af de fineste kast der kunne udføres med fire terninger af den slags var det såkaldte venus-kast, hvor kasteren opnår at alle fire mulige resultater forekommer. De fire terninger viser altså fire forskellige resultater.

Øvelse 1
Beregn sandsynligheden for at slå venus-kastet med fire firsidede terninger. De enkelte udfald er tillagt følgende sandsynligheder: 3 og 4 har sandsynligheden 3/8, 1 og 6 har sandsynligheden 1/8. Benyt fx et chancetræ. Du behøver kun at tegne de grene der svarer til at de fire terninger viser fire forskellige resultater. ✦

Den sekssidede terning har været i brug i ca. 5000 år. Fordelingen af øjne på terningens sider har dog ikke altid været som nu, først fra omkring vor tidsregnings begyndelse har det været almindeligt at terningens øjne var arrangeret på samme måde som på en moderne spilleterning: Øjentallene på modstående sider har summen 7, dvs. 1 er anbragt over for 6, 2 over for 5, og 3 over for 4. Terningerne kunne være af ler eller sten, eller de kunne være knoglestumper eller glasstykker. De havde derfor ofte en uregelmæssig form, og de forskellige udfald var ikke ligevægtede. Således gav 500 kast med en museumsterning der stammer fra ca. 1500 før vor tidsregning følgende resultat: 1: 78 kast, 2: 36 kast, 3: 106 kast, 4: 130 kast, 5: 52 kast, 6: 98 kast.

Kun de sidste 3-400 år har det været reglen at spilleterninger er fremstillet på en sådan måde at de seks mulige udfald kan betragtes som ligevægtede.

Vi skal i dette afsnit se på nogle eksempler på spil. Det er især terningspil vi vil omtale, men eksempler på spil af andre typer vil også blive nævnt.

4.1 Chancespil og færdighedsspil

Spil kan groft opdeles i to grupper. I den ene gruppe har vi *chancespil*. Her er det alene tilfældigheder der er afgørende for spillets forløb. Det er derimod uden betydning om spilleren er mere eller mindre dygtig, eller om han har mere eller mindre erfaring fra tidligere spil at bygge på. Den slags spil kaldes også *hasardspil*. - Den anden gruppe af spil kan vi kalde *færdighedsspil*. Her er det spillerens dygtighed eller færdigheder der er afgørende for resultatet, og tilfældigheder er uden større indflydelse på spillets gang.

Blandt chancespillene kan nævnes roulette, lotterier, og en række terningspil. Til færdighedsspillene hører for eksempel skak og de fleste kortspil. I kortspil er der ganske vist et moment af tilfældighed med ved kortgivningen, men i almindelighed vil det i højere grad være spillerens dygtighed end kortgivningens udfald der er af betydning for spillets forløb. En dansk domstol har imidlertid - til stor forbavselse for mange kortspillere - fastslået at Poker er et hasardspil. Det må derfor ikke spilles "på offentlig sted eller i erhvervsmæssigt øjemed".

Mange terningspil er mere færdighedsspil end chancespil. Således er et af de ældste kendte spil, Backgammon, et spil hvor dygtighed er helt afgørende. Der afholdes da også turneringer og der kåres mestre i dette spil.

I chancespil blomstrer den såkaldte *spilleovertro*. Den viser sig for eksempel ved rouletten: Når rød er kommet ud de sidste fem spil, må

sort have større chance i det næste spil. Spilleren sætter derfor sin indsats på sort. - Men overtroen kan også føre til det modsatte resultat: Når rød er kommet ud i de sidste fem spil, må rød have større chance end sort i det næste spil. Spilleren sætter derfor sin indsats på rød. -

I den første situation har spilleren en form for "*ligevægtsprincip*" der styrer hans indsats. "Der må være balance mellem rød og sort i det lange løb. Så nu er det sorts tur til at komme ud". - I det andet tilfælde er der tale om en slags "*op- og nedtur princip*": Rød og sort har begge deres stærke perioder og deres svage perioder. Det gælder derfor om at spille på rød når denne farve er inde i en af sine stærke perioder.

Begge de to principper bygger på en fejlagtig opfattelse af tilfældighedens love. At overtroen kan være så udbredt skyldes sikkert at spilleren kun husker de heldige situationer hvor anvendelsen af princippet gav gevinst. Derimod er han tilbøjelig til at glemme de tilfælde hvor det ikke bragte held.

Spilleovertroen dukker op ved alle former for spil hvor held eller uheld forekommer. I Ludo kan den for eksempel give sig udslag i at en spiller der ikke har fået sekser i ti kast, er overbevist om at chancen for at sekseren kommer i næste kast er betydeligt større end 1/6. - Til en sådan spiller kan det være på sin plads at minde om det gamle rafleord:

Terninger har ingen hukommelse

Terningen husker ikke sine tidligere resultater. Ethvert terningkast er et nyt eksperiment, og chancen for en sekser er stadig den samme.

Vi ser nu på nogle spil og på de chanceberegninger der kan være brug for i disse spil.

4.2 Spil på sekseren

Spillet udføres med deltagelse af en spillebank og en spiller. Spillerens indskud er 1 kr. Han kaster tre terninger, og gevinstens størrelse afhænger af antallet af seksere:

3 seksere: Gevinst 5 kr.

2 seksere: Gevinst 3 kr.

1 sekser: Gevinst 2 kr.

Hvis der ikke opnås nogen sekser er der ingen gevinst. I hvert spil beholder spillebanken spillerens indskud, spillerens *overskud* ved et kast med tre seksere er derfor 4 kr. I et kast uden seksere er spillerens *underskud* 1 kr. I afsnit 2 har du ved hjælp af et chancetræ beregnet sandsynligheden for at slå tre seksere, to seksere, og én sekser i et kast med tre terninger. For disse hændelser fandt vi følgende sandsynligheder:

3 seksere: sandsynlighed 1/216

2 seksere: sandsynlighed 15/216

1 sekser : sandsynlighed 75/216

Af chancetræet har vi endvidere at sandsynligheden for at ingen af terningerne viser seks øjne er 125/216.

Disse tal fortæller os noget om gevinstchancerne i "Spil på sekseren". Chancen for en gevinst på 5 kr. er 1/216. I det lange løb vil altså kun ét spil ud af 216 give en gevinst på 5 kr. - Chancen for gevinster på 3 kr. og 2 kr. er henholdsvis 15/216 og 75/216. I det lange løb vil altså 15 spil ud af 216 give en gevinst på 3 kr. - Vi kan også se at risikoen for ingen sekser at slå, og dermed at få et tab på 1 kr., er 125/216. I det lange løb vil derfor 125 spil ud af 216 give et tab på 1 kr.

Vi laver nu en gevinstberegning for spillet. Den vil vise spilleren hvilke økonomiske muligheder der er i spillet. Beregningen kan ikke fortælle spilleren noget om hvordan hans overskud eller underskud vil være når han blot udfører nogle få spil. Derimod kan den give ham gode oplysninger om hvordan det vil gå i det lange løb, altså når han deltager i et stort antal spil.

Ved gevinstberegningen benytter vi sandsynlighederne for de enkelte gevinststørrelser. Sandsynlighederne viser os at i det lange løb vil der ud af hver 216 spil være 1 med 3 seksere, 15 med 2 seksere, 75 med 1 sekser, og 125 uden seksere. Vi kan derfor opstille en beregning for 216 spil. Hvis forløbet af disse spil svarede til teorien, ville regnskabet over spillerens gevinster se således ud:

Gevinst	Sandsynlighed	Antal spil af 216	Gevinst i alt
5 kr.	1/216	1	5 kr.
3 kr.	15/216	15	45 kr.
2 kr.	75/216	75	150 kr.

Samlet gevinst i 216 spil: 200 kr.

Beregningen viser at spillerens samlede gevinst i de 216 spil er 200 kr. Da spilleren har måttet betale et indskud på 1 kr. pr. spil har han haft en udgift i de 216 spil på 216 kr. Han vil derfor have et tab på 16 kr. for de 216 spil, dvs. et tab pr. spil på 16/216 kr.= 0,07 kr.

I det lange løb vil spilleren derfor have et underskud som i gennemsnit er på ca. 7 øre pr. spil. Man siger at spillerens *forventning* til spillet er et underskud på ca. 7 øre for hvert indskud på 1 kr. De penge spilleren mister, vinder banken. Bankens forventning til spillet er derfor et overskud på ca. 7 øre for hver krone der indskydes af spilleren, dvs. et overskud på 7% af omsætningen.

Spilleren ved nu hvor dyrt det i det lange løb vil være at deltage i spillet. Han kan regne med at han i gennemsnit bliver 7 øre fattigere for hvert spil han er deltager i. Om han er villig til at gå ind på disse vilkår, kan han kun selv afgøre. Måske han gerne ofrer de 7 øre for at opleve spillets spænding.

Øvelse 2
Foretag en gevinstberegning for 216 udførelser af "Spil på sekseren" når gevinstreglerne ændres til følgende:

3 seksere: Gevinst 50 kr.

2 seksere: Gevinst 5 kr.

1 sekser: Gevinst 1 kr.

Beregn dernæst spillerens forventning til spillet når indskuddet pr. spil stadig er 1 kr.

Øvelse 3
Foretag en gevinstberegning for 216 udførelser af "Spil på sekseren" når indskuddet pr. spil ændres til 2 kr., og når gevinstreglerne er:

3 seksere: 100 kr.

