

**INFA-Matematik:**  
Informatik i matematikundervisningen

Et delprojekt under

**INFA:** Informatik i skolens fag  
Et forskningsprogram på Danmarks Lærerhøjskole

**Projektledelse:**  
Allan C. Malmberg  
Inge B. Larsen  
Viggo Sadolin

**Distribution af programmer og tekster:**  
INFA, Danmarks Lærerhøjskole  
Emdrupvej 115B, 2400 NV

\*

Tekst: Allan C. Malmberg

Layout: Leif Glud Holm

© INFA 1999



**Allan C. Malmberg**

## Stikprøver

- Stikprøver ved brug af computer
- Stikprøveregler
- Hverdagens stikprøver

## Talkunnen

Serien Talkunnen indeholder fremstillinger af en række emner som kan give ideer til behandlingen af tal i en elementær undervisning.

### Indholdsfortegnelse TALKUNNEN 4

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Stikprøver .....                                     | 2  |
| 1. KUGLE 1: Chancesituationer og kuglemodeller ..... | 3  |
| Flere eksperimenter: Fortsæt og Gentag .....         | 8  |
| En anden model .....                                 | 11 |
| Udtagelse uden tilbagelægning .....                  | 12 |
| 2. Stikprøveundersøgelser ved brug af KUGLE1 .....   | 15 |
| Hvad betyder stikprøvens størrelse? .....            | 18 |
| Hvad betyder populationens størrelse? .....          | 21 |
| Hvad betyder populationens sammensætning? .....      | 24 |
| Når stikprøven er udtaget .....                      | 26 |
| KUGLE1 kan beregne chanceintervaller .....           | 27 |
| 3. Opgaver til KUGLE1 .....                          | 30 |
| 4. Hverdagens stikprøver .....                       | 35 |
| Nogle krav til hverdagens stikprøver .....           | 36 |
| Eksempler til drøftelse .....                        | 39 |

## Stikprøver

Et vigtigt hjælpemiddel i statistiske undersøgelser er stikprøver. Fra en samling af ting eller personer udtages en stikprøve, og på grundlag af stikprøven udledes oplysninger om forhold i den samling hvorfra stikprøven blev taget. Denne samling af ting eller personer som man ønsker at skaffe sig oplysninger om, kalder man stikprøveundersøgelsens *population*. Gennem stikprøven studerer man populationen.

Ved en politisk meningsmåling i Danmark skaffer man sig oplysninger om tilslutningen til de politiske partier. Undersøgelsens population er her samlingen af alle danske vælgere. Populationen indeholder omkring 4 millioner personer, medens stikprøven der giver de ønskede oplysninger, måske kun består af 1000 personer eller endnu færre.

Dette eksempel viser en af fordelene ved anvendelsen af stikprøver. I stikprøveundersøgelser kan man begrænse sig til at undersøge en beskeden del af populationen. Medens en totalundersøgelse, hvis den overhovedet var praktisk mulig, ville være meget krævende, kan en stikprøveundersøgelse ofte foretages med en overkommelig indsats af tid og penge.

Et andet eksempel på anvendelsen af stikprøveundersøgelser har vi i *kvalitetskontrol*. Når en fabrikant ønsker at kontrollere en produktion, kan han udtage en stikprøve af enheder fra produktionen. Gennem de udtagne enheder får han at vide om produktionen stadig opfylder de stillede kvalitetskrav.

Det er klart at en stikprøve ikke kan give fuldstændige oplysninger om populationen. Helt sikre oplysninger kan man kun få ved en undersøgelse af samtlige elementer i populationen. Sådanne oplysninger er dyre, og ofte vil man foretrække at klare sig med mindre.

Stikprøveundersøgelser er derfor blevet en hyppig anvendt metode til indsamling af oplysninger af statistisk art. Den statistik man

ser brugt (og misbrugt) i aviser, radio og fjernsyn, vil ofte have noget med stikprøver at gøre. Et vigtigt spørgsmål for enhver læser, lytter og seer må derfor være:

*Hvor pålidelige er de oplysninger man får gennem stikprøveundersøgelser?*

Dette spørgsmål skal vi nu se lidt nærmere på. Vi vil udføre en række eksempler på stikprøveundersøgelser, og på grundlag af resultaterne herfra vil vi opstille nogle retningslinier som kan være til nytte når stikprøvers pålidelighed skal vurderes.

Ved stikprøveundersøgelserne vil vi gøre brug af kuglemodeller og af programmet KUGLE1. Vi går altså ikke ud „i marken“ og udfører rigtige stikprøveundersøgelser, men vi lader computeren efterligne dem ved hjælp af KUGLE1.

## **1. KUGLE1: Chancesituationer og kuglemodeller**

I et spil skal du trække en seddel fra en æske. I æsken er der 10 sedler og der er gevinst på 3 af dem. Den seddel du trækker, skal lægges tilbage i æsken igen før du foretager den næste udtrækning.

Du får lov til at trække 5 gange. Hvilke gevinstchancer har du?

Hvis du er optimist, så vil du måske sige at der er mulighed for at du kan få gevinst i alle 5 forsøg. Selv om der kun er 3 gevinstsedler, kan du godt udtrække en gevinstseddel alle 5 gange, samme seddel kan jo udtages flere gange.

Hvis du er den type der siger „Jeg vinder aldrig i spil“, så regner du måske med at du slet ikke vinder i de 5 forsøg. Der er jo kun 3 af de 10 sedler der giver gevinst, så det er meget let at „komme uden om“ gevinstsedlerne.

Er du lidt mere realistisk, vil du nok mene at du vinder 1 eller 2 gange. Skulle du gå hen og vinde 5 gange, vil du opfatte det som et stort held. Og vinder du slet ikke, vil du betragte det som sort uheld.

Vi vil nu undersøge mulighederne nærmere ved hjælp af programmet KUGLE1. Med dette program kan vi få et overblik over en lang række af chancesituationer.

Ved hjælp af KUGLE1 opbygger vi *en kuglemodel af chance-situationer*. Kuglemodellen giver et billede af chancesituationen, den gengiver chancesituationen i en forenklet udgave.

I vores kuglemodel findes en æske med kugler. Vi bestemmer selv hvor mange kugler der skal være i æsken. Nogle af kuglerne er røde, og vi bestemmer selv igen hvor mange røde kugler der skal være. Programmet kan udtage kugler fra æsken, én for én, og hver gang notere om der blev udtaget en rød kugle.

Med programmet KUGLE1 kan vi derfor efterligne - eller *simulere* - en række kugleudtagelses-eksperimenter. Og programmet kan undervejs holde styr på alle resultater.

Vi opbygger nu en kuglemodel for den chancesituation der foreligger i det spil vi kigger på. Vi skal her svare på fire spørgsmål:

*Hvor mange kugler er der i æsken?*

Vi vælger at lade æsken indeholde 10 kugler, én for hver af de sedler der kan udtrækkes i spillet.

*Hvor mange af kuglerne er røde?*

Vi lader en rød kugle betyde en seddel med gevinst. Der skal derfor være 3 røde kugler i æsken. (Den indeholder altså 3 røde og 7 ikke-røde kugler).

*Kan en kugle udtages flere gange?*

Vi må her beslutte os for om det er tilladt at samme kugle kan udtages flere gange, dvs.: Bliver en udtaget kugle lagt tilbage

i æsken før næste udtagelse ? - I spillet kan samme seddel jo udtages flere gange, så vi svarer ja til det stillede spørgsmål.

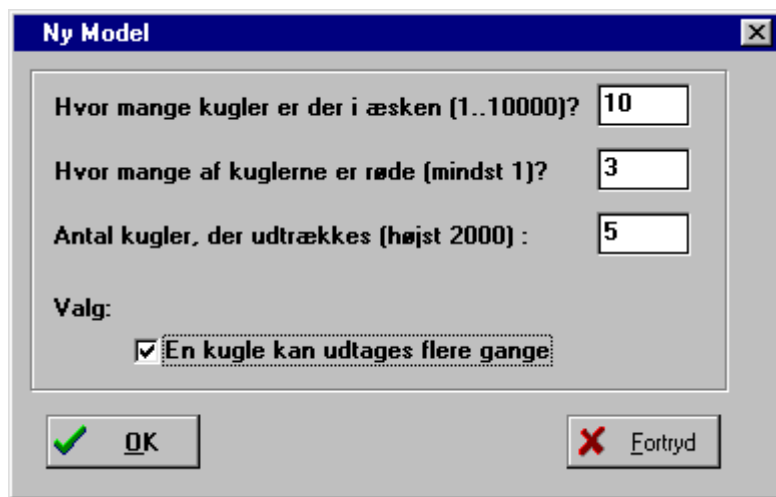
*Hvor mange gange skal der udtages en kugle?*

I spillet vælger du 5 gange en seddel. I kuglemodellen svarer det til at der skal udtages 5 kugler.

