MI 146

ISBN 87-7701-690-4
ISSN 1398-6716

TALKUNNEN

7

Allan C. Malmberg

# Tal

## Gå på taljagt!

INFA Matematik - 1999

***Talkunnen***

*Serien Talkunnen indeholder fremstillinger af en række emner som kan give ideer til behandlingen af tal i en elementær undervisning.*

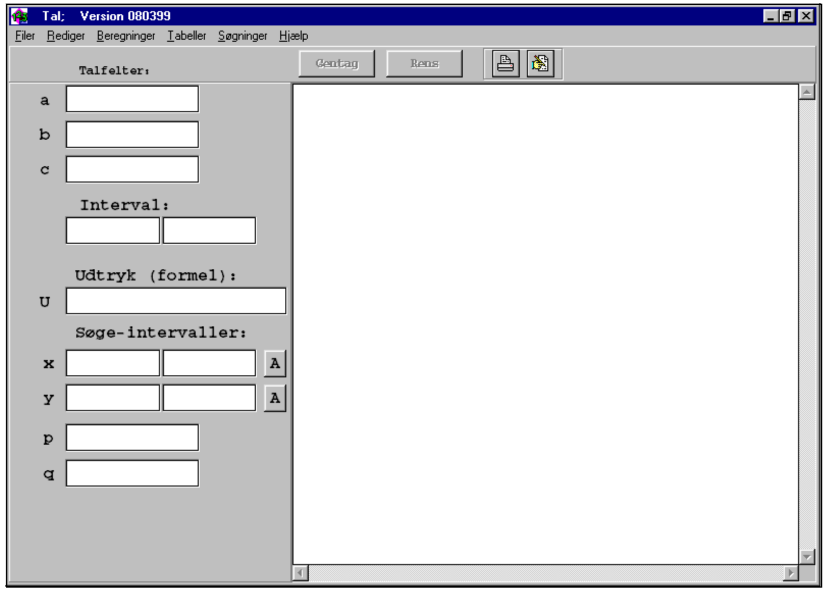
## Indholdsfortegnelse TALKUNNEN 7





## TAL

TAL er et program der kan benyttes ved arbejdet med hele tal. I TAL kan der foretages beregninger og søgninger inden for området 1 - 99 999 999, altså med tal der indeholder op til 8 cifre.




### Inddata til TAL

Der er på skærmen tre *Tal-felter* til indtastning af tal: felterne a, b og c. Umiddelbart under disse felter findes et *Interval-felt* til angivelse af et talinterval.

Endvidere findes et *Udtryk-felt* U hvor der kan indtastes algebraiske udtryk i én variabel (x) eller i to variable (x og y).

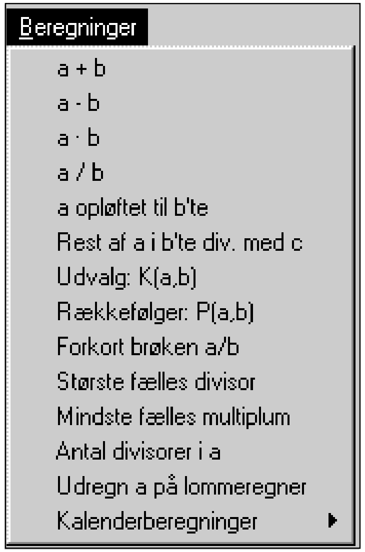
Til *Udtryk-feltet* er knyttet to *Søge-intervaller*. Hvis udtrykket U indeholder én variabel, skal det ene søgeinterval udfyldes. Hvis udtrykket indeholder to variable, skal begge søgeintervaller udfyldes.

Endelig er der et *p-felt* og et *q-felt* som hver kan indeholde en talkonstant. Disse felter benyttes i visse talsøgninger.

**Hvad TAL kan**
Hovedmenuen i TAL indeholder følgende valgmuligheder:

Beregninger Tabeller Søgninger

**Beregninger**




Her kan udføres de almindelige taloperationer på tal i a-feltet og b-feltet. Ved division angives kvotient og rest.