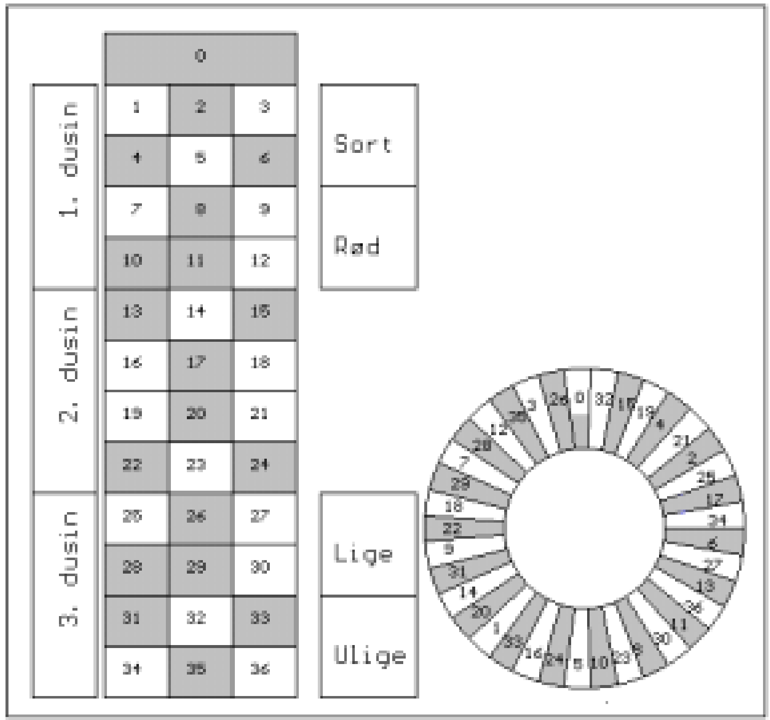
2 seksere: 5 kr.

1 sekser : 2 kr.

Beregn dernæst spillerens forventning til spillet.

Øvelse 4
Opstil gevinstregler for "Spil på sekseren" som bevirker at spillerens forventning til spillet bliver 0 kr. Spillet er da et *neutralt spil*, hverken spiller eller spillebanken kan i det lange løb regne med overskud. ✦

4.3 Roulette
Vi skal nu se på Roulette, et af de mest kendte kasinospil. På rouletten findes der 37 felter, med numrene fra 0 til 36. Af de 37 felter er 18 røde og 18 er sorte. Et af felterne, det der har nr. 0, er hverken rødt eller sort. - På næste side ser du en plan over fordelingen af rødt og sort på roulettens felter.



På tegningen er de røde felter angivet med en hvid markering. Planen viser altså fx at felterne 1 og 3 er røde, medens felterne 2 og 4 er sorte. Som du kan se er fordelingen af røde og sorte felter lidt uregelmæssig, men der er som nævnt lige mange af hver slags. Feltet 0 er grønt.

I roulettespil kan man spille ("gøre sin indsats") på flere forskellige måder. Vi vil her nøjes med at se på seks muligheder.

Indsats på nummer
Man kan spille på ét af spillebordets 37 numre. Man lægger da sit spillemærke inde i feltet for det pågældende nummer. Hvis nummeret kommer ud modtager spilleren en gevinst på 36 gange indsatsen. En

spiller der har sat 10 kr. på det nummer der kommer ud, vil altså modtage 360 kr. i gevinst. Banken beholder hans indsats på 10 kr. Spilleren har haft et overskud på 350 kr. Hvis hans nummer ikke kommer ud har han et underskud på 10 kr.

Indsats på "treer"
Man spiller her på tre af spillebordets felter. For eksempel på numrene 7,8 og 9. Spillemærket placeres da som vist på figuren:

7	8	9

Man kan kun spille på tre numre der er beliggende på denne måde, altså i felter ved siden af hinanden. Man kan således spille på nr. 7, 8 og 9 med ét spillemærke, men ikke på nr.8, 9 og 10.

Hvis et af de tre numre i treeren kommer ud modtager spillerens en gevinst på 12 gange indsatsen (og banken beholder hans indsats).

Indsats på "sekser"
Man spiller i dette tilfælde på seks af spillebordets felter, nemlig på to nabo-treere. Spiller man fx på sekseren bestående af numrene 4, 5, 6, 7, 8 og 9, skal spillemærket placeres således:

4	5	6
7	8	9

Hvis et af de seks numre i sekseren kommer ud modtager spilleren en gevinst på 6 gange indsatsen.

Indsats på dusin
Man spiller her på 12 af spillebordets felter, enten på numrene 1-12 (1. dusin), 13-24 (2.dusin) eller 25-36 (3.dusin). Spillemærket placeres ved indsats på dusin i et af de tre felter i spillebordets venstre side. Hvis et af de 12 numre i dusinet kommer ud modtager spilleren en gevinst på 3 gange indsatsen.

Indsats på Lige/Ulige
Ved en indsats på feltet LIGE spiller man på alle spillebordets lige numre, 0 dog undtaget. Hvis et af de lige numre kommer ud modtager spilleren en gevinst på 2 gange indsatsen. En tilsvarende gevinst gælder for indsats på feltet ULIGE. Bemærk at 0 hverken hører med til LIGE eller ULIGE.

Indsats på Sort/Rød
Ved en indsats på feltet SORT spiller man på alle spillebordets sorte felter. Hvis et af de sorte numre kommer ud modtager spilleren en gevinst på 2 gange indsatsen. En tilsvarende gevinstregel gælder for indsats på feltet RØD. Kommer nummeret 0 ud er der kun gevinst til de spillere der har at deres indsats direkte på dette nummer. Hverken Sort, Rød, Lige eller Ulige giver gevinst når 0 kommer ud.

På følgende side er en lille oversigt over gevinster og overskud ved de seks måder at gøre indsats på (indsatsen er sat til 1 kr.).

Indsat 1 kr. på	Gevinst	Overskud
Nummer	36 kr.	35 kr.
Treer	12 kr.	11 kr.
Sekser	6 kr.	5 kr.
Dusin	3 kr.	2 kr.
Lige/Ulige	2 kr.	1 kr.
Sort/Rød	2 kr.	1 kr.

Hvis ens indsats ikke fører til gevinst er indsatsen tabt. Spillet vil da give spilleren et underskud på 1 kr.

Øvelse 5
Tre spillere A, B og C gør følgende indsatser i et roulettespil:

A: 50 kr. på nummer 14 og 50 kr. på RØD

B: 50 kr. på treer (13, 14, 15) og 50 kr. på 1.dusin

C: 30 kr. på 2.dusin, 50 kr. på sekser (13,14,15,16,17,18) og 20 kr. på ULIGE.

Beregn for hvert af følgende fire spil hvilken gevinst de tre spillere får:

1. 14 kommer ud
2. 13 kommer ud
3. 15 kommer ud
4. 18 kommer ud ✦

I chancespil hvor der spilles mod en spillebank kan man altid regne med at spillerens forventning til spillet vil have en negativ værdi. Spillet vil altså i det lange løb give overskud til spillebanken. De forventede værdier kan imidlertid variere meget fra chancespil til chancespil. I nogle chancespil er de nær ved 0, og spilleren kan derfor regne med små underskud pr. indskudt krone. I andre er de ret langt fra 0, her må spilleren altså regne med at hans startkapital forsvinder i et hastigere tempo.

Vi vil nu se på roulettespillet. Vi vil foretage en gevinstberegning for en spiller som sætter sin indsats på 1 kr. på *Nummer*. Hvis nummeret kommer ud modtager han en gevinst på 36 kr. Der er 37 numre på rouletteskiven, og sandsynligheden for at spillerens nummer kommer ud er 1/37. I det lange løb vil han altså vinde én gang for hver 37 spil.

Gevinstberegningen for 37 spil ser således ud:

Gevinst	Sandsynlighed	Antal spil af 37	Gevinst i alt
36 kr.	1/37	1	36 kr.
Samlet gevinst i 37 spil:			36 kr.

I 37 spil har spilleren en gevinst på 36 kr., og hans udgifter til indskud er 37 kr. Underskuddet i 37 spil er derfor kun 1 kr. Spillerens forventning til spillet er altså et underskud på 1/37 kr.= 2,7 øre. Spilleren må således regne med et underskud på ca. 2,7 øre for hver krone han sætter ind.

Blandt kasinospil er roulette et af dem der giver spilleren de bedste betingelser. Kun enkelte andre spil kan tilbyde bedre spillerforventninger. - De 2,7 øre pr. krone er hvad spillebanken må leve af, altså 2,7 % af spillets omsætning. Herfra går dog en afgift til staten.

Øvelse 6
Vis ved gevinstberegninger at en spiller der spiller på *Treer* og en spiller der spiller på *Dusin* har samme økonomiske forventning til roulette-spillet som den spiller der sætter sin indsats på *Nummer*. - Beregn også forventningen for en spiller som sætter sin indsat på *Rød*.✦

Den form for roulette vi her har beskrevet er den såkaldte *europæiske roulette*. Den amerikanske roulette er udformet med 38 muligheder i stedet for de 37 på den europæiske roulette. På den amerikanske findes ud over feltet 0 også feltet 00, *dobbelt nul*. Dette ekstra felt bevirker at spillerens vinderchancer er ringere end på den europæiske roulette. Når den amerikanske roulette er populær i danske kasinoer kan det altså ikke begrundes i gevinstberegninger.

Øvelse 7
Gennemfør en gevinstberegning for en spiller som sætter 1 kr. på *Nummer* i en amerikansk roulette. Antag at der spilles 38 spil. (Udbetalingsreglerne er de samme som ved den europæiske roulette.)✦

Programmet ROULETTE
I INFA-programmet KASINO findes et program til efterligning af roulette-spil. Med dette spil kan du udføre enkeltspil, eller en serie af spil, eller du kan spille indtil din medbragte kapital er opbrugt.