Vi har nu opstillet en kuglemodel af vor spillesituation. Modellen kan vi kort betegne ved:

K1(10, 3, ja, 5)

Det betyder at vi benytter KUGLE1 med 10 kugler, heraf 3 røde, samme kugle kan udtages flere gange, og der skal 5 gange udtages en kugle.



### Kørsel af KUGLE1

Vi går nu over til programmet KUGLE1. Når du vælger *Ny model* kommer du straks frem til de fire spørgsmål. Indtast de fire svar vi har besluttet os for: 10, 3, ja og 5.

Programmet bekræfter nu at den opstillede kuglemodel ser således ud:

MODEL  
I æsken er der 10 kugler  
3 af dem er røde  
Et eksperiment består i at udtage 5 kugler  
Det er tilladt at udtage samme kugle flere gange

Derefter giver programmet dig nogle muligheder:

*Ny model* Du kan fortryde den opstillede model. Programmet vender da tilbage til de fire spørgsmål igen, og giver dig en ny mulighed for at besvare dem.

*Prøvekørsel* Du går videre med den opstillede model, og lader programmet udføre et eksperiment.

*Kørsel* Du sætter en række eksperimenter i gang. For eksempel kan du lade programmet udføre 20 eksperimenter.

Vi vælger først at se på *Prøvekørsel*. Du får nu resultatet af et enkelt eksperiment. Der udtages altså 5 kugler.

Programmet meddeler for eksempel:

Prøvekørsel: I æsken findes kugler: nr. 1..10  
Røde kugler: nr. 1..3  
5 kugler udtages

Her er numrene på de kugler, der blev udtaget:

3 - 5 - 2 - 9 - 4

På skærmen vil du se at tallene 3 og 2 er røde, svarende til at kuglerne med disse numre er røde.

Der meddeles endvidere:

I dette eksperiment blev der udtaget 2 røde kugler.

Prøvekørslen har altså givet os en situation hvor 2 af de 5 udtagne kugler er røde. I spillesituationen svarer det til at du vinder på 2 af de udtrukne sedler.

### Kørsel

Herefter går vi over til menupunktet *Kørsel*. Klik på *Kørsel*.

Programmet spørger hvor mange eksperimenter der skal udføres. Vi kan starte forsigtigt med at svare: 20.

På skærmen kommer nu antallet af røde kugler i hvert af de 20 eksperimenter:

2 2 3 1 3 0 0 0 1 1

4 0 2 2 2 1 2 1 1 0

Bemærk, det er ikke kuglenumre der udskrives her, det er *antallet af røde kugler* der blev udtaget i de 20 eksperimenter. Det er altså antallet af gevinster i 20 udførte spil.

Vi vælger nu *Oversigt*. Dette giver os en oversigt i form af en sumtabel:

| Antal<br>røde kugler | Andel<br>røde kugler | Antal eks-<br>perimenter | Antal i<br>% | Summeret<br>% |
|----------------------|----------------------|--------------------------|--------------|---------------|
| 0                    | 0.000                | 5                        | 25.00        | 25.00         |
| 1                    | 0.200                | 6                        | 30.00        | 55.00         |
| 2                    | 0.400                | 6                        | 30.00        | 85.00         |
| 3                    | 0.600                | 2                        | 20.00        | 95.00         |
| 4                    | 0.800                | 1                        | 5.00         | 100.00        |

I første søjle i tabellen ser vi at der i de udførte eksperimenter forekommer fra 0 til 4 røde kugler, dvs. andelen af røde kugler har været fra 0,000 til 0,800 (det ses i 2. søjle af tabellen).

I tredje søjle ser vi at der har været 5 eksperimenter uden røde kugler. 5 ud af 20 eksperimenter svarer til 25% (søjle 4). Vi ser også at der er 6 eksperimenter med 1 rød kugle, det svarer til 30%. - Kun ét af de 20 eksperimenter har givet 4 røde kugler.

Du kan allerede nu begynde at overveje dine gevinstchancer i spillet. Hvis du vurderer ud fra de 20 eksperimenter i tabellen, ser du at der er 25% risiko for at du slet ikke får nogen gevinst i de 5 spil. Du ser også at der kun er 5% chance for at få 4 gevinster. Og 5 gevinster forekommer slet ikke i tabellen.

### Flere eksperimenter: Fortsæt eller Gentag

Nu er 20 eksperimenter ikke et solidt materiale at bygge på. Det vil være en god ide at lade programmet udføre nogle flere eksperimenter. Af programmets muligheder kan du vælge to som giver nye kørsler: *Fortsæt* og *Gentag*. *Gentag* vil få programmet til at udføre det samme antal eksperimenter endnu engang, altså 20. Lad os i stedet vælge *Fortsæt*.

Programmet kan nu udføre flere eksperimenter, og lade de nye resultater indgå i tabellen sammen med dem du allerede har indsamlet.

Vælg for eksempel at lade programmet udføre yderligere 80 eksperimenter så du i alt har en statistik der omfatter 100 eksperimenter.

Den nye oversigt ser måske således ud efter at der er tilføjet 80 eksperiment-resultater.

| Antal<br>røde kugler | Andel<br>røde kugler | Antal eks-<br>perimenter | Antal i<br>% | Summeret<br>% |
|----------------------|----------------------|--------------------------|--------------|---------------|
| 0                    | 0.000                | 16                       | 16.00        | 16.00         |
| 1                    | 0.200                | 35                       | 35.00        | 51.00         |
| 2                    | 0.400                | 31                       | 31.00        | 82.00         |
| 3                    | 0.600                | 16                       | 16.00        | 98.00         |
| 4                    | 0.800                | 2                        | 2.00         | 100.00        |

Du ser nu at 16 af de 100 eksperimenter ikke giver nogen røde kugler. Udfra dette materiale er der altså 16% risiko for at dit spil ikke giver gevinst. - Og du ser at nu er der kun 2% chance for at opnå 4 gevinster.

Den sidste søjle i oversigten, hvor procenterne er lagt sammen eller summeret, viser at der er en sandsynlighed på 51% for at få enten 0 eller 1 rød kugle.

Du ser også at der er en sandsynlighed på 82% for at der højst udtages 2 røde kugler.- Overført til spillet betyder det, at der er 82% risiko for at de 5 spil højst giver gevinst i 2 af spillene. - Og der er kun 2% chance for at 4 af de 5 spil giver gevinst.

### Øvelse 1

Kør KUGLE1 med den opstillede kuglemodel. Lad programmet udføre 100 eksperimenter og undersøg hvor godt resultaterne passer sammen med dem der er givet i oversigten ovenfor.

### Øvelse 2

Lad programmet udføre 500 eksperimenter med den opstillede kuglemodel: K1(10, 3, ja, 5).

Sæt på grundlag af dine resultater tal på følgende spill sandsynligheder:

- (1) Risikoen for ikke at få gevinst i de 5 spil
- (2) Risikoen for højst at få 1 gevinst i de 5 spil
- (3) Chancen for at få mindst 4 gevinster i de 5 spil.

Du har nu set hvordan vi har fået svar på vore spørgsmål om chancerne i spillet: Vi opstillede en kuglemodel for spillet og lod datamaskinen udføre eksperimenter med kuglemodellen.

Ved løsningen af spilleproblemet er vi altså gået frem således:

1. Vi opstiller en kuglemodel som passer med den forelagte chancsituation, altså med spillet.
2. Vi lader datamaskinen udføre eksperimenter med kuglemodellen: Vi efterligner eller simulerer modellen på datamaskinen.
3. Vi bruger datamaskinens resultater på spillet:  
Vi oversætter eller fortolker resultaterne og finder ud af hvad de siger om den forelagte chancsituation.

Disse tre elementer vil indgå i arbejdet hver gang vi løser chanceproblemer ved hjælp af en kuglemodel:

1. Vi opstiller modellen
2. Vi simulerer modellen
3. Vi fortolker resultaterne.

Det er klart at vi ved en sådan fremgangsmåde risikerer at begå fejl. Her er nogle oplagte fejlkilder:

1. Den opstillede model stemmer ikke godt overens med den forelagte chancsituation
2. Computerens resultater giver ikke det rigtige billede af modellen.
3. Vi fortolker ikke resultaterne på den rette måde.

Hvad angår punkt 2, så kan vi i nogen grad selv sikre os her. Vi kan lade computeren skaffe os et stort talmateriale, altså lade den udføre mange eksperimenter.