Til brug for talteoretiske opgaver kan programmet beregne resten når a i b'te divideres med c. De tre talfelter for a, b og c skal være udfyldt for at denne beregning kan udføres.

For givne værdier af a og b kan udregnes *K(a,b)* og *P(a,b),* antallet af kombinationer og antallet af permutationer når der fra en mængde på a elementer udtages b.

Endvidere kan beregnes største fælles divisor for givne tal: Hvis alle tre talfelter a, b og c er udfyldt, foretages beregningen af største fælles divisor for de tre tal a, b og c. Hvis c-feltet ikke er udfyldt, foretages beregningen af største fælles divisor for tallene a og b. - Tilsvarende foretages beregninger af mindste fælles multiplum for tre eller to tal.



Under *Beregninger* kan også angives antallet af divisorer i a: Her medregnes 1 og tallet a selv. For a=4 er antallet af divisorer derfor tre: 1, 2 og 4. - Endvidere anføres antallet af primdivisorer, dvs. antallet af divisorer som er primtal. For a=4 er antallet af primdivisorer én, nemlig divisoren 2.

Udover antallet af divisorer og primdivisorer i tallet a angives antallet af *uforkortelige ægte brøker* med a som nævner. For a=4 er antallet af sådanne brøker to: 1/4 og 3/4. - Endvidere angives *summen af alle de ægte divisorer* i tallet a. De ægte divisorer er alle tallets divisorer med undtagelse af tallet selv. De ægte divisorer i 4 er altså 1 og 2.

Af hensyn til indlæggelsen af større tal i a-feltet, er der en mulighed for at lade dem overføre direkte fra en lommeregner-udregning til a-feltet: En lommeregner kan fremkaldes på skærmen, og der kan foretages udregninger ved tastetryk med musen. Det beregnede tal kan overføres til a-feltet.

Under *Beregninger* kan endvidere foretages nogle typer af *kalenderberegninger*: For en given dato kan beregnes den tilhørende ugedag, og for to datoer kan beregnes hvor mange dage der skal tælles frem fra den ene dato for at nå frem til den anden. Endvidere kan der tælles et givet antal dage frem eller tilbage fra en given dato. Antallet indtastes i a-feltet.

Kalenderberegningerne i TAL er begrænset til tiden fra 1. januar 1701 og fremefter. Ønskes der beregningerne som går længere tilbage i tiden, henvises til INFA-programmet *Kalender*.

**Tabeller**
Her er der følgende muligheder:


Ved „*Tilfældige tal*" udvælges tal ved tilfældig udtagelse med tilbagelægning. Programmet spørger om hvor mange tal der skal udtages.

Du er muligvis ikke klar over hvad *trekanttal* er. Det er de tal der fremkommer når man tæller byggesten i trekanter der opbygges på følgende måde:

```
                              *
                  *          * *
       *         * *        * * *
```

Ved hver ny trekant kommer der et ekstra lag på forneden. Hvis du tæller op, vil du se at de første trekanttal er 1, 3 og 6. Trekanttallene kan beregnes ved hjælp af udtrykket

$$x*(x+1)/2$$

Hvis du i dette udtryk indsætter x=1, x=2 og x=3, får du tallene 1, 3 og 6.

Under *rekursion* kan udskrives en tabel over værdierne af et rekursivt udtryk. Til eksempel kan i U-feltet indtastes udtrykket



x2+x1. Programmet vil da foretage beregninger af værdier U(n), givet ved følgende rekursive sammenhæng:

$$U(n+3) = U(n+2) + U(n+1).$$

Når startværdien for U(1) og U(2) sættes til 1, vil denne rekursion frembringer de kendte *fibonacci-tal*.

**Søgninger**
Der kan udføres søgninger som vedrører udtrykket i U-feltet. Det kan fx undersøges om der i variabel-intervallerne for x og y findes værdier for hvilke det indtastede udtryk er et primtal.