Spillet, som er en ny udgave af det roulettespil der findes i pakken DATAMODELLER, kræver vga-grafik og mus.

4.4 Monte Carlo med to terninger
I dette spil gætter spillerne på hvad summen af øjentallene vil blive i et kast med to terninger. Spillerne kan gøre deres indsat på en spilleplade:

<table>
<tr><td>2
35 for 1</td><td>3
17 for 1</td><td>4
11 for 1</td><td>5
8 for 1</td></tr>
<tr><td colspan="4">6
6 for 1 | 7
5 for 1 | 8
6 for 1</td></tr>
<tr><td>9
8 for 1</td><td>10
11 for 1</td><td>11
17 for 1</td><td>12
35 for 1</td></tr>
</table>

Hvis kastet resulterer i at terningerne tilsammen viser 8 øjne vil de spillere der har sat deres indskud på felt 8 få gevinst. Af spillepladen fremgår at feltet 8 giver 6 kr. for 1 kr. En spiller der har sat 1 kr. på felt 8 vil altså få udbetalt 6 kr. i gevinst hvis 8 kommer ud. Hans indskud på 1 kr. går til spillebanken, overskuddet for spilleren vil altså i dette tilfælde være 5 kr.

En spiller der har at 5 kr. på felt 12 vil få udbetalt 5x35 kr., dvs. 175 kr., hvis 12 kommer ud. Han har altså et overskud på 170 kr. i dette spil. Hvis 12 ikke kommer ud vil han have et underskud på 5 kr.

Vi vil nu foretage gevinstberegninger for spillet. Vi har tidligere beregnet sandsynlighederne for de forskellige øjental der kan forekomme i et kast med to terninger:

Øjental	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sandsynlighed	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Gevinstberegninger kan nu let foretages. Vi ser på en spiller der sætter 1 kr. på felt 8. - Da øjentallet 8 har en sandsynlighed på 5/36 vil 8 i det lange løb komme ud 5 gange for hver 36 spil. Gevinstberegningen for 36 spil giver nu:

Gevinst	Sandsynlighed	Antal spil af 36	Gevinst i alt
6 kr.	5/36	5	30 kr.

Samlet gevinst i 36 spil: 30 kr.

I 36 spil har spillerens indskud været 36 kr. Underskuddet er derfor 6 kr., dvs. 6/36 kr. pr. spil, altså ca. 17 øre. Spilleren kan altså regne med i det lange løb at miste ca. 17 øre af hver krone han spiller for.

Vi gennemfører også gevinstberegningen for en spiller som sætter 1 kr. på felt 9. Vi får her:

Gevinst	Sandsynlighed	Antal spil af 36	Gevinst i alt
8 kr.	4/36	4	32

Samlet gevinst i 36 spil: 32 kr.

Denne spiller vil kun have et underskud på 4 kr. i de 36 spil. Underskuddet pr. spil er derfor her 4/36., dvs. ca. 11 øre. Spillerens forventning til spillet er altså bedre ved spil på felt 9 end på felt 8.

Set ud fra et rent økonomisk synspunkt er det derfor klogere at spille på felt 9 end på felt 8. Men der kan jo være andre forhold der er afgørende for hvor spilleren placerer sin indsats. Felt 8 kan forventes at komme ud oftere end felt 9, og det kan jo tænkes at spilleren gerne betaler lidt ekstra for den oplevelse at se sit nummer komme ud.

Øvelse 8

Foretag en gevinstberegning for de øvrige felter på spillepladen, og find de felter hvor spillerens indsats i det lange løb vil føre til mindst underskud for ham.

4.5 Yatzy

Vi går ud fra at du kender så meget til Yatzy-spillet at det ikke er nødvendigt at gennemgå reglerne for spillet. Blot skal vi nævne at vi ser på den mest almindelige type af Yatzy-spil, den der spilles med fem terninger.

Maximum points			
Enere	5		
Toere	10		
Treere	15		
Firere	20		
Femmere	25		
Seksere	30		
Sum			
Bonus	50		
1 par	12		
2 par	22		
3 ens	18		
4 ens	18		
Høj	20		
Lav	15		
Fuldt hus	28		
Chance	30		
YATZY	50		
Sum			

Undervejs i Yatzy-spillet kan der opstå mange forskellige chancesituationer, også nogle som fører til ret indviklede beregninger af sandsynligheder. Vi skal derfor her nøjes med at se på nogle få eksempler hvor vi kan klare os med mere enkle beregninger.

Et par

Denne situation foreligger når to eller flere af terningerne viser samme øjental. Enhver Yatzy-spiller véd at "Et par" er et af de letteste slag i spillet.

Vi vil nu se hvad sandsynligheden for at slå "Et par" er. Denne sandsynlighed beregner vi lettest ved at se på hændelsen "Terningerne viser fem forskellige øjental". Hændelsen "Fem forskellige" er nemlig resthændelse til hændelsen "Et par". Når terningerne ikke viser "Et par", vil de jo netop vise "Fem forskellige".

Ved beregningen af sandsynligheden for "Fem forskellige" kan vi benytte tællemetoden fra afsnit 1. Først beregner vi antallet af udfald i udfaldsrummet for de fem terningkast:

F1:	F2:	F3:	F4:	F5:
1.terning kastes 6 grene	2.terning kastes 6 grene	3.terning kastes 6 grene	4.terning kastes 6 grene	5. terning kastes 6 grene

I alt vil udfaldsrummet indeholde 6x6x6x6x6 udfald, dvs. 7776 udfald.

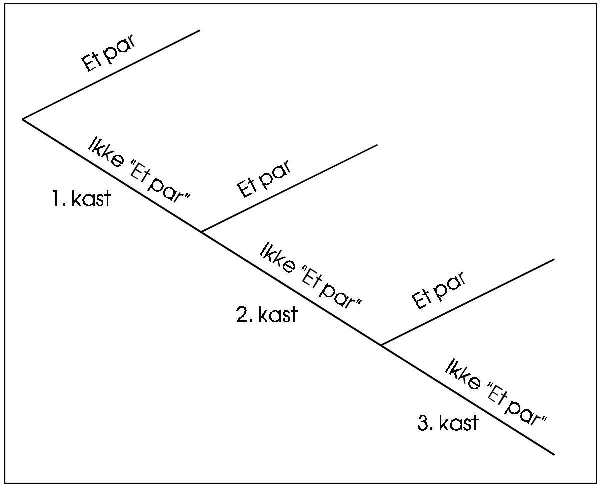
Vi ser nu på hændelsen "Terningerne viser fem forskellige øjental". Antallet gevinstudfald for denne hændelse tæller vi også ved forgreningsmetoden:

F1:	F2:	F3:	F4:	F5:
1. terning kastes 6 grene	2. terning kastes 5 grene	3.terning kastes 4 grene	4.terning kastes 3 grene	5.terning kastes 2 grene

Antallet af gevinstudfald for hændelsen "Fem forskellige øjental" er 6x5x4x3x2, dvs. 720 udfald.

Sandsynligheden for hændelsen "Fem forskellige" er derfor: 720/7776 = 0,093. Der er altså kun ca. 9% chance for at et kast med fem terninger giver fem forskellige øjental. Men så er der jo en chance på ca. 91% for at mindst 2 af terningerne viser det samme. Chancen for at slå "Et par" i et kast med fem terninger er derfor ca. 91%. Det er altså ikke så mærkelige at "Et par" regnes for et let slag i Yatzy spillet.

I Yatzy har man oven i købet mulighed for at udføre tre kast med de fem terninger hvis det skulle være nødvendigt. Hvis spilleren ikke opnår "Et par" i første kast kan han altså forsøge i endnu et kast, og skulle dette heller ikke give gevinst har han muligheden i et tredje kast. Sandsynligheden for at det lykkes ham at få "Et par" undervejs i de tre kast er meget stor. Den kan udregnes ved hjælp af chancetræ:



Øvelse 9
Sæt sandsynligheder på træets nederste gren, og udregn derefter sandsynligheden for at det lykkes at slå "Et par" i løbet af tre kast med fem terninger. ✦

Nu er det ikke alle kast med "Et par" der er lige gode. Spilleren vil sigte mod at få "Et par" som består af to seksere. Vi vil derfor beregne sandsynligheden for at få "Et sekserpar". Igen kan vi se på resthændelsen til hændelsen "Et sekserpar". - Når der ikke opnås to seksere i kastet med de fem terninger, vil der opnås enten ingen sekser, eller én sekser. Vi kan nu let tælle op hvor mange udfald i udfaldsrummet der svarer til hændelserne "Ingen sekser" og til hændelsen "Én sekser".

For hændelsen "Ingen sekser" kan vi benytte følgende optælling:

F1:	F2:	F3:	F4:	F5:
1.terning kastes 5 grene	2.terning kastes 5 grene	3.terning kastes 5 grene	4.terning kastes 5 grene	5.terning kastes 5 grene

Antallet af gevinstudfald for hændelsen "Ingen sekser" er 5x5x5x5x5, dvs. 3125 udfald.

Ved optællingen af gevinstudfald for hændelsen "Én sekser" udvælger vi først den terning der skal vise 6, dernæst kastes de øvrige 4 terninger.