Erfaringer viser at store datamaterialer har gode chancer for at give os et korrekt billede. Vi skal altså ikke nøjes med 5, 10 eller 20 eksperimenter, men vælge 100 eller 200 eller måske endnu flere før vi fortolker de opnåede data.

Hvad angår punkt 1 og punkt 3 i listen over fejlkilder, så vil kun øvelse og erfaring kunne sikre os med fejl her. Vi må altså skaffe os erfaring med at opstille modeller og prøve at fortolke resultater. Gennem eksempler må vi finde ud af hvilke faldgruber der kan være når valget af den rigtige model, eller snarere den bedste model, skal træffes.

Oftentimes må man nemlig nøjes med en model som ikke på alle punkter afspejler den virkelige chancesituation. Man kan da ikke på forhånd vide noget om modellens kvalitet, kun en afprøvning vil vise hvor anvendelig den er.

### En anden model?

Kunne vi have benyttet en anden model end  $K1(10,3,ja,5)$  ved besvarelse af opgaven? Ja, det afgørende er at vi benytter en model hvor der ved hver kugleudtrækning er en chance på 3 ud af 10, altså 30%, for at få en rød kugle. Det er jo betingelserne i spillet. Her er hele tiden 10 sedler og 3 af dem giver gevinst. Ved hver udtrækning af en seddel er der en chance på 30% for at få gevinst. Sedlerne lægges jo tilbage i æsken, så chancen for gevinst i spillet ændres ikke undervejs.

Vi kunne derfor også have benyttet for eksempel modellen

$$K1(20,6,ja,5),$$

altså en model der svarer til at der er 20 kugler i æsken, heraf 6 røde kugler. Også her er der jo ved hver udtagelse 30% chance for en rød kugle, nemlig 6 ud af 20.

Eller vi kunne have benyttet modellen

$$K1(100,30,ja,5),$$

også her er der 30% chance for en rød kugle ved hver udtrækning.

### Øvelse 3

Lad KUGLE1 køre 100 eksperimenter med  $K1(20, 6, ja, 5)$ , og undersøg hvordan resultaterne stemmer overens med de resultater du fik tidligere.

### Øvelse 4

Opstil en kuglemodel med 500 kugler i æsken. Undersøg derefter ved en kørsel af KUGLE1 hvor godt resultaterne fra denne model stemmer med de tidligere resultater.

### Udtagelse uden tilbagelægning

Vi ændrer nu spillet. Der er stadig 10 sedler, og der er stadig gevinst på 3 af dem. Men denne gang skal den seddel der udtrækkes, ikke lægges tilbage i æsken igen.

Samme seddel kan altså kun trækkes én gang, og du vil derfor ikke kunne opnå mere end 3 gevinster i dette spil, selv om du udtrækker 5 sedler. - Hvad er mon nu risikoen for at du slet ingen gevinst vil få? Og hvad er chancen for at du får 3 gevinster?

Vi vil se på chancerne i dette spil, og vi belyser igen problemet ved at opstille en kuglemodel:

Også denne gang benytter vi en æske med 10 kugler, af dem er der 3 røde kugler, og der skal 5 gange udtrækkes en kugle.

Men til spørgsmålet om en kugle kan udtrækkes flere gange, svarer vi nej. Den opstillede model kan altså kort beskrives ved

$K1(10,3,nej,5)$ .

Vi lader nu KUGLE1 køre denne model. Når vi har besvaret de fire spørgsmål, bekræfter programmet at det er den ønskede model der vil blive anvendt:

**MODEL**

I æsken er der 10 kugler

3 af dem er røde

Et eksperiment består i at udtage 5 kugler

Det er ikke tilladt at udtage samme kugle flere gange

En prøvekørsel af modellen fortæller at følgende kugler blev udtaget:

8 - 2 - 5 - 6 - 1

Blandt dem er der to røde kugler.

Vi lader herefter KUGLE1 køre 20 eksperimenter. Oversigten over resultaterne ser således ud:

| Antal<br>røde kugler | Andel<br>røde kugler | Antal eks-<br>perimenter | Antal i<br>% | Summeret<br>% |
|----------------------|----------------------|--------------------------|--------------|---------------|
| 0                    | 0.000                | 2                        | 10.00        | 10.00         |
| 1                    | 0.200                | 8                        | 40.00        | 50.00         |
| 2                    | 0.400                | 9                        | 45.00        | 95.00         |
| 3                    | 0.600                | 1                        | 5.00         | 100.00        |

Det kunne se ud til at risikoen for ikke at få gevinster i dette spil er omkring 10%, altså lavere end i det foregående spil. Men materialet er jo spinkelt, der er kun udført 20 eksperimenter. Vi må hellere indsamle flere data.

**Øvelse 5**

Lad KUGLE1 udføre 100 eksperimenter med den opstillede model  $K1(10,3,nej,5)$ .

Hvad sætter du følgende spillechancer til:

- (1) Chancen for at få 3 gevinster i de 5 spil
- (2) Risikoen for ikke at få gevinst i de 5 spil
- (3) Chancen for at få mindst 2 gevinster i de 5 spil

**Øvelse 6**

Start forfra og udfør igen 100 eksperimenter. Undersøg hvor godt de nye resultater stemmer med dem fra øvelse 5.

**Øvelse 7**

Kør i alt 500 eksperimenter, og undersøg hvilke tal du nu kan sætte på de tre spillechancer i øvelse 5.

## 2. Stikprøveundersøgelser ved brug af KUGLE1

Stikprøveundersøgelserne har ofte til opgave at skaffe viden om hvor stor en procentdel af populationens elementer der har en bestemt egenskab. Ved kvalitetskontrollen er man interesseret i at få oplysninger om hvor stor en del af produktionen der er af mindre god kvalitet, og ved den politiske meningsmåling vil man skaffe sig oplysninger om hvor stor en del af vælgerbefolkningen der stemmer på de enkelte partier.

Situationer af denne art kan vi mere neutralt beskrive ved kugleudtagelser. Populationen af kugler indeholder en vis procentdel af røde kugler, og gennem stikprøven vil vi skaffe os viden om hvor stor denne procentdel er.

Vi ser først på nogle eksempler hvor vi har kendskab til hvad procentdelen af røde kugler i kuglepopulationen er. Lad os antage at populationen indeholder 10 000 kugler, og at andelen af røde kugler i populationen er 0,40. Fra populationen vil vi nu udtage stikprøver på 25 kugler, og vi vil undersøge hvor mange røde kugler der forekommer i disse stikprøver.

Vi udfører kugleudtagelsen ved hjælp af KUGLE1. Ved udtagelsen benytter vi modellen

K1(10 000, 4000, nej, 25)

Vi lader KUGLE1 udføre 100 eksperimenter, vi udtager altså 100 gange en stikprøve på 25 kugler.

Vi fik følgende resultater:

| Antal<br>røde kugler | Andel<br>røde kugler | Antal eks-<br>perimenter | Antal i<br>% | Summeret<br>% |
|----------------------|----------------------|--------------------------|--------------|---------------|
| 4                    | 0.160                | 1                        | 1.00         | 1.00          |
| 5                    | 0.200                | 3                        | 3.00         | 4.00          |
| 6                    | 0.240                | 4                        | 4.00         | 8.00          |
| 7                    | 0.280                | 8                        | 8.00         | 16.00         |
| 8                    | 0.320                | 13                       | 13.00        | 29.00         |
| 9                    | 0.360                | 18                       | 18.00        | 47.00         |
| 10                   | 0.400                | 15                       | 15.00        | 62.00         |
| 11                   | 0.440                | 14                       | 14.00        | 76.00         |
| 12                   | 0.480                | 5                        | 5.00         | 81.00         |
| 13                   | 0.520                | 11                       | 11.00        | 92.00         |
| 14                   | 0.560                | 3                        | 3.00         | 95.00         |
| 15                   | 0.600                | 3                        | 3.00         | 98.00         |
| 16                   | 0.640                | 2                        | 2.00         | 100.00        |

Af tabellen fremgår at det mindste antal røde kugler der forekom i stikprøven var 4, og at det højeste antal var 16.

Andelen af røde kugler har dermed varieret fra  $4/25=0,16$  til  $16/25=0,64$ . Vi ser også at der kun er få stikprøver i tabellens top og bund, de store antal ligger i midtergruppen.