For eksempel kan udtrykket U være givet ved 5x + 17, og x-intervallet være talområdet 1..20. Ved anvendelsen af *Søg* finder vi at U er et primtal for x=4. Det givne interval gennemsøges indtil det opnås at U er et primtal, og den første værdi der giver gevinst er x=4. På skærmen får vi en liste over alle de x-værdier i det givne interval som gør udtrykket U til et primtal.

Vi kan i stedet søge efter værdier som gør udtrykket U til et kvadrattal. Her får vi at vide at der ikke findes nogen værdi i det givne x-interval som gør udtrykket U til et kvadrattal.

Vi kan også undersøge om der findes værdier der gør U til et trekanttal.

**Afprøv „Beregninger“**
Indtast 15 i a-feltet og 6 i b-feltet. Gå ind i menuen „*Beregninger*“ og afprøv de fem første menupunkter. Ved division vil du se at der regnes med rest.

Under *Udvalg* får du beregnet hvor mange forskellige udvalg der kan udtages fra en samling på a personer, når hvert udvalg skal bestå af b personer.

Ved *Rækkefølger* får du antallet af forskellige opstillinger der kan foretages når der fra a personer skal udvælges b personer, og disse b personer skal opstilles i en række.

For a=15 og b=6 vil du se at antallet af udvalg er 5005.

Hvis du prøver med nogle mindre værdier for a og b, kan du lettere overskue situationen. Prøv fx med a=4 og b=2.

Der kan da udtages 6 udvalg. Hvis vi kalder personerne A,B,C og D, kan vi fra de 4 personer udtage følgende udvalg bestående af 2 personer:

AB, AC, AD, BC, BD, CD

altså i alt 6 udvalg.

Af rækkefølger kan der opstilles 12. Hvert af de seks udvalg kan jo give to rækkefølger. For eksempel giver udvalget AB de to rækkefølger AB og BA.

Gå nu tilbage til a=15 og b=6 og beregn *største fælles divisor* og *mindste fælles multiplum* for a og b. Kontroller at udregningen giver de resultater du have forventet.

Prøv ved hjælp af næstsidste menupunkt under Beregninger at få en lommeregner frem på skærmen. Udregn på lommeregneren 2347 gange 12, gå ind i Rediger-menuen på lommeregneren, kopier



resultatet og klik på Indsæt til højre for a-feltet. Gå derefter ind i „Tabeller“ og find primfaktoropløsningen af a.

Afprøv *Kalenderberegninger* med nogle eksempler. Datoer skal indtastes i rækkefølgen dag-måned-år som fx: 2.1.1999 (eller 02.01.1999). Bemærk at årstallet skal skrives fuldt ud.

**Afprøv „Tabeller“**
Indtast i a-feltet: 64. Gå derefter ind i menuen *„Tabeller*“.

Afprøv de første fire menupunkter (efter hvert menupunkt kan du skaffe dig en ren skærm ved klik på tasten *Rens*):

Er a primtal, kvadrattal etc.

Primfaktoropløsning af a

Divisorer i a

Naboer: primtal, kvadrattal etc.

Undersøg om programmet udskriver de resultater du havde forventet.

Udfyld dernæst feltet „*Interval*“. Indtast 1 i det venstre felt og 100 i det højre. Vi arbejder nu med intervallet der omfatter tallene 1,2,3,...,100.

Gå igen ind i menuen „*Tabeller*“ og afprøv de fem nederste muligheder:

Primtal i interval

Kvadrattal i interval

Kubiktal i interval

Trekanttal i interval

Tilfældige tal i interval

De tilfældige tal der udskrives fra programmet, kan du tænke dig udvalgt ved lodtrækning. I en pose er der en kugle for hvert af de tal der er med i det valgte talinterval. Fra posen udtages en kugle og dens nummer noteres. Derefter lægges kuglen tilbage i posen, og der udtages igen en kugle, osv. - Samme tal kan altså godt udtrækkes flere gange. Prøv at lade programmet udskrive ti tilfældige tal fra intervallet [1;100].