1. forgrening	2.-5.forgrening
En terning udvælges	De fire terninger kastes Ingen af dem må vise 6 øjne
5 grene	5x5x5x5 grene

Antallet af gevinstudfald for hændelsen "Én sekser" er 5x5x5x5x5, igen 3125 udfald. Det er altså præcist lige så svært at slå "Ingen sekser" som at slå "Én sekser" i et kast med fem terninger.

Af udfaldsrummets 7776 udfald har vi nu at 3125 svarer til "Ingen sekser" og at 3125 svarer til "Én sekser". De øvrige, dvs. 7776 - 3125 - 3125 = 1526 udfald, må derfor svarer til at der opnås mindst to seksere. Sandsynligheden for et sekserpar i et kast med fem terninger er derfor: 1526/7776 = 19,6%

Med de tre kast spilleren har til rådighed vil hans chance for at slå "Et sekserpar" i Yatzy være over 50%. Udregningen af sandsynligheden vanskeliggøres her af at spillereglerne tillader at en sekser opnået i et kast kan "ligge over". Hvis spilleren opnår én sekser i første kast, vil han derfor kaste videre med kun fire terninger i jagten på endnu en sekser.

Øvelse 10

I udfaldsrummet med de 7776 udfald for et kast med fem terninger er der 1526 gevinstudfald for hændelsen "Et sekserpar", og der vil selvfølgelig også være 1526 gevinstudfald for hændelsen "Et femmerpar". Hvorfor er der ikke 2x1526 gevinstudfald for hændelsen "Et par af enten femmere eller seksere"?

Tre ens, Fire ens og Yatzy

Disse tre slag hører til de svære i Yatzy-spillet. Af de 7776 udfald i udfaldsrummet er der kun 6 der er gevinstudfald for hændelsen "Fem ens", altså for "Yatzy". Det er de seks udfald der svarer til at alle terninger viser 1, eller at alle terninger viser 2, osv. Sandsynligheden for at slå "Yatzy" i ét slag med fem terninger er derfor kun 6/7776, dvs. ca. 1/1300, eller 0,08%. "Yatzy" i ét slag vil altså i det lange løb kun kunne forventes at forekomme i ét ud af hver 1300 slag.

Ved beregningen af sandsynligheden for "Fire ens" kan vi benytte en optælling efter forgreningsmetoden. Vi benytter følgende forgreninger:

F1: De fire terninger der skal vise samme øjental udvælges.

F2: Et øjental til de fire terninger vælges.

F3: Et øjental til den sidste terning vælges.

I 3. forgrening vælger vi til den sidste terning et andet øjental end det de fire terninger viser. Det vi tæller op er altså gevinstudfaldene for hændelsen "Fire ens, men ikke fem ens". Denne hændelse kan vi også kalde "Netop fire ens".

I de tre forgreninger har vi følgende antal grene:

F1:	F2:	F3:
Af 5 udvælges 4	Et øjental vælges	Et øjental vælges
K(5,4)= 5 grene	6 grene	5 grene

Det samlede antal gevinstudfald for hændelsen "Netop fire ens" er 5x6x5, dvs. 150. Sandsynligheden for hændelsen "Netop fire ens" er da: 150/7776 = 1,9%.

Ved en tilsvarende optælling beregner vi nu sandsynligheden for hændelsen "Netop tre ens". Vi benytter her følgende forgreninger:

F1: De tre terninger der skal vise samme øjental udvælges.

F2: Et øjental til de tre terninger vælges.

F3: Et øjental til den ene af de to resterende terninger vælges.

F4: Et øjental til den anden af de to resterende terninger vælges.

I 3. og 4. forgrening må vi ikke vælge det øjental der er udvalgt til de tre terninger der viser ens. Derimod må vi godt vælge samme øjental i 3. og 4. forgrening (vi medregner altså de udfald der svarer til hændelsen "Fuldt hus").

I de fire forgreninger har vi følgende antal grene:

F1:	F2:	F3:	F4:
Af 5 udvælges 3	Et øjental vælges	Et øjental vælges	Et øjental vælges
K(5,3)= 10 grene	6 grene	5 grene	5 grene

Det samlede antal gevinstudfald for hændelsen "Netop tre ens" er 10x6x5x5, dvs. 1500. Sandsynligheden for "Netop tre ens" er da: 1500/7776 = 19,3%.

I Yatzy betyder "Fire ens" i virkeligheden "Fire eller fem ens", og "Tre ens" betyder "Tre, fire eller fem ens". Af vore udregninger har vi følgende antal af gevinstudfald:

Fem ens :	6	gevinstudfald
Netop fire ens:	150	gevinstudfald
Netop tre ens :	1500	gevinstudfald

Hændelsen "Fire ens" i Yatzy har i alt 150 + 6 gevinstudfald, og hændelsen "Tre ens" har 1500 + 150 + 6 gevinstudfald blandt udfaldsrummets 7776 udfald.

Øvelse 11

Beregn sandsynligheden for at slå "Fuldt hus" i ét slag med fem terninger.

Øvelse 12

Beregn sandsynligheden for at få "To par, men ikke fuldt hus" i ét slag med fem terninger.

Benyt fx følgende optælling:

F1: Udvælg de to øjental som skal benyttes til de to terningpar.

F2: Udvælg det terningpar som skal vise det højeste af de to valgte øjental.

F3: Udvælg det terningpar (blandt de resterende tre terninger) som skal vise det mindste af de to valgte øjental.

F4: Udvælg et øjental til den sidste terning.

Beregn dernæst sandsynligheden for at slå "To par" i ét slag. (I Yatzys "To par" medregnes "Fuldt hus".) ✦

Programmet YATZY-X
Med INFA-programmet YATZY-X kan du efterligne Yatzy-spillet. I programmet findes mulighed for at få foretaget chanceberegninger under spillet, således at en spiller kan træffe sine valg på grundlag af chancevurderinger.

4.6 Backgammon: Farlige placeringer

I Backgammon er spillernes dygtighed af afgørende betydning for spillets udfald. Men brikkernes gang styres jo i nogen grad af terningkast, og derfor vil der også i Backgammon være situationer hvor chanceberegninger kan være til hjælp.

En situation af den art foreligger når en spiller skal overveje hvilke placeringer han tør give en isoleret brik. En sådan brik, der også kaldes en blottet brik, kan nemlig tages af modparten. Det kræver blot at modparten i sit næste kast får mulighed for at rykke det rigtige antal felter frem. Og da denne fremrykning styres af et kast med to terninger vil der være forskel på placeringernes farlighed. Nogle placeringer vil være ret sikre medens andre vil være meget risikable.

Spilleren må altså overveje hvor han tør placere sin blottede brik. Placerer han den for eksempel i en afstand af 10 felter fra modpartens brikker, kan han føle sig ret sikker. Modparten kan kun rykke en brik 10 felter frem ved et terningkast som viser øjnene 6-4, 4-6, eller 5-5. Da der i alt er 36 mulige udfald ved et kast med to terninger, er modpartens chance for at slå den blottede brik kun 3/36.

Er den blottede brik derimod placeret i en afstand af 8 felter fra modpartens brikker, er situationen mindre gunstig. Modparten kan opnå øjentallet 8 ved følgende terningkast: 2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6-2. Endvidere kan også kastet 2-2 bruges. I Backgammon gælder nemlig "to ens" som "fire ens". Kastet 2-2 gælder derfor som 2-2-2-2. Alt i alt er der altså 6 af de 36 mulige udfald der kan give øjentallet 8. Modpartens chance for at slå den blottede brik er derfor nu 6/36.

Endnu farligere er for eksempel en placering i en afstand af 4 fra modpartens brikker. Øjentallet 4 kan fremkomme på tre måder som

en sum af øjentallene på de to terninger: 1-3, 2-2, 3-1. Men herudover fremkommer 4 også i alle de kast hvor blot én af terningerne viser 4. Det er nemlig tilladt at flytte en brik efter det øjental som blot én af terningerne viser. Af brugbare kast findes derfor også følgende:

1-4 4-1

2-4 4-2

3-4 4-3

5-4 4-5

6-4 4-6 samt 4-4

Af de 36 mulige terningkast vil 11 indeholde mindst én firer. Endelig kan øjentallet 4 opnås ved 1-1, der jo tæller som 1-1-1-1.

Alt i alt vil øjentallet 4 fremkomme ved 15 af de 36 mulige terningkast. Modpartens chance for at slå den blottede brik er derfor i dette tilfælde 15/36.

De beregninger der er foretaget her forudsætter at der ikke på strækningen mellem den blottede brik og modpartens brikker findes felter som er blokerede af brikker. Hvis det er tilfældet kan det ske at nogle af de nævnte kast ikke kan benyttes. Men det vil spilleren kunne tage med i sine overvejelser i den aktuelle situation.

Øvelse 13
Lav en tabel som viser hvor farlig de forskellige placeringer af den blottede brik er. Tabellen skal omfatte afstande fra 1 felt op til 12 felter.

4.7 Poker

I kortspil foreligger der en chancesituation ved fordelingen af kortene. Vi skal her se på nogle eksempler fra Poker, et af de mest populære kortspil. Vi ser på den form for Poker som spilles med et fuldt kortsæt, altså 52 kort, og uden jokere. Til hver spiller gives fem kort.

I spillet interesserer man sig for følgende kortkombinationer, "poker-hænder":

Et par
To kort med samme værdi (f.eks. to konger), og tre kort med tre forskellige andre værdier.

To par
To kort med én værdi, to kort med en anden værdi, og ét kort med en tredje værdi.

Tre ens
Tre kort med samme værdi, og to kort med to forskellige andre vær-dier.