Hvis vi piller de yderste stikprøver fra, fx dem med 4 forekomster og dem med 16 forekomster, så har vi fjernet 3 ud af de 100 stikprøver. De tilbageblevne 97 - dem i tabellens „midtergruppe“ - svinger fra en andel af røde kugler på  $5/25=0,20$  til  $15/25=0,60$ . Vi kan derfor sige:

*Ca. 95% af stikprøverne har en andel af røde kugler der ligger fra 0,20 til 0,60.*

Det kan også siges således: Ca. 95% af stikprøverne har en andel af røde kugler som højst afviger 0,20 fra populationens andel af røde kugler på 0,40.

Vi sætter nu stikprøvestørrelsen op fra 25 til 100. Vi lader igen KUGLE1 udtage 100 stikprøver, og ved hjælp af programmets tabel finder vi denne gang at ca. 95% af stikprøverne indeholder en andel af røde kugler fra 0,30 til 0,50, altså en afvigelse fra de 0,40 på højst 0,10.

### Øvelse 1

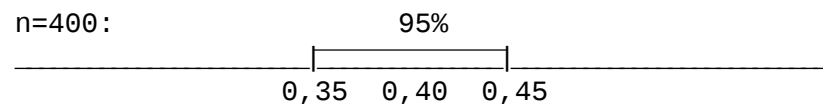
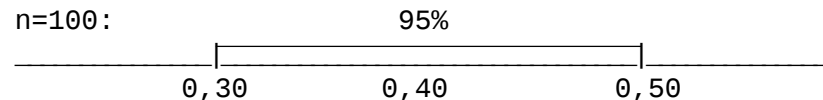
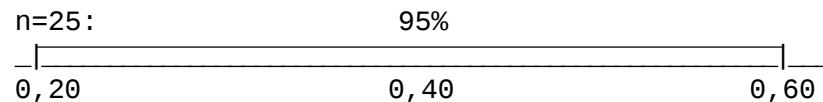
Lad KUGLE1 udtage 100 stikprøver hver på 100 kugler. Benyt kuglemodellen K1(10000, 4000, nej, 100). Undersøg om resultatet stemmer med det der er angivet ovenfor.

Vi ser herefter på stikprøver der indeholder 400 kugler. Vi sætter altså stikprøvestørrelsen op fra 100 til 400. Også her lader vi KUGLE1 udtage 100 stikprøver. Af programmets tabel finder vi denne gang at ca. 95% af stikprøverne indeholder en andel af røde kugler fra 0,35 til 0,45, altså kun en afvigelse på 0,05 fra de 0,40.

### Øvelse 2

Udtag de 100 stikprøver hver på 400 kugler og undersøg om resultatet stemmer med det angivne.

De tre resultater gengiver vi i en figur. Stikprøvens størrelse er betegnet med  $n$ .



Af figuren kan vi få et indtryk af hvor pålidelige oplysninger der kan hentes fra en stikprøve. Med stikprøven ønsker vi at skaffe os viden om populationens indhold af røde kugler, og vi er derfor interesseret i at have kendskab til hvor meget stikprøven kan risikere at ramme ved siden af.

I de eksempler vi har set, kender vi det rigtige tal. Populationens andel af røde kugler er jo 0,40. Vi kan derfor af de tre tegninger se hvor galt det kan gå med stikprøver af de tre slags:

Med stikprøver på 25 kugler viser figuren at vi i 95% af tilfældene har ramt inden for en afstand af 0,20 fra det rigtige tal.

Går vi op til stikprøver på 100 kugler, ser vi at vi her i 95% af tilfældene har ramt inden for en afstand af 0,10 fra det rigtige tal.

Med stikprøver på 400 kugler er resultatet endnu bedre. Her har vi i 95% af tilfældene været inden for en afstand af kun 0,05 fra det rigtige.

### Hvad betyder stikprøvens størrelse?

Vi ser altså at 95%-området bliver smallere når stikprøvestørrelsen forøges. Det betyder at stikprøvernes „træfsikkerhed“ bliver bedre når stikprøvestørrelsen sættes op. Med en stor stikprøve har vi større chance for at få et resultat som ligger tæt på det rigtige tal. Vi kan formulere det i følgende stikprøveregel:

#### Stikprøveregel 1

*Jo større stikprøve, jo større chance for et pålideligt resultat.*

Vore stikprøveudtagelser kan også vise lidt om hvordan træfsikkerheden forbedres når stikprøvestørrelsen sættes op. Groft sagt

gælder nemlig den regel at træfsikkerheden bliver dobbelt så god når stikprøven gøres fire gange så stor.

Med en stikprøvestørrelse på 100 vil træfsikkerheden altså være ca. dobbelt så god som ved en stikprøvestørrelse på 25.

Og ved en stikprøvestørrelse på 400 vil træfsikkerheden være dobbelt så god som ved en stikprøvestørrelse på 100.

De resultater vi har opnået i de tre typer af stikprøver, er i overensstemmelse med denne regel. Vi rammer jo „dobbelt så godt“ med en stikprøve på 100 kugler som med en på 25. Og vi rammer igen dobbelt så godt med en stikprøve på 400 kugler som med en på 100.

### **Pas på!**

Det skal fremhæves at den opstillede regel om stikprøvernes pålidelighed ikke siger at en større stikprøve med garanti giver et bedre resultat end en mindre stikprøve. Den siger kun at chancen for et bedre resultat forøges når vi gør brug af større stikprøver. Når vi udtager en stikprøve, kan vi derfor ikke vide om den er en af de „gode stikprøver“ som falder inden for 95%-området, eller om den netop er en af dem der falder ude i yderområderne og derfor giver et skævt billede af populationen. Men denne usikkerhed må vi finde os i, den hører med til omkostningerne ved stikprøveundersøgelser.

I stikprøveudtagelserne har vi benyttet udtagelse uden tilbagelægning. En kugle kan altså ikke udtages mere end én gang. Det svarer helt til den måde man almindeligvis foretager stikprøveundersøgelser på. Her vil en person også kun kunne indgå én gang i undersøgelsen.

Men hvis stikprøven er lille i forhold til populationen, så er de resultater vi opnår ved udtagelse uden tilbagelægning ikke meget forskellige fra dem vi kan opnå ved udtagelse med tilbagelægning. Derfor vil man ofte benytte en kuglemodel for udtagelse med tilbagelægning ved hverdagens stikprøveundersøgelser, fx ved

politiske meningsmålinger hvor populationen består af 4 millioner personer, men hvor stikprøven måske kun indeholder ca. 1000 personer.

Her burde vi egentlig benytte en kuglemodel med 4 millioner kugler. Og kuglerne skulle udtages uden tilbagelægning. Men da stikprøven er så lille i forhold til populationen, kan vi i stedet anvende en kuglemodel med tilbagelægning. Og her kan vi klare os med langt færre kugler, måske 1000 eller 100 kugler i stedet for de 4 millioner.

### **Øvelse 3**

Sammenlign ved kørsel af KUGLE1 de resultater der fremkommer ved anvendelse af følgende to modeller:

$K1(10000, 4000, \text{nej}, 100)$  og  $K1(10000, 4000, \text{ja}, 100)$

Undersøg om der er nogle væsentlige forskelle i de resultater du opnår. Kør fx 100 eksperimenter med hver af dem.

Hvis de to modeller i øvelse 3 stort set er lige gode, så kan vi i virkeligheden klare os med en model med langt færre kugler. Modellen  $K1(10\ 000, 4000, \text{ja}, 100)$  vil jo kunne erstattes af fx  $K1(1000, 400, \text{ja}, 100)$  eller af  $K1(10, 4, \text{ja}, 100)$ . I alle tre tilfælde er der jo ved enhver kugleudtagelse en chance på 40% for at få en rød kugle.

Hvis vi vil efterligne en stikprøveundersøgelse blandt 1 million mennesker, hvor 40% antages at være af en bestemt kategori, og hvor vi ønsker at udtage en stikprøve på blot 100 personer, behøver vi altså ikke at bruge modellen

$K1(1\ 000\ 000, 400\ 000, \text{nej}, 100)$ .

Vi kan i stedet bruge en meget enklere model:

$K1(100, 40, \text{ja}, 100)$  eller  $K1(5, 2, \text{ja}, 100)$ .

Vi formulerer vore erfaringer i en stikprøveregel:

### **Stikprøveregel 2**

*Hvis stikprøven er lille i forhold til populationen, er det ligegyldigt om vi udtager med eller uden tilbagelægning.*

### **Øvelse 4**

Kontroller at de to modeller

K1(10 000, 4000, nej, 100) og K1(5, 2, ja, 100)

stort set giver de samme resultater. Kør 100 eksperimenter med begge modeller.