**Afprøvning af „Søgninger“**

Indtast i U-feltet udtrykket: 4x + 1. Udfyld endvidere x-intervallet med tallene 1 og 25. - Vi arbejder altså med de tal der kan angives på formen 4x+1, hvor x gennemløber værdierne 1, 2, 3,..., 25.

Gå ind i menuen „*Søgninger*“ og vælg det første menupunkt. På skærmen vil vi nu få en liste over de x-værdier for hvilke 4x+1 er et primtal. Undersøg om listen har det rigtige indhold.

Prøv dernæst menupunktet „*Søg: U er et sammensat tal*“. Her vil du få de x-værdier som gør 4x+1 til et sammensat tal.

Afprøv derefter de næste tre menupunkter, og søg efter kvadrattal, kubiktal og trekanttal. Kontroller at listen indeholder de rigtige tal.

Indtast nu tallet 7 i p-feltet, og vælg søgningen „U er *delelig med p“.* Du får nu en liste over de x-værdier for hvilke det gælder at 7 går op i tallet 4x+1. Undersøg igen om listen har det rigtige indhold.

Indtast tallet 65 i p-feltet, og undersøg hvornår udtrykket 4x+1 er lig med p.



Indtast dernæst 97 i q-feltet og undersøg ved hjælp af det sidste menupunkt hvornår 4x+1 har en værdi i området 65..97.

Indtast 2 i p-feltet og undersøg for hvilke x-værdier udtrykket U har 2 divisorer.

Når der fremkommer en liste over søgningens resultater, vil der til slut blive givet *en sorteret liste* over de værdier udtrykket U har antaget. Tallene i denne liste er sorteret efter størrelse så man hurtigt kan se om en bestemt talværdi forekommer. - Hvis listen bliver for lang, dvs. indeholder over 1000 linier, vil du blive opfordret til at opdele søgningen i flere mindre omfattende søgninger.

**Hvad kan indtastes i U-feltet?**

Udtrykkene i U kan fx være af følgende form (idet tegnet ^ benyttes til potensopløftning):

7x^2 + 5x + 13 eller x^2 + 2x - y^2 + 17

I udtrykkene kan også benyttes a, b og c, som fx

ax^2 + bx + c eller a(x^3 + x^2 - 3x + 7)

hvor talværdierne for a, b og c er angivet i tal-felterne øverst til venstre på skærmen. Alle de benyttede konstanter skal være hele tal.

Ved multiplikation af to parenteser skal der sættes multiplikationstegn * mellem parenteserne.

Der kan i U godt indgå divisioner, men kun U-værdier som er hele tal, vil blive godkendt i søgningen.

**Hvordan udføres søgningen?**
Ved udtryk som indeholder både x og y vil søgningen foregå på følgende måde: Værdien af x sættes til det første tal i x-intervallet, og y gennemløber hele y-intervallet. Derefter sættes x til den anden værdi i x-intervallet, og y gennemløber igen hele y-intervallet, osv.

Af hensyn til søgetiderne ved udtryk i to variable anbefales det at x- og y-intervallerne indskrænkes mest muligt.

**Mere økonomisk søgning**
Hvis y-intervallet angives som [x;100], vil søgningen kun omfatte y-værdier fra x og op til 100. På tilsvarende måde kan et y-interval angives som [1;x]. Søgningen omfatter nu kun y-værdier fra 1 og op til værdien af x.

I x- og y-intervallerne kan venstre endepunkt være tal fra 0 og opefter. Som værdier for p og q tillades også negative hele tal.

**Søgning kun for primtalsværdier**
Til højre for x- og y-intervallerne findes en knap som kan sættes i to positioner: A og P. Hvis knappen er i position A, gennemføres søgningen for alle tal i det angivne interval. Hvis knappen er i position P, gennemføres søgningen kun for primtalsværdier.

**Rettelse i U-udtrykket**
Ved indtastning af et nyt udtryk i U-feltet dobbeltklikkes på U-feltet: Det gamle indhold i feltet kan nu overskrives.

**Gentag**
På skærmen findes en *Gentag-knap*. Ved aktivering af den gentages den foregående beregning med de nye inddata der er indtastet. Med *Gentag* slipper brugeren for en række åbninger af programmets menupunkter.