Straight
Fem kort med værdier i rækkefølge (fx 8, 9, 10, Kn, D). Es-kortet kan benyttes i begge ender af kortrækken: Es, 2,3,4,5 og 10,Kn,D,K,Es. Kortene i en straight må gerne være af forskellig farve.

Flush
Fem kort af samme farve (fx fem hjerterkort).

Fuldt hus
Tre kort med én værdi, og to kort med en anden værdi.

Fire ens
Fire kort med samme værdi.

Pokerhænderne er her opstillet efter stigende sværhedsgrad. De let-teste, dvs. de der forekommer hyppigst, er de øverste i listen. Vi vil nu beregne sandsynligheden for nogle af disse pokerhænder.

Først vil vi se hvor mange forskellige udvalg på 5 kort der kan fore-komme i spillet. Dette antal kan vi let bestemme ved hjælp af forgre-ningsmetoden. Vi får her:

Af 52 udtages 5. Antal udvalg: K(52,5) = 2 598 960

Muligvis kan din lommeregner ikke klare udregningen af

$$K(52,5) = \frac{52x51x50x49x48}{5x4x3x2x1}$$

Tallet foroven på brøkstregen får nemlig mere end otte cifre. Men hvis du forkorter inden du ganger ud, vil lommeregneren kunne klare det. Du kan også benytte programmet KOMBINAT til udregningen.

Der er altså mulighed for over 2½ million forskellige kortudvalg i Po-ker. Disse udvalg vil vi betragte som ligevægtede. De har altså alle samme chance for at forekomme.

Vi behøver nu blot at beregne hvor mange udvalg der svarer til de pokerhænder vi er interesseret i. Vi starter med de sjældne hændelser.

Fire ens
Antallet af udvalg af denne type tæller vi op ved hjælp af forgrenings-metoden. Først udvælger vi den værdi som de fire kort skal have (der er 13 værdier at vælge imellem: Es, 2,3,4,...,10,Kn,D,K). Derefter vælger vi blandt de øvrige 48 kort et femte kort til udvalget:

1.forgrening	2.forgrening
En værdi vælges til de fire kort	Et femte kort vælges
13 grene	48 grene

Antallet af udvalg er 13x48, dvs. 624. Af de 2 598 960 udfald i udfalds-rummet er altså kun 624 gevinstudfald for hændelsen "Fire ens". Denne hændelses sandsynlighed er derfor meget lille, kun ca. 0,02%. "Fire ens" kan i det lange løb kun forventes at forekomme i én ud af hver 4165 pokerhænder.

Fuldt hus
Ved optællingen kan vi benytte følgende forgreninger:

F1: En værdi til de tre kort vælges (blandt 13 værdier)

F2: Tre kort af den valgte værdi udtages (blandt 4 kort)

F3: En værdi til de to kort vælges (blandt 12 værdier)

F4: To kort af den valgte værdi udtages (blandt 4 kort).

Antallene af grene i de fire forgreninger bliver:

F1:	F2:	F3:	F4:
Af 13 udtages 1	Af 4 udtages 3	Af 12 udtages 1	Af 4 udtages 2
13 grene	K(4,3)=4 grene	12 grene	K(4,2)=6 grene

Antallet af udvalg er 13x4x12x6, dvs. 3744. Hændelsen "Fuldt hus" har dermed en sandsynlighed der er seks gange så stor som sandsynligheden for hændelsen "Fire ens". Men sandsynligheden er dog kun ca. 0,14%. "Fuldt hus" kan i det lange løb forventes at forekomme i én ud af hver 694 poker-hænder.

Flush
Ved optællingen kan her benyttes følgende forgreninger:

1.forgrening: En kortfarve vælges

2.forgrening: 5 kort af den valgte farve udtages.

Vi har da:

F1:	F2:
Af 4 udvælges 1	Af 13 udtages 5
4 grene	K(13,5) = 1287 grene

Antallet af udvalg er 4x1287, dvs. 5148. Sandsynligheden for "Flush" er dermed ca. 0,20%. I det lange løb vil én ud af hver 505 poker-hænder give "Flush".

Straight
I opstillingen af kortværdier:

Es-2-3-4-5-6-7-8-9-10-Kn-D-K-Es

skal vi udtage fem på hinanden følgende værdier. Der er 10 valg, det første går fra Es til 5, det næste fra 2 til 6, det næste fra 3 til 7, osv. I hvert af disse valg skal der herefter vælges farve til de fem kort. Der er ved hvert kort fire valgmuligheder. Vi kan derfor tælle antallet af Straight-hænder ved følgende forgreninger.

F1: Fem på hinanden følgende værdier udvælges

F2: Der vælges farve til det første af de valgte kort.

F3: Der vælges farve til det andet af de valgte kort.

F4: Der vælges farve til det tredje af de valgte kort.

F5: Der vælges farve til det fjerde af de valgte kort.

F6: Der vælges farve til det femte af de valgte kort.

Antallene bliver her:

1.forgrening	2.-6.forgrening
10 grene	4 grene i hver forgrening

Antallet af udvalg er 10x4x4x4x4x4 = 10240. Sandsynligheden for "Straight" er ca. 0,39%. I det lange løb vil én ud af hver 254 poker-hænder give "Straight".

Vi har nu beregnet sandsynlighederne for de fire mest sjældne poker-hænder. Sandsynlighederne for de mere almindeligt forekommende hænder skal du beregne i de tre næste øvelser.

Øvelse 14

Beregn sandsynligheden for "Tre ens". Ved optællingen af gevinstud-fald kan følgende forgreninger benyttes:

F1: En værdi til de tre kort udvælges

F2: Tre kort af den valgte værdi udvælges

F3: To andre værdier udvælges til de sidste to kort.

F4: Et kort af hver af de to værdier udvælges.

Øvelse 15

Beregn sandsynligheden for "To par". Ved optællingen af gevinstudfald kan følgende forgreninger benyttes:

F1: To værdier udvælges.

F2: To kort af den ene af de valgte værdier udvælges.

F3: To kort af den anden af de valgte værdier udvælges

F4: Et femte kort udvælges.

Øvelse 16

Beregn sandsynligheden for "Et par". Ved optællingen af gevinstudfald kan følgende forgreninger benyttes:

F1: En værdi udvælges

F2: To kort af den valgte værdi udvælges.

F3: Tre andre værdier udvælges.

F4 - F6: Et kort af hver af de tre værdier udvælges.

Øvelse 17

Der findes kortfordelinger som på én gang er både "Straight" og "Flush". En sådan pokerhånd kaldes "Straight Flush". Tæl op hvor mange "Straight Flush" der findes, og beregn dernæst denne poker-hånds sandsynlighed.

Øvelse 18

En kortfordeling som ikke hører hjemme blandt nogen af pokerhæn-derne fra "Et par" til "Fire ens" kaldes "Nix". Beregn sandsynligheden for "Nix". ✦

Somme tider spilles Poker med et ekstra kort, en joker. Jokeren kan gælde for et hvilket som helst af de øvrige kort. Man kan altså have "Fire ens" med tre 7'ere og en joker. Og enhver spiller der har en jo-ker på hånden har automatisk "Et par", da jokeren jo udgør et par sam-men med ethvert kort. De chanceberegninger vi har gennemført gæl-der kun for joker-fri Poker. De forskellige pokerhænders chancer æn-drer sig noget når der spilles med joker. Og i listen over pokerhæn-dernes sværhedsgrad må "To par" og "Tre ens" bytte plads. Med en joker i spillet er det lettere at få "Tre ens" end at få "To par".

Vore chanceberegninger gælder i øvrigt kun for den indledende kort-fordeling i spillet. I Poker kan spillerne bede om at få et eller flere af de givne kort byttet. En spiller der efter kortfordelingen sidder med

"Et par" kan derfor bede om at få tre kort erstattet med tre nye kort. Derved har han chance for at opnå en bedre hånd, fx "Tre ens" eller "To par", eller endnu bedre hænder.

Programmet BEDRE

Der findes en terningudgave af Poker, med en række hændelser som svarer til dem der er fastlagt for kort-udgaven. De er beskrevet nærmere i opgave 15 i næste afsnit.

INFA-programmet BEDRE efterligner Poker i terningudgaven. Ved hjælp af programmet kan man under spillet få udført en beregning som viser hvilke chancer der er for at opnå et bedre resultat end det modspilleren har opnået.

4.8 Lotterier

Overalt i verden er lotterier en populær form for spil, og det gælder især de lotterier hvor præmierne består af pengebeløb. Næsten ethvert land i den vestlige verden - og nogle i den østlige - har et statsligt lotteri. I Danmark findes Klasselotteriet som begyndte sin virksomhed i 1754.

Lotterier er rene chancespil, her er spillererfaring uden betydning. Indsatsen i spillet kan kun gøres på én måde: ved køb af en lodseddel. I mange lotterier kan man vælge imellem hele, halve, kvarte eller ottendedele sedler. Ved at vælge "brøksedler" i stedet for en hel seddel kan man sprede sin indsats ud over flere af lotteriets numre. Derved har man større chance for at få gevinst, men en eventuel gevinst er selvfølgelig også mindre end den ville have været hvis den havde ramt en hel seddel. I Klasselotteriet er den største gevinst for tiden 4 millioner kroner, og der spilles på 210 000 numre. En spiller der har en hel seddel vil derfor have en chance på 1/210 000 for at vinde den store gevinst. Vi kan udtrykke det således: I gennemsnit bør han i løbet af 210 000 lotterier én gang vinde en gevinst på 4 millioner kroner.