### **Hvad betyder populationens størrelse?**

Vi har nu set på stikprøver der alle blev udtaget fra en population på 10 000 kugler. Og vi har set hvor pålidelige resultater der kan opnås ved hjælp af stikprøver på 25, på 100, og på 400 kugler. Spørgsmålet er nu: Hvilken betydning har det at populationens størrelse ændres? Hvis vi i stedet skulle udtage stikprøver fra en population på 100 000 kugler, eller måske på 1 000 000 kugler, hvor store stikprøver skulle vi da anvende? Eller hvis vi skulle udtage stikprøver fra populationer på 5000 kugler, eller måske kun 1000 kugler, hvor små stikprøver kunne vi da klare os med?

Svaret på disse spørgsmål overrasker mange. Svaret er nemlig at *det stort set er ligegyldigt om populationens størrelse forøges eller formindskes*. Populationens størrelse er uden indflydelse på stikprøvernes pålidelighed, det eneste der har betydning for pålideligheden er stikprøvens størrelse.

Det vil altså sige at en stikprøve af størrelsen 100 stort set er lige så pålidelig ved undersøgelse af en population på 10 000 som ved en population på 100 000 eller en population på 1 000 000.

Dette resultat har gyldighed når vi holder os til stikprøver som er små i forhold til de populationer de tages fra. Ved små stikprøver vil vi her forstå stikprøver som højst indeholder 5% af populationens elementer. I de fleste praktiske anvendelser af stikprøveundersøgelser er der tale om stikprøver som udgør langt mindre end 5% af populationen, i politiske meningsmålinger benyttes for eksempel stikprøver som udgør mindre end 0,1% af populationen. I sådanne situationer vil stikprøvens pålidelighed altså alene være bestemt af stikprøvens størrelse og ikke af populationens størrelse.

Vi kan nu formulere følgende regel for stikprøveudtagelser:

### **Stikprøveregel 3**

*Populationens størrelse er uden betydning, det er alene stikprøvens størrelse der tæller.*

Du kan let ved hjælp af kugleudtagelser prøve gyldigheden af denne regel. For eksempel kan du efterligne udtagelserne af stikprøver på 25 kugler fra populationer på 1000 kugler og fra populationer på 10 000 kugler, hvor andelen af røde kugler i begge populationer er 0,40. Du vil da opdage at der ikke er nævneværdig forskel i stikprøvernes træfsikkerhed i de to tilfælde. En stikprøve på 25 kugler giver derfor lige så gode oplysninger hvis den udtages af en population der indeholder 10 000 kugler, som hvis den udtages fra en population på kun 1000 kugler.

| Antal<br>røde kugler | Andel<br>røde kugler | Antal<br>stikprøver<br>(population<br>1000) | Antal<br>stikprøver<br>(population<br>10 000) |
|----------------------|----------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 4                    | 0.16                 | 2                                           | 2                                             |
| 5                    | 0.20                 | 3                                           | 4                                             |
| 6                    | 0.24                 | 6                                           | 5                                             |
| 7                    | 0.28                 | 11                                          | 12                                            |
| 8                    | 0.32                 | 12                                          | 12                                            |
| 9                    | 0.36                 | 14                                          | 15                                            |
| 10                   | 0.40                 | 14                                          | 12                                            |
| 11                   | 0.44                 | 17                                          | 15                                            |
| 12                   | 0.48                 | 11                                          | 12                                            |
| 13                   | 0.52                 | 5                                           | 8                                             |
| 14                   | 0.56                 | 4                                           | 2                                             |
| 15                   | 0.60                 | 1                                           | 1                                             |

Vi har her ladet KUGLE1 foretage stikprøveudtagelser af denne slags. I tabellen ser du resultaterne. Der er udtaget 100 stikprøver på 25 kugler fra en population på 1000 kugler, og 100 stikprøver på 25 kugler fra en population på 10 000 kugler. Begge populationer havde et indhold af røde kugler på 40%.

Af tabellens to sidste kolonner kan du se at der ikke er stor forskel i stikprøvernes træfsikkerhed i de to situationer. Både i stikprøverne fra populationen på 1000 og i stikprøverne fra populationen på 10 000 varierer andelen af røde kugler fra 0,16 til 0,60. Og de yderste grupper i hver ende af skalaen er lige svagt besat i de to stikprøveundersøgelser.

En stikprøve på 25 kugler har altså stort set samme pålidelighed når den udtages fra en population på 10 000 kugler som når den udtages fra en population på 1000 kugler. - Større population kræver altså ikke større stikprøve.

### Øvelse 5

Udtag ved hjælp af KUGLE1 25 kugler fra en æske der indeholder 500 kugler, hvoraf 200 er røde. - Og udtag 25 kugler fra en æske der indeholder 5000 kugler, hvoraf 2000 er røde.

Udfør i begge tilfælde 100 eksperimenter, og sammenlign de to oversigter.

Undersøg om resultaterne stemmer med stikprøveregel 3.

### Hvad betyder populationens sammensætning?

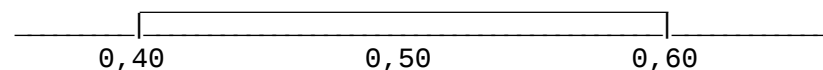
Indtil nu har vi kun set på stikprøver der blev udtaget fra populationer hvori andelen af røde kugler var 0,40. Men de stikprøve-regler vi har opstillet, gælder for alle populationer. Uanset hvad populationens andel af røde kugler er, så vil en større stikprøve give større chance for et pålideligt resultat. - Og træfsikkerheden vil stort set blive dobbelt så god når stikprøvestørrelsen bliver fire gange så stor.

Men stikprøvernes træfsikkerhed er ikke den samme over for forskellige andele af røde kugler i populationen. Når denne andel ligger i nærheden af 0,50 vil stikprøveresultaterne udvise størst variation, og variationen bliver mindre jo længere andelen ligger fra 0,50. Vi kan vise det ved fire efterligninger af stikprøveudtagelser.

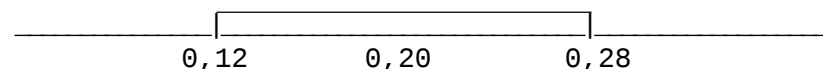
Vi har ladet KUGLE1 efterligne udtagelsen af 100 stikprøver på hver 100 kugler fra fire populationer. De fire populationer var alle på 10 000 kugler, men i den første var andelen af røde kugler 0,50, i den anden var andelen 0,20, i den tredje var andelen 0,10, og i den sidste var andelen af røde kugler 0,05.

Resultaterne fra de fire typer af udtagelser er gengivet i figurerne nedenfor.

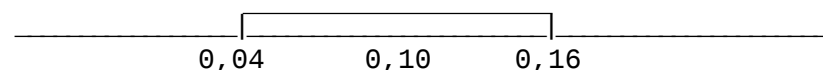
Andel: 0,50      95%-chanceinterval



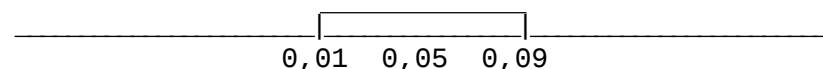
Andel: 0,20      95%-chanceinterval



Andel: 0,10      95%-chanceinterval



Andel: 0,05      95%-chanceinterval



Figurene viser et 95%-chanceinterval: Der er ca. 95% chance for at en udtaget stikprøve vil indeholde en andel af røde kugler som ligger i det pågældende interval.

Ved udtagelse af en stikprøve på 100 kugler fra en population hvor andelen af røde kugler er 0,50, er der altså 95% chance for at vi får en stikprøve der har en andel af røde kugler som ligger i intervallet fra 0,40 til 0,60, som vist på den øverste figur. En stikprøve vil derfor med en sandsynlighed på ca. 95% give et resultat som højst afviger 0,10 fra det rigtige tal, altså fra 0,50. Stikprøveusikkerheden er her 0,10.

På den næste figur strækker chanceintervallet sig fra 0,12 til 0,28. Stikprøveusikkerheden er her 0,08.

De fire resultater fra figurerne samler vi i en tabel:

| Andel af røde kugler<br>i populationen | Stikprøveusikkerhed<br>(Stikprøvens størrelse: 100) |
|----------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 0,50                                   | 0,10                                                |
| 0,20                                   | 0,08                                                |
| 0,10                                   | 0,06                                                |
| 0,05                                   | 0,04                                                |

Tabellen vil vi benytte på to måder. Når vi kender andelen af røde kugler i populationen, kan vi af tabellen se hvilket resultat vi kan forvente i en stikprøve på 100 kugler.

Udtager vi for eksempel en stikprøve fra en population hvor andelen af røde kugler er 0,20, kan vi forvente at stikprøvens andel af røde kugler vil ligge inden for en afstand af 0,08 fra 0,20. Stikprøven kan altså forventes at have en andel af røde kugler som ligger i området fra 0,12 til 0,28.

Udtager vi en stikprøve på 400 kugler fra den samme population, er usikkerheden kun halvt så stor. Denne stikprøve kan altså forventes at have en andel af røde kugler som ligger inden for en afstand af 0,04 fra 0,20. Og for en stikprøve på 1600 kugler kan vi forvente at andelen af røde kugler vil ligge inden for en afstand af 0,02 fra 0,20.

### Når stikprøven er udtaget

Men vi vil også bruge tabellen når vi ikke kender andelen af røde kugler i populationen. Lad os antage at vi har udtaget en stikprøve på 100 kugler, og at 18 af disse kugler er røde. Hvad kan vi da sige om den ukendte andel af røde kugler i populationen?

Vi kan selvfølgelig ikke regne med at stikprøven giver et præcist billede af populationen, og vi kan derfor ikke gå ud fra at populationens andel af røde kugler er netop 0,18. Men af usikkerhedstabellen kan vi se at usikkerheden er 0,08 ved stikprøveudtagelse fra populationer hvori andelen af røde kugler ligger omkring 0,20. Vi benytter derfor denne usikkerhed til at give et skøn over populationens andel af røde kugler. Vort skøn er at denne andel ligger inden for en afstand af 0,08 fra 0,18, dvs. populationens andel af røde kugler ligger i området fra 0,10 til 0,26.

Vi har hermed opstillet et usikkerhedsinterval eller chanceinterval for den ukendte andel af røde kugler i populationen.

### **Øvelse 6**

Undersøg ved hjælp af KUGLE1 rigtigheden af det angivne chanceinterval for en andel af røde kugler på 0,50. Benyt fx modellen K1(10,5,ja,100) og lad KUGLE1 udføre 100 eksperimenter. - Undersøg hvor mange af de 100 eksperimenter der giver en andel af røde kugler mellem 0,40 og 0,60. - Prøv derefter med udtagelse af 400 kugler. - Prøv til sidst med udtagelse af 1600 kugler.

### **Øvelse 7**

Foretag på tilsvarende måde som i øvelse 6 en undersøgelse, hvor populationens andel af røde kugler er 0,20.- Undersøg, hvor mange af de 100 eksperimenter der giver en andel af røde kugler som ligger i det angivne chanceinterval.

### **KUGLE1 kan beregne chanceintervaller**

I KUGLE1 er indlagt en beregning af usikkerhedsintervaller. Du skal her indtaste stikprøvens størrelse og antallet af udtagne røde kugler. Derefter beregner programmet et 95%-chanceinterval for den ukendte andel af røde kugler.

Når vi opstiller et usikkerhedsinterval har vi selvfølgelig ingen garanti for at det indeholder den ukendte andel af røde kugler i po-

pulationen. Men usikkerhedsintervallerne er frembragt ved en sådan metode at de i det lange løb rammer rigtigt i ca. 95% af tilfældene. Vi kan derfor sige, at der er ca. 95% chance for at det usikkerhedsinterval vi har opstillet, rammer rigtigt og virkelig indeholder det tal som angiver hvad den ukendte andel af røde kugler i populationen er.

### **Øvelse 8**

Lad KUGLE1 beregne et 95%-usikkerhedsinterval når stikprøvens andel af røde kugler er 0,20, og når den er 0,80. Benyt en stikprøvestørrelse på 100.

Overvej om det er rimeligt at stikprøveusikkerhederne i disse to situationer er ens.

### **Øvelse 9**

En politisk meningsmåling giver et parti en vælgertilslutning på 30%. Målingen bygger på en stikprøve på 1600 personer. Opstil et 95%-chanceinterval for partiets virkelige vælgertilslutning i befolkningen.

### **Øvelse 10**

En politisk meningsmåling viser at et parti som fik 9% af stemmerne ved det seneste folketingsvalg, nu har tilslutning fra 10,5% af vælgere. Meningsmålingen bygger på 1000 personer. - Undersøg ved kørsel af KUGLE1 hvad chancen er for at en stikprøve giver et resultat på 10,5% (eller mere), selv om vælgertilslutningen til partiet stadig kun er 9%.

Brug modellen K1(100,9,ja,1000). Lad KUGLE1 udføre 100 eksperimenter. Hvor mange af de 100 eksperimenter giver 10,5% røde kugler eller mere?

### Øvelse 11

Skaf dig en af de seneste politiske meningsmålinger fra et af dagbladene, og beregn ved hjælp af KUGLE1 chanceintervaller for nogle af de givne tal. Ved beregningen kan du antage at meningsmålingerne bygger på 1000 personer hvis der ikke er givet andre oplysninger.

Undersøg om der er nogle af partierne som har haft en klar fremgang eller tilbagegang siden sidste valg.

#### Hvad KUGLE1 kan

KUGLE1 kan køre dine kuglemodeller, men der er nogle begrænsninger som du må være opmærksom på. Antallet af kugler i æsken kan således højst være 10000. Et større antal vil ikke blive godtaget af programmet.

Hvad angår antallet af kugler der udtages, så gælder følgende regler:

*Hvis samme kugle må udtages flere gange, så kan der udtages op til 2000 kugler.*

*Hvis samme kugle ikke kan udtages mere end en gang, så må der højst udtages 1000 kugler. Men der kan selvfølgelig ikke udtages flere kugler end der findes i æsken. Og i almindelighed vil programmet ikke tillade at der udtages mere end 90% af kuglerne i æsken. Så hvis æsken indeholder 1000 kugler kan der højst udtages 900, og hvis æsken indeholder 500 kugler kan der kun udtages 450.*

*Hvis æsken indeholder under 250 kugler er det dog tilladt at udtage dem alle sammen, men det vil du næppe have brug for i dine kørsler.*

Du behøver ikke at huske disse regler for antallet af kugler der kan udtages, programmet vil hver gang fortælle dig hvor store tal det tillader dig at indtaste.

### 3. Opgaver til KUGLE 1

#### 1. Kugleudtagelser og usikkerhedsintervaller

Opstil et usikkerhedsinterval for den ukendte andel af røde kugler når der udtages 400 kugler og de 10% heraf er røde kugler.

Opstil dernæst et usikkerhedsinterval når der udtages 900 kugler og de 10% af kuglerne er røde.

Opstil et usikkerhedsinterval når der udtages 2500 kugler og de 10% af kuglerne er røde.

#### 2. Et politisk parti

Et politisk parti har en tilslutning på 30% af vælgerne. Udtag en stikprøve på 50 personer ved hjælp af KUGLE1 og undersøg hvilken tilslutning partiet har i denne stikprøve.

Udtag dernæst yderligere 50 personer, og undersøg partiets tilslutning blandt de 100 personer.

Læg et usikkerhedsinterval omkring det opnåede resultat.

#### 3. Rygning på skolen

I en rygeundersøgelse på en skole udspørges 100 elever. De 38 siger at de er rygere. Giv et usikkerhedsinterval over hvor stor en del af skolens elever der er rygere.

#### 4. En skæv mønt

I 100 kast med en skæv mønt opnås 67 kronekast. Angiv ved et usikkerhedsinterval hvad den ukendte chance for Krone er ved kast med den pågældende mønt.

## 5. Valget i 1998

Her er nogle resultater fra folketingsvalget marts 1998:

- A. Socialdemokratiet : 35.9%
- B. Det radikale venstre : 3.9%
- C. Det konservative folkeparti : 8.9%
- D. Centrumdemokraterne : 4.3%
- F. Socialistisk folkeparti : 7.6%
- V. Venstre : 24.0%

En meningsmåling fra efteråret 1998 viser at blandt ca. 1000 vælgere er der følgende procentvise tilslutning til de nævnte partier:

A: 22.5 B: 3.5 C: 8.6 D: 3.9 F: 13.7 V: 34.4

Undersøg ved hjælp af usikkerhedsintervaller om der er tale om en ændring i forhold til valget i marts 1998. Læg intervallerne omkring tallene fra meningsmålingerne.

## 6. Teknik i hjemmet

En forespørgsel hos 400 tilfældigt udvalgte husstande viser følgende:

- 84% har køleskab
- 54% har videobåndoptager
- 45% har computer
- 27% har mikrobølgeovn
- 16% har Internetadgang

Læg usikkerhedsintervaller omkring de indsamlede tal.

## 7. Folkeskolens afgangsprøve

Når folkeskolens afgangsprøver i matematik har været afholdt, skaffer man sig et hurtigt overblik over den forventede karakterfordeling ved at udtage en stikprøve af elever og lade deres besvarelser rette før det øvrige rettearbejde går i gang.

Et år viser stikprøven på 1834 elever at 276 vil få en karakter over 9, og at 115 vil få en karakter under 6.