En spiller der spiller på fire numre, hver med en kvart seddel vil få en gevinst på 1 million kr. hvis den store gevinst falder på et af hans numre. Han har altså en chance på 4/210 000 for at vinde 1 million kr. I gennemsnit bør han i løbet af 210 000 lotterier derfor 4 gange få en gevinst på 1 million kr.

De to spilleres udbytte af spillet vil således i det lange løb blive det samme. Men spilleren med de kvarte sedler vil - i gennemsnit - oftere opleve at få gevinst.

Hvis man skal vurdere om et lotteri er værd at deltage i, kan man se på hvor stor en del af spilleindsatsen der går tilbage til spillerne i form af gevinster. Der er her stor forskel fra lotteri til lotteri. Mange giver omkring 50% tilbage, men nogle giver kun 40% eller endnu mindre. Det danske Klasselotteri hører til de mindst grådige og giver omkring 63% af spilleindsatsen tilbage i form af gevinster. (Staten tager dog en beskeden del af gevinsten inden den udbetales.) Den matematiske forventning til Klasselotteriet vil derfor være -37 øre pr. indsat krone, altså et tab på 37 øre pr. krone.

Lotterier er således langt dyrere for spillerne end roulettespil, hvor man kan forvente at få ca. 97% af sin indsats tilbage. Men spillere vurderer i almindelighed ikke lotterier på deres tilbagebetaling i det lange løb. Man spiller for at få en af de store gevinster. Lotterier ville dog ikke kunne overleve ved kun at have nogle få store gevinster, de små gevinster må være der for at opmuntre spillerne til fortsatte indsatser.

Øvelse 19

Chancen for at et bestemt nummer udtrækkes i en af Klasselotteriets halvårlige trækninger er ca. 20%. Beregn sandsynligheden for at spiller som spiller på ét nummer, vinder mindst én gang i løbet af de næste to år.

4.9 Enarmede tyveknægte

Spilleautomaten, den enarmede tyveknægt, kom til verden i Californien i 1890'erne. Den har skiftet udseende gennem årene, men dens opbygning er i princippet uændret.

Spilleautomaten har et antal tromler, som oftest tre eller fire, der bevæger sig uafhængigt af hinanden og som hver kan standse i 20 positioner. Positionerne på tromlerne er forsynet med en række symboler. Vi ser til eksempel på en spilleautomat med tre tromler som bærer følgende symboler:

	Tromle 1 Antal	Tromle 2 Antal	Tromle 3 Antal
Stjerne	1	3	1
Klokke	1	3	3
Blomme	5	1	5
Citron	3	0	4
Appelsin	3	6	7
Kirsebær	7	7	0

Gevinstkombinationerne for denne spilleautomat er:

200 spillemærker: Tre stjerner (Jackpot)

75 spillemærker: En stjerne efterfulgt af to klokker

60 spillemærker: Tre klokker

50 spillemærker: To blommer efterfulgt af en klokke

25 spillemærker: Tre blommer

15 spillemærker: Tre appelsiner

8 spillemærker: To kirsebær efterfulgt af stjerne eller klokke

Spilleautomater er her i landet indrettet således at de i det lange løb giver ca. 80% af de indkastede spillemærker tilbage som gevinster. Vi vil nu ved en chanceberegning undersøge om vor spilleautomat opfylder dette krav.

Hver af de tre tromler kan standse i 20 positioner. Antallet af forskellige standsepositioner for tromlerne bliver da ifølge forgreningsmetoden 20x20x20, dvs. 8000. Vi går ud fra at automaten er indrettet således at disse 8000 positioner er lige sandsynlige. Vi arbejder derfor med et udfaldsrum der har 8000 ligevægtede udfald.

Vi vil nu til eksempel beregne hvor mange af disse udfald der fører til udbetaling af en gevinst på 15 spillemærker. Denne gevinst forekommer når tromlerne viser tre appelsiner. På første tromle er der 3 positioner med en appelsin, på anden tromle 6, og på tredje tromle 7. Antallet af positioner med tre appelsiner kan tælles ved hjælp af forgreningsmetoden:

F1:	F2:	F3:
1.tromle	2.tromle	3. tromle
3 grene	6 grene	7 grene

Det samlede antal positioner med tre appelsiner er 3x6x7, dvs. 126. Sandsynligheden for en gevinst på 15 spillemærker er derfor 126/8000, ca. 1,6%. Med andre ord: I det lange løb vil 126 spil ud af 8000 give en gevinst på 15 spillemærker.

På tilsvarende måde kan sandsynlighederne for de øvrige gevinstpositioner beregnes. Af sandsynlighederne kan vi se hvor ofte de forskellige gevinster kan forventes at blive udbetalt. Heraf kan vi så afgøre om spilleautomaten i teorien opfylder det stillede krav om mindst 80% tilbagebetaling af indskuddene.

Øvelse 20
Udfør beregningen af sandsynlighederne for de øvrige gevinstkombinationer på spilleautomaten. Beregn dernæst hvor mange spillemærker der i gennemsnit kan forventes i gevinst pr. 8000 spil. Afgør på dette grundlag om automaten opfylder det stillede krav om tilbagebetaling af mindst 80%.

Øvelse 21
Tæl op hvor mange af de 8000 spil der giver gevinst. Beregn dernæst sandsynligheden for at en spiller får gevinst i sit første spil på spilleautomaten. Og beregn sandsynligheden for at han *ikke* får gevinst i løbet af sine første 5 spil på automaten.

Øvelse 22
Nogle spilleautomater er forsynet med en tæller som viser spilleren hvor mange spil der er foretaget siden sidste Jackpot. Hvor ville du foretrække at spille: På en maskine hvor der er spillet 100 spil siden sidste Jackpot, eller på en maskine hvor der er spillet 5000 spil siden sidste Jackpot?

Programmet TYV
INFA-programmet KASINO indeholder et program som kan benyttes til efterligning af spil der udføres på en spilleautomat, en en-armet tyveknægt.

Programmet kan udføre enkeltspil, serier af spil, og det kan spille indtil en medbragt kapital er spillet op.

4.10 Lotto
I det danske lottospil skal spilleren udvælge 7 tal blandt 35. Hver uge udtrækker Dansk Tipstjeneste syv lottotal og tre såkaldte tillægstal.

Der udbetales gevinster i følgende kategorier:

1. 7 rigtige tal
2. 6 rigtige tal plus et tillægstal
3. 6 rigtige tal uden noget rigtigt tillægstal
4. 5 rigtige tal
5. 4 rigtige tal plus et eller flere tillægstal.

Chancen for at have "7 rigtige" er ikke stor. Det drejer sig her om at beregne på hvor mange måder der kan udvælges 7 tal ud af 35. Dette antal er givet ved:

$$K(35,7) = 6\ 724\ 520$$

Altså næsten 7 millioner muligheder. Af dem er der kun ét udvalg der giver en fuldtræffer. At opnå "7 rigtige" er altså noget der sker i gennemsnit 1 gang for hver 6 724 520 lotto-rækker der udfyldes.

I en uge hvor der indsendes ca. 20 millioner lotto-rækker kan der altså i gennemsnit forventes at være 3 fuldtræffere. Vel at mærke hvis rækkerne udfyldes på grundlag af tilfældigt foretagne valg af tal.

6 rigtige
Vi vil nu beregne chancen for at have seks rigtige tal. Vi ser på hvor mange af de 6 724 520 mulige lotto-rækker der vil indeholde seks, men ikke syv, rigtige tal.

Vi kan tælle op ved hjælp af forgreningsmetoden:

F1: Der udvælges 6 af de 7 vindertal.

F2: Der udvælges ét af de 28 andre tal.

De to optællinger kan forløbe på følgende antal måder:

F1: K(7,6) = 7 måder   F2: 28 måder

Der vil altså være: 7x28 = 196 måder hvorpå en lotto-række kan indeholde seks rigtige.

Nu er præmiekategorien for seks rigtige jo opdelt efter om det 7. tal er et af tillægstallene eller ej. Da der er tre tillægstal og 25 ikke-tillægstal får vi følgende muligheder for de to præmiekategorier:

6 rigtige plus tillægstal: 7x3 måder = 21.

6 rigtige uden tillægstal: 7x25 måder = 175.

Det er således 21 gange lettere at opnå "6 rigtige plus tillægstal" end at opnå "7 rigtige". Og det er 175 gange lettere at opnå "6 rigtige uden tillægstal" end at opnå "7 rigtige".

Blandt en uges 20 millioner spillerækker vil der derfor i gennemsnit kunne forventes:

3 rækker med "7 rigtige"

ca. 60 rækker med "6 rigtige plus et tillægstal"

ca. 500 rækker med "6 rigtige uden tillægstal"

Men der kan udmærket være udsving ud fra disse værdier, afhængig af hvor "skævt" et resultat der kommer ud af udtrækningen af de syv vindertal. Mange udfylder jo lottorækker ved hjælp af fødselsdage og andre personlige data, og det er ikke nogen garanti for "tilfældige udvalg".

5 rigtige

Antallet af muligheder for at have fem rigtige findes ved følgende optælling:

F1: Der udvælges 5 af de 7 vindertal.

F2: Der udvælges 2 af de øvrige 28 tal.

De to valg kan forløbe på følgende antal måder:

F1: K(7,5) = 21 måder.   F2: K(28,2) = 378 måder.

Alt i alt kan der altså opnås "5 rigtige" på 21x378 måder = 7938 måder.

4 rigtige plus tillægstal

Til sidst vil vi beregne antallet af muligheder for at opnå en lottorække med 4 rigtige tal, og herudover mindst ét tillægstal.

Vi beregner først antallet af måder hvorpå der kan opnås 4 rigtige, uden hensyntagen til tillægstal. Vi benytter her følgende optælling:

F1: Der udvælges 4 tal blandt de 7 vindertal.

F2: Der udvælges 3 tal blandt de 28 andre tal.

For de to antal får vi:

F1: K(7,4) = 35 måder.   F2: K(28,3) = 3276 måder.

Alt i alt: 35x3276 = 114 660 måder.

Men heri er der et stort antal rækker uden rigtigt tillægstal. Vi beregner hvor mange det drejer sig om:

F1: Der udvælges 4 tal blandt de 7 vindertal.

F2: Der udvælges 3 tal blandt de 25 ikke-tillægstal.

For de to antal får vi:

F1: K(7,4) = 35 måder. F2: K(25,3) = 2300 måder.

Alt i alt: 35x2300 = 80500 måder.

Der vil derfor være 114 600 - 80 500 = 34 100 måder, hvorpå der kan vælges tal således at der opnås 4 rigtige plus mindst ét tillægstal.

Vi kan nu opstille en tabel over chancerne i Lotto:

Kategori	*Chance*
7 rigtige	1/ 6 724 520
6 plus tillægstal	21/ 6 724 520
6 uden tillægstal	175/ 6 724 520
5 rigtige	7938/ 6 724 520
4 plus tillægstal	34100/ 6 724 520

Selv den sidste chance er ikke stor: 34100/ 6 724 520 svarer til en chance på ca. 0,5%. I gennemsnit vil én lotto-række ud af 200 derfor give en gevinst i laveste gevinstkategori.

Tilbagebatalingen ved lotto er på 45%, altså ikke særligt imponerende. De øvrige 55% går til afgifter m.m. I det lange løb vil man derfor kun kunne regne med en tilbagebetaling på 45% af det beløb der anvendes på lottospil. Men som nævnt: De fleste tænker ikke på det lange løb, men på det korte. Og her er der jo chancer (ganske vist små chancer) for at opnå en betragtelig gevinst. Det er det der får os til at spille, ikke overvejelser over det lange løb.

Hav tålmodighed!
En spiller der hver uge spiller på 50 lottorækker vil i gennemsnit få:

4 rigtige (+till.)	En gang hver måned
5 rigtige	En gang hver fjerde måned
6 rigtige	En gang hvert 14. år
6 rigtige (+till.)	En gang hvert 123. år
7 rigtige	En gang hvert 2580. år

Er indsatsen ventetiden værd?

Programmet LOD
Ved hjælp af INFA-programmet LOD kan du efterligne lotto-udtrækninger. Her kan du efterprøve beregningen af at der i gennemsnit skal spilles på 200 rækker for at opnå en gevinst i lottospillet.

5. Opgaver

1. Tre ens
I terningspillet "Tre ens" kastes tre terninger. Ved et kast der resulterer i tre ens øjental er spillerens gevinst 5 kr., ved et kast der resulterer i to ens øjental er spillerens gevinst 2 kr., ved et kast der resulterer i tre forskellige øjental gives ingen gevinst. Spillerens indskud ved hvert spil er 1 kr.

1. Beregn sandsynligheden for at et kast resulterer i tre ens øjental.

2. Beregn sandsynligheden for at et kast resulterer i tre forskellige øjental.

3. Beregn sandsynligheden for at et kast resulterer i to ens øjental.

Foretag dernæst en gevinstberegning for spillet, og beregn spillerens forventning til spillet.

2. Over eller under 7
Spillet udføres med to terninger. Spilleren gætter på om et kast vil resultere i et øjental under 7, over 7, eller lige præcis 7. Spilleren kan gøre sin indsats på en spilleplade:

Under 7 2 for 1	7 5 for 1	Over 7 2 for 1

Foretag en beregning af spillerens forventning til spillet når han sætter en indsats på 1 kr. på

1. Under 7.

2. 7

3. Over 7.

3. Bedre end banken
Spillet udføres med to terninger. Banken foretager et kast, og øjentallet noteres. Spilleren skal nu for at vinde slå et kast med et højere øjental end det banken opnåede. Hvis spilleren opnår et lavere øjental end banken, eller hvis han opnår samme øjental som banken, har banken vundet.

Beregn sandsynligheden for at spilleren vinder, når banken i sit kast opnår:

1. Øjentallet 11.

2. Øjentallet 10.

3. Øjentallet 9.

4. Øjentallet 8.

5. Øjentallet 3.

4. Monte Carlo med tre terninger
Tre terninger kastes. Spillerne kan ved en indsats på en spilleplade markere deres bud på hvad summen af terningernes øjental vil blive.

3 200 for 1	4 70 for 1	5 35 for 1	6 20 for 1
7 13 for 1	8 9 for 1	9 7 for 1	10 7 for 1
11 7 for 1	12 7 for 1	13 9 for 1	14 13 for 1
15 20 for 1	16 35 for 1	17 70 for 1	18 200 for 1

1. Udfaldsrummet for et kast med tre terninger har 216 (=6x6x6) ligevægtede udfald. Foretag en optælling af hvor mange der er gevinstudfald for hver af hændelserne "Terningerne viser tilsammen 3 øjne", "Terninger viser tilsammen 4 øjne",...," "Terningerne viser tilsammen 18 øjne".

2. Foretag dernæst gevinstberegninger for spillet. Hvilke felter vil du anbefale spilleren at sætte sin indsats på, og hvilke felter vil du fraråde ham at spille på.

5. Høj og lav

Spillet udføres med tre terninger. Spilleren gætter på om summen af øjentallene bliver Høj (dvs. 11 eller derover) eller Lav (dvs. 10 eller derunder).

Spilleren vinder såfremt han gætter rigtigt, dog med én undtagelse: Hvis de tre terninger viser tre ens øjental har spilleren tabt uanset om hans gæt i øvrigt er rigtigt.

Lav 2 for 1	Høj 2 for 1

Beregn spillerens forventning til spillet.

6. En-to-tre

Spillet udføres med tre terninger. Spilleren kaster terningerne og får gevinst efter følgende regler:

Øjentallene 1, 2 og 3 forekommer:	10 kr.
Øjentallene 1 og 2 forekommer, men ikke 3:	3 kr.
Øjentallet 1 forekommer, men ikke 2:	1 kr.

Spillerens indskud i hvert spil er 1 kr. Optæl hvor mange af kasteeksperimentets 216 udfald der resulterer i en gevinst på 1 kr., hvor mange der resulterer i en gevinst på 3 kr., og hvor mange der resulterer i en gevinst på 10 kr. Beregn derefter spillerens forventning til spillet.

7. Forudsigelser med garanti

I Sannes klasse diskuterer man en notits i avisen som fortæller om en amerikansk skoleelev der har gjort forretning ved at forudsige om forestående fødsler ville resultere i en dreng eller en pige.

Skoleeleven (der har haft chancelære i skolen) tog 10 dollars for en forudsigelse, og han gav følgende garanti: Hvis forudsigelsen viser sig at være forkert betales pengene tilbage.

Beregn skoleelevens økonomiske forventning til "spillet". Antag, at han foretager sine forudsigelser ved hjælp af møntkast.

8. Et spil med mønter

Malene har fundet på et spil: 10 mønter kastes. Hvis kastet resulterer i at 5 mønter viser Krone og 5 viser Plat udbetaler Malene en gevinst på 5 kr. til spilleren. Spillerens indskud i hvert spil er 1 kr.

Undersøg, om det er en god idé Malene har fået.

9. Las Vegas roulette

På amerikanske rouletter er der ikke 37 numre, men 38, idet roulettehjulet foruden et nummer 0 også har et nummer 00, dobbelt nul. Reglerne for gevinsternes størrelse er de samme som på de europæiske rouletter med 37 numre. En spiller sætter sin indsats på *Rød*. Beregn hans forventning til spillet.

10. Yatzy: Fra fire ens til fem ens

En spiller opnår i sit første kast fire seksere. Han prøver nu i de næste to kast at opnå en sekser med den sidste terning. Hvad er hans chance for at det lykkes?

11. Yatzy: Fra tre ens til fem ens

En spiller opnår i sit første kast tre seksere. Han prøver nu i de næste to kast at opnå to seksere med de sidste to terninger. Hvis han opnår én sekser i det første af de to kast lader han den selvfølgelig ligge over og bruger kun én terning i det sidste kast.

Tegn et chancetræ som viser de mulige resultater i de to kast (2 seksere, 1 sekser, 0 sekser). Hvad er hans chance for at det lykkes ham at få fem ens?

12. Yatzy: Fra to ens til fem ens

En spiller opnår i sit første kast to seksere. Han prøver nu i de næste to kast at opnå tre seksere med de øvrige tre terninger. Hvis han opnår seksere i det første af de to kast lader han dem selvfølgelig ligge over og kaster kun videre med de resterende terninger.

Tegn et chancetræ som viser de mulige resultater i de to kast (3 seksere, 2 seksere, 1 sekser, 0 sekser). Hvad er chancen for at det lykkes ham at få fem ens?

13. Yatzy: Chancen for "Straight"

En spiller opnår i sit første kast øjentallene 2-3-4-4-5. Han prøver nu i de næste to kast at få den ene firer udskiftet med enten en etter eller en sekser. Hvad er chancen for at det lykkes?

14. Yatzy: Får han bonus?

En spiller skal i sine tre slag i sidste spilleomgang kaste tre seksere for at opnå bonus. I det første kast opnår han to seksere. Hvad er chancen for at det lykkes for ham at få yderligere en sekser i de næste to kast?