Angiv ved usikkerhedsintervaller hvor stor en procentdel af årets elever der vil få en karakter over 9, og hvor stor en del der vil få en karakter under 6.

## 8. En stikprøve på 10

I en pose er 40% af kuglerne røde. Der udtages 10 gange en kugle med tilbagelægning efter hver udtagelse. Giv ved hjælp af KUGLE1 et bud på følgende sandsynligheder:

Sandsynligheden for at stikprøven vil indeholde lige præcis 4 røde kugler.

Sandsynligheden for at stikprøven vil indeholde mindst 6 røde kugler.

## 9. Et forkert resultat

I en pose er 40% af kuglerne røde og de øvrige kugler er hvide. Fra posen udtages 5 kugler ved udtagning med tilbagelægning. Find ved hjælp af KUGLE1 sandsynligheden for at stikprøven indeholder flest kugler "af forkert" farve, dvs. flere røde end hvide kugler.

Foretag den samme undersøgelse for en stikprøve på 15 kugler.

## 10. Et vareparti kontrolleres

Et vareparti kontrolleres ved stikprøveudtagning af 20 enheder. Hvis stikprøven indeholder højst 3 defekte enheder godkendes varepartiet.

Hvilken chance for at blive godkendt har et vareparti hvori 10% af enhederne er defekte?

Hvad er risikoen for at et vareparti med 20% defekte enheder bliver godkendt?

Besvar de to spørgsmål ved hjælp af KUGLE1.

#### 11. Farveblindhed

Man regner med at 5% af drengene i Danmark er farveblinde. Hvad er sandsynligheden for at der blandt 10 drenge i en klasse er mindst én der er farveblind?

Og hvad er sandsynligheden for at der blandt 20 drenge i en klasse ikke findes nogen der er farveblinde?

Besvar de to spørgsmål ved hjælp af KUGLE1.

#### 12. Hvor mange fisk i søen?

En lystfiskerforening vil gerne vide hvor mange fisk der er i deres sø. De udsætter 500 mærkede fisk og rører godt rundt i søen. I løbet af den næste måned fanger foreningens medlemmer i alt 400 fisk, hvoraf der er 40 af de mærkede fisk.

Hvor mange fisk er der mon i søen? Angiv et dit svar i form af et usikkerhedsinterval.

#### 13. En politisk måling

I en politisk meningsmåling skal udspørges så mange personer at 95%-usikkerhedsintervallerne har en længde der ikke overstiger 2%, uanset hvilken tilslutning der er tale om til de enkelte partier. Hvor mange personer skal udspørges?

#### 14. Er terningen god nok?

Ved 400 kast med en terning opnås 50 seksere. Kan det stemme med at chancen for at slå en sekser med den pågældende terning er  $1/6$ ? (Belys spørgsmålet ved hjælp af et usikkerhedsinterval).

#### 15. Er tilslutningen gået ned?

Ved en politisk meningsmåling får socialdemokratiet tilslutning fra 32% af de udspurgte 1000 personer.

Undersøg ved hjælp af KUGLE1 hvad chancen er for at partiets tilslutning blandt vælgerne i virkeligheden er 34%.

Og hvad er chancen for at tilslutningen i virkeligheden er på 35% ?

#### 16. En stavetest pr. stikprøve

Prøv en af dine kammeraters stavefærdighed på følgende måde: Du udvælger tilfældige ord fra retskrivningsordbogen, læser dem op for din kammerat, og lader ham fortælle hvordan ordene staves.

Udvælgelsen kan du foretage ved hjælp af INFA-programmet LOD. Udvælg fx 100 forskellige sidetal og udvælg et fast nummer for alle sider, fx 7. På hver af de udvalgte sider er det ord nr. 7 der indgår i testen. Du kan også udtage nogle flere faste numre, fx tre pr. side.

Når testen er udført, kan du opstille et usikkerhedsinterval for andelen af ord i retskrivningsordbogen som du mener din kammerat kan stave korrekt.

#### 17. Dit kendskab til engelske gloser

Tilrettelæg på samme måde som i opgave 16 en test til undersøgelse af din kammerats kundskaber i engelsk. Udvælg ord fra en engelsk-dansk ordbog, og undersøg hvor mange han kan oversætte korrekt.

#### 4. Hverdagens stikprøver

I stikprøveundersøgelser som dem vi har set på i det foregående, er der tale om situationer hvor stikprøvens sammensætning sker ved tilfældig udtagelse fra populationen. Populationens elementer har alle samme chance for at blive udtaget. Det udvalg af elementer der indgår i stikprøven, kan man derfor kalde et chanceudvalg. Det er for stikprøver som består af chanceudvalg at de opstillede stikprøvere regler gælder.

##### Lokalundersøgelser

Men der findes også andre former for udvalg som man kan se omtalt som stikprøver. Der kan være tale om at der foretages en undersøgelse ved hjælp af et „håndplukket“ udvalg af personer, men at undersøgelsens resultater benyttes som var de gældende for en meget mere omfattende gruppe. For eksempel kan en undersøgelse omfatte alle skolebørn i en bestemt kommune, men resultaterne benyttes som om de var gældende for hele landet. Eller en undersøgelse kan omfatte de første personer man møder på gaden eller i et selskab.

En sådan undersøgelse er ikke nogen ægte stikprøveundersøgelse, stikprøven er jo ikke noget chanceudvalg som er sammensat ved tilfældig udtagelse blandt alle populationens elementer. Vi vil kalde en sådan undersøgelse for en *lokalundersøgelse*. Den er foretaget i et lille lokalt område, eller med et specielt udvalg af elementer, og det kan ikke vides om den har gyldighed uden for dette område eller uden for dette udvalg.

Mange af de undersøgelser du i aviserne vil se omtalt som stikprøveundersøgelser, er i virkeligheden blot lokalundersøgelser. Ofte pustes de op til det helt store format og påstås at have gyldighed langt ud over det lille område hvorfra de er hentet.

##### Træfsikkerhed

I en ægte stikprøveundersøgelse har det mening at interessere sig for stikprøvens træfsikkerhed. Og ved vurderingen heraf, og ved opstillingen af et skøn over de ukendte forhold i populationen, kan reglerne for stikprøveusikkerhed benyttes. I en lokalundersøgelse derimod er det uden mening at tale om træfsikkerhed. Her er det helt afgørende problem om undersøgelsen overhovedet har gyldighed uden for lokalområdet, og dette problem kan ikke løses ved hjælp af regler fra statistik og sandsynlighedsregning. Man må her nøjes med at støtte sig til personlige meninger og fornemmelser.

Ofte vil der let kunne gives en række indvendinger som gør en lokalundersøgelses almene gyldighed meget tvivlsom. Den enkelte må så afgøre med sig selv hvor megen vægt han tillægger disse indvendinger. Selv om en undersøgelse er tilrettelagt som en ægte stikprøveundersøgelse, kan den godt være uden gyldighed for den givne population. I undersøgelser hvor personer udvælges og interviewes eller udspørges ved hjælp af spørgeskemaer, vil man uundgåeligt have en kategori af personer som ikke vil svare, eller ikke ønsker at svare. Hvis disse personer fordeler sig jævnt over populationen er risikoen for forkerte resultater ikke så stor, men hvis dette ikke er tilfældet, kan stikprøven helt miste sin gyldighed.

For eksempel kunne det tænkes at der blandt dem der svarede i en bogklubs undersøgelse af medlemmernes tilfredshed med det valgte program, især var utilfredse medlemmer.

Besvarelsene ville dermed ikke give et gyldigt billede af procentdelen af utilfredse medlemmer i bogklubben.

##### Nogle krav til hverdagens stikprøver

Hvis vi skal kunne have en rimelig tillid til en forelagt stikprøveundersøgelse må den opfylde en række mindstekrav. Den bør give oplysninger om:

1. Hvilken population undersøgelsen sigter imod.
2. Hvornår undersøgelsen er foretaget.
3. Hvordan stikprøveudtagelsen er udført.

4. Hvor stor en stikprøve der er udtaget.
5. Hvor stor en del af stikprøven der „faldt fra“.
6. Hvilken stikprøveusikkerhed der må regnes med.

Men før man tager stilling til om de seks krav er opfyldt, bør man overveje om undersøgelsen overhovedet er værd at beskæftige sig med. I medierne bringes jævnligt undersøgelser som belyser spørgsmål der kun kan beskrives som pop og pjat.