15. Pokerterninger

Poker i terningudgaven spilles med fem terninger. I spillet kan man opnå følgende kasteresultater:

1. Et par	5. Fuldt hus
2. To par	6. Fire ens
3. Tre ens	7. Fem ens
4. Straight	8. Nix

"Nix" omfatter alle de kast som ikke hører ind under et af resultaterne 1.-7. Beregn sandsynligheden for hver af de otte typer af pokerkast.

16. Backgammon: At få en fange fri

Når en spillers brik er slået ud må den starte forfra i modpartens hjemland. Her skal den ind på en af positionerne med numrene 1-6, og det er spillerens terningkast som bestemmer hvor brikken kan komme ind. Opnår spilleren for eksempel kastet 3-5 kan han lade sin brik starte på position 3 eller position 5, vel at mærke hvis disse positioner ikke er blokerede af modpartens brikker.

Har modparten blokeret position 3 kan spilleren ikke få sin brik ind her, og er position 5 også blokeret kan spilleren ikke få sin tilfangetagne brik i spil igen i denne omgang. Hvis alle positioner er blokerede har spilleren selvfølgelig ingen mulighed for at få sin brik i spil, og hvis alle positioner er fri er spilleren sikker på at få sin brik i spil. Men hvor gode er chancerne når nogle af positionerne er blokerede?

Beregn sandsynligheden for at spilleren får sin brik i spil i ét kast (med to terninger) når modparten har blokeret følgende positioner:

1. Position 1, 2, 3, 4 og 5
2. Position 1, 2, 3 og 4
3. Position 1, 2 og 3
4. Position 1, 3 og 5
5. Position 1 og 2
6. Position 1

17. Hvilken fordeling er bedst?
Et spil mellem en spiller og en spillebank udføres på følgende måde: To røde kugler og tre sorte kugler fordeles i to poser. Spilleren vælger selv hvordan kuglerne skal fordeles. - Derefter udvælger han ved lodtrækning (møntkast) en af de to poser, og udtrækker ved blindudtagning en kugle fra den valgte pose. Hvis han udtager en rød kugle vinder han spillet og får udbetalt det dobbelte af indsatsen. Banken beholder som sædvanlig indsatsen.

1. Beregn ved hjælp af et chancetræ sandsynligheden for at spilleren vinder, og beregn hans forventning til spillet, når han vælger at fordele kuglerne således: En rød og en sort kugle i den ene pose, og en rød og to sorte kugler i den anden pose.

2. Hvordan skal spilleren fordele de fem kugler for at opnå de bedste vinderchancer i spillet?

18. Poker med 32 kort
I hver af de fire kortfarver benyttes kortene 7,8,9,10,Kn, D,K,Es. Beregn sandsynligheden for de forskellige pokerhænder: "Et par", "To par",..., "Fire ens". (I "Straight" kan esset kun indgå som højeste kort, altså sammen med 10,Kn,D,K.)

Opstil dernæst pokerhænderne i rækkefølge efter stigende sværhedsgrad. Undersøg om rækkefølgen er den samme som ved 52-korts Poker.

19. Chancen for en bedre hånd
En spiller har ved kortgivningen i 52-korts Poker fået en hånd som indeholder tre esser, en konge og en dronning. Han beholder de tre esser og beder om at få de to andre kort byttet. Beregn sandsynligheden for følgende hændelser:

1. Efter ombytningen har han en hånd med "Fire esser".

2. Efter ombytningen har han en hånd med "Fuldt hus".

Beregningen under 2. kan du dele op. Du kan beregne sandsynligheden for at de to nye kort er to konger, to dronninger, to knægte, to 10'ere osv.

Beregn også sandsynligheden for at han opnår "Fuldt hus" hvis han vælger kun at ombytte ét kort, dronningekortet.

20. Klasselotteriet
Klasselotteriets udtrækninger af gevinster foretages i seks afdelinger, de såkaldte klasser. I hver klasse deltager alle lotteriets 210 000 numre, altså også de numre der fik gevinst i en af de foregående klasser. Et nummer kan derfor blive udtrukket i to eller flere af lotteriets klasser, teoretisk set kan det endda blive udtrukket i dem alle seks. Antallet af numre der udtrækkes i de seks klasser er:

1. klasse: 4300	2. klasse: 4500	3. klasse: 4800
4. klasse: 5400	5. klasse: 5600	6. klasse: 17901.

Antag at du spiller i lotteriet på en seddel med nummer 158363. Beregn følgende sandsynligheder:

1. Sandsynligheden for at din seddel giver gevinst i 1. klasse, at den giver gevinst i 2. klasse, osv.

2. Sandsynligheden for at din seddel giver gevinst i både 1. og 2. klasse.

3. Sandsynligheden for at din seddel giver gevinst i både 5. og 6. klasse.

4. Sandsynligheden for at din seddel giver gevinst i alle 6 klasser.

5. Sandsynligheden for at din seddel ikke giver gevinst i nogen af de seks klasser.

6. Sandsynligheden for at din seddel giver gevinst i mindst én af de seks klasser.

21. Kommer sedlen snart ud?

Hvert lotteri i Klasselotteriet omfatter seks klasser. I opgave 20 har du udregnet chancen for at en seddel giver gevinst, "kommer ud", mindst én gang i et lotteri. Ofte hører man om sedler der ikke har været ude de sidste 10 eller 20 lotterier. Beregn ved hjælp af resultaterne fra opgave 20 sandsynligheden for at en seddel ikke kommer ud i løbet af:

1. 5 lotterier

2. 10 lotterier

3. 20 lotterier

22. Et tallotteri

I et lotteri deltager 10 000 lodsedler med numre fra 0000 til 9999. Hver lodseddel koster 1 kr. I lotteriet udtrækkes ét fircifret tal, f.eks. 4772. Sedlen med nummeret 4772 vil da modtage en gevinst på 1000 kr.

Men der er flere gevinster. Alle de sedler der starter med cifrene 477 og alle de sedler der ender med cifrene 772 vil få en gevinst på 100 kr. (det gælder også seddel 4772). Og endvidere vil alle de sedler der starter med cifrene 47 og de sedler der ender med cifrene 72 få en gevinst på 10 kr.

1. Hvor stor en gevinst vil der i dette lotteri i alt falde på den seddel som har alle fire cifre rigtige?'

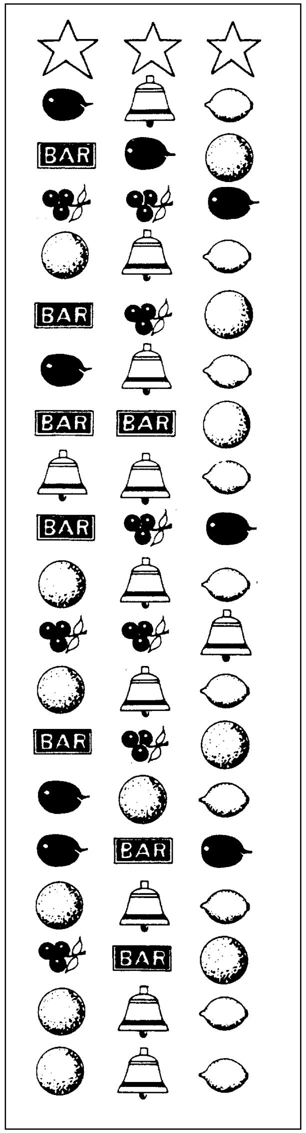
2. Hvor stor er den samlede gevinstsum i lotteriet?

3. En spiller deltager i lotteriet med én seddel. Beregn hans forventning til lotteriet.

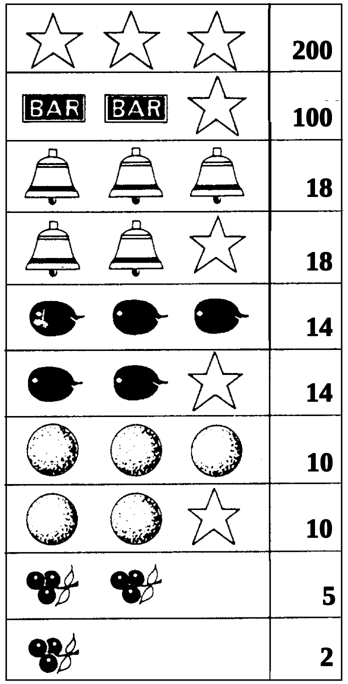
23. En spilleautomat

Tegningerne viser hvilke symboler der findes på automatens tre tromler, og hvilke gevinstregler der gælder for automaten. Undersøg ved en gevinstberegning hvor stor en del af indsatsen automaten giver tilbage som gevinst. - Beregn også sandsynligheden for at et tilfældigt spil på spilleautomaten giver gevinst.

Tromle
1 2 3



Gevinstregler



På de tomme pladser i de to nederste linier kan ethvert symbol indgå. I nederste linie dog ikke kirsebær på midterste plads.

24. Det nordiske lotto

Fra 1993 er indført et nordisk lottospil. Der udtrækkes seks tal blandt tallene 1-48. Endvidere udtrækkes tre tillægstal.

Der er følgende præmie-kategorier i lotto-spillet:

1. præmie: 6 vindertal
2. præmie: 5 vindertal + 1 tillægstal
3. præmie: 5 vindertal
4. præmie: 4 vindertal
5. præmie: 3 vindertal + mindst 1 tillægstal

Foretag en chanceberegning for hver af de fem typer af præmier. Hvis du hver uge spiller 50 rækker i det nordiske lottospil, hvor hyppigt vil du da i gennemsnit kunne forvente at få en 1. præmie, en 2. præmie, osv.