Hvis der er tale om en undersøgelse som er udført ved hjælp af interview af en række udvalgte personer, bør der endvidere gives oplysninger om hvilke spørgsmål der blev stillet til de udspurgte. I interviewformen kan der være mange forhold der kan give anledning til fejl og mistolkninger. Måske har de udspurgte kun kunnet vælge mellem nogle få svarmuligheder som interviewer har fastlagt på forhånd. Måske har de haft lov til at give „frie svar“, men interviewer har derefter selv placeret svarene i rubrikker så alle individuelle forskelle i svarene er forsvundet. Og måske var spørgsmålene af en sådan art at man må regne med at mange af de udspurgte ikke har været i stand til - eller ikke har ønsket - at give ærlige svar på dem.

Stikprøveundersøgelser er en vanskelig affære, både for dem der udfører undersøgelsen og for dem der gør brug af dem. Der er så mange muligheder for at undersøgeren bevidst eller ubevidst kan vildlede os at vi aldrig vil kunne sikre os 100%. Stikprøveundersøgelser er derfor i udpræget grad en tillidssag.

### **Berømte vildskud**

Gennem tiderne er der set mange eksempler på at stikprøveundersøgelser har ført til forkerte resultater. Den mest omtalte bommert i stikprøvehistorien blev begået i USA i 1936 ved forudsigelserne af resultatet af præsidentvalget.

Kampen dette år stod mellem Landon og Roosevelt. Et stort tidskrift havde udsendt spørgeskemaer og kunne på grundlag af over 2 millioner besvarelser oplyse at Landon ville være sikker vinder.

Men ved valget vandt Roosevelt med en af de største sejre i præsidentvalgets historie.

Hvordan kunne det nu være at en stikprøve på over 2 millioner besvarelser kunne give så skævt et billede? Der er to nærliggende forklaringer.

For det første var spørgeskemaerne sendt ud efter adresser i telefonbøger og medlemslister fra automobilklubber o.lign., og det kunne give en skæv dækning af vælgerpopulationen. For det andet var der en meget stor procentdel af ikke-svarere. Der blev nemlig udsendt 10 millioner spørgeskemaer og kun ca. 2,3 millioner kom tilbage. Blandt svarene kan der udmærket have været en for stor andel af dem der var utilfredse med den siddende præsident, Roosevelt.

Eksemplet viser at selv stikprøver på 2 millioner elementer ikke behøver at være pålidelige. Det skal dog også nævnes at der ikke i denne undersøgelse var tale om en ægte stikprøveundersøgelse, da stikprøven ikke var noget chanceudvalg udtaget blandt alle vælgere.

Også ved præsidentvalget i USA i 1948 gik det galt. Alle undersøgelser forud for valget viste at republikanernes kandidat, Dewey, ville vinde en stor sejr over præsident Truman. Gallup-instituttets forudsigelse af Trumans stemmeandel var en af de mest nøjagtige, men den viste sig alligevel at være 10% for lav, og Truman vandt valget.

Heller ikke ved denne lejlighed var der tale om stikprøveundersøgelser med chanceudvalg. Ganske vist blev der foretaget interview af vælgere fra alle samfundslag, men udvælgelsen af disse vælgere var i nogen grad overladt til interviewerens egen afgørelse, og dermed var der en risiko for at ikke alle samfundslag blev lige godt repræsenteret i stikprøven. En anden forklaring på de dårlige forudsigelser kan være at forholdsvis mange vælgere ændrede beslutning kort før valgdagen. I 1948, før datamaskinernes tid, måtte stikprøveundersøgelserne nemlig afsluttes tre uger før valgdagen.

## Danske fejlvurderinger

Men også nu til dags kan det gå skævt, trods bedre udviklede stikprøvemetoder og hurtigere databehandling. Forud for folketingsvalget i Danmark i oktober 1979 lød alle forudsigelser fra de politiske meningsmålinger på at Socialdemokratiet ville gå tilbage, men ved valget fik partiet en fremgang fra 37,0% til 38,3% af stemmerne.

Det samme skete ved folketingsvalget i marts 1998 hvor alle meningsmålinger de sidste 14 dage før valget tydede på en klar borgerlig sejr. Alligevel gik Socialdemokratiet frem, og regeringen kunne blive siddende.

Meningsmålinger kan altså ikke erstatte folketingsvalg, der kan stadig forekomme overraskelser når vælgerne går til stemmeurnerne.

## Eksempler til drøftelse

### 1. Skæve stikprøver?

Giv din kritik af valget af stikprøver i følgende undersøgelser.

En undersøgelse af befolkningens rygevaner

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte medlemmer i en idrætsforening.

En undersøgelse af befolkningens kirkebesøg

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte københavnere.

En undersøgelse af befolkningens biografbesøg

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte gymnasieelever i København.

En undersøgelse af befolkningens kondivaner

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte deltagere i Eremitageløbet.

En undersøgelse af hvor mange der ser sport i tv

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte elever i 9. klasse.

En undersøgelse af hvor mange der ser opera i tv

Stikprøve: Tilfældigt udvalgte elever i 9. klasse.

## 2. En folkeundersøgelse

I en sundhedskampagne opfordrer man folk til at få målt deres blodtryk. Blandt de 2000 der møder op, konstateres forhøjet blodtryk hos ca. 400. Man meddeler da at det skønnes at 20% af befolkningen har forhøjet blodtryk.

Kommenter meddelelsens troværdighed.

## 3. Folkets røst

En formiddagsavis spørger fem personer på gaden om deres mening om EU. Af de fem er de tre imod EU og de to er for EU.

Hvad kan man slutte af denne undersøgelse ?

## 4. Stikprøvestørrelse 1

"De fleste lærer meget mere – jeg gør i hvert fald – hvis vi fik lov til at lave noget mere i timerne i stedet for at sidde med bøger", siger Charlotte i 9. klasse.

Hvad kan vi bruge denne "stikprøveundersøgelse" til?

## 5. Skoleelever har forrygende travlt

1998: En undersøgelse fra Pontoppidanskolen i Broby på Midtfyn viser at 58% af eleverne i de ældste klasser har erhvervsarbejde, mange omkring 10 timer om ugen og nogle endnu flere.

## 6. Skolerne vælger selv

I en international matematikprøve deltager 6. klasser fra Danmark. Der udtages ved lodtrækning et antal skoler, og fra hver af disse skoler deltager en 6. klasse i prøven. Hvis skolen har mere end én 6. klasse, afgør skolen selv hvilken klasse der deltager i prøven.

## 7. Eleverne vælger selv

I en international undersøgelse af skoleelevers kendskab til EU

deltager elever fra 9. klasse. Et antal skoler udtages ved lodtrækning og fra hver af disse skoler udvælges to elever fra 9. klasse. De to elever udtages ved lodtrækning blandt dem der frivilligt melder sig som deltagere.

### **8. I folkeoplysningens tjeneste**

1991: "Radikale vasker sig mest". En undersøgelse viser at 76% af dem der stemmer radikalt, går i bad om morgenen mod 59% af befolkningen som helhed. Samme undersøgelse viser også at de radikale er dem der hyppigst spiser yoghurt til morgenmad.

### **9. Flere 14-årige har sexdebut**

1986: En undersøgelse fra seks skoler i Viborg viser at flere unge end hidtil antaget har deres seksuelle debut før de er fyldt 15 år.

### **10. Se så at gå i gang med bøgerne!**

1996: En undersøgelse af 6000 danskere over 16 år viser at hos folk med en lang videregående uddannelse var der kun 2% der ikke længere havde egne tænder. Geografisk var det især folk fra Ribe, Viborg og Ringkøbing amter der havde den mest udprægede tandløshed.

### **11. Når stikprøverne er uenige**

Meldinger fra forskellige trafikundersøgelser om spritbilister på de danske veje:

1983: Årligt kører 400 000 spritkørsel uden at blive opdaget.

1985: Hver anden bilist har kørt spritkørsel i år.

1988: Dagligt kører 60 000 spritkørsel på de danske veje.

1990: Hver dag kører 20 000 bil med for meget alkohol i blodet.

### **12. En rigtig lokalundersøgelse**

1985: For nylig vakte en meddelelse om at 8 ud af 10 børn er skilsmissebørn, voldsomt røre blandt politikere og i pressen. Nu viser det sig at tallet er et rent gæt der stammer fra en tilfældig rundringning til 10 børnehaver.

### **13. Sønderjyske børn er lidt mere ædruelige**

1989: En undersøgelse blandt 1165 elever i 7.-9. klasse i otte sønderjyske kommuner viser at 34% af de 15-årige og 8% af de 13-årige drikker alkohol en eller flere gange ugentligt. En tilsvarende undersøgelse i Roskilde amt viser at 40% af de 15-årige og 10% af de 13-årige her drikker spiritus mindst en gang om ugen.