## Opgaver til TAL: GÅ PÅ TALJAGT!

Når der i opgaverne søges efter tal som opfylder givne betingelser, er der tale om hele positive tal.

Opgaverne er opdelt i afsnit med følgende overskrifter:

1. Primtal og sammensatte tal
2. Trekanter med heltallige sidelængder
3. Tal i forklædning
4. Find tallet!
5. Ligninger i hele tal
6. Divisorer og delelighed
7. Klassiske taltyper

## 1. Primtal og sammensatte tal

**1.1 33 sammensatte tal på rad**
Find i området 1000..2000 33 tal på rad som alle er sammensatte tal.

**1.2 99 sammensatte tal på rad**
En sådan række af tal findes første gang i området 390000..400000. Find tallene.

**1.3 Primtal af typerne 4x+1 og 4x-1**
Når et primtal større end 2 divideres med 4, må divisionen enten give 1 eller 3 som rest.

Undersøg primtallene i området 10..1000, og fastlæg hvor mange primtal der findes her af hver af de to typer.

NB Første gang føringen mellem de to typer af primtal skifter, indtræffer ved primtallet 26861. Prøv at finde ud af hvornår føringen derefter skifter igen.

### 1.4 Primtal af typerne 6x+1 og 6x-1
Når et et primtal større end 3 divideres med 6, må divisionen enten give resten 1 eller resten 5.

Undersøg i området 10..1000 hvor mange primtal der er af hver af de to typer.

### 1.5 Lutter primtal?
Undersøg tallene $2x^2 + 29$ for x= 0,1,2,3....28. Hvor mange af dem er primtal?

### 1.6 En primtalsformel
For hvilke tal x i området 1..50 er tallet

$$x^2 - x + 41$$

et primtal?

### 1.7 En anden primtalsformel
For hvilke tal x i området 1..80 er tallet

$$x^2 - 79x + 1601$$

et primtal?

### 1.8 En tredje primtalsformel
Undersøg hvilke x-værdier i området 1..100 der gør tallet

$$x^2 + x + 17$$

til et primtal.



### 1.9 Endnu en primtalsformel
Undersøg hvilke x-værdier i området 1..100 der gør tallet

$$x^2 - 81x + 1681$$

til et primtal.

### 1.10 Hvor mange af dem er primtal?
Undersøg de tal der er 1 større end en 10-potens:

$$10^x + 1$$

altså tallene 11, 101, 1001, osv.

Hvilke af disse tal er primtal?

### 1.11 Mersenne-tal
Undersøg hvilke af tallene $2^x$-1 der er et primtal. Lad x antage værdierne 1..25.

[*Primtalsrekorder*. Tal af formen $2^x - 1$ omtales efter den franske matematiker *Marin Mersenne* (1588-1648) som Mersenne-tal. I 1876 blev påvist at Mersenne-tallet $2^{127} - 1$ er et primtal. Dette tal var indtil 1951 det største kendte primtal, men med datamaskinernes anvendelse inden for den talteoretiske søgning er langt større primtal fundet.

Primtalsrekorden af 1998 indehaves af Mersenne-tallet $2^{3021377} - 1$, et tal der skrives med 909526 cifre. For tiden (1998) kendes kun 37 primtal af formen $2^x$-1, men jagten på nye Mersenne-primtal fortsætter.]

### 1.12 Primtalstvillinger
To tal x og x+2 der begge er primtal, kaldes primtalstvillinger. Det første par af primtalstvillinger er 3 og 5, det næste er 5 og 7.

Undersøg hvor mange par af primtalstvillinger der findes i området 1..1000.

Undersøg hvor mange par af primtalstvillinger der findes i området 4001..5000.

Undersøg ved eksempler om det er rigtigt at 12 altid går op i summen af to primtalstvillinger når der ses bort fra det første par, 3 og 5. Kan du give et argument for at det må være sådan?

[Allerede *Euklid* giver et bevis for at der findes uendelig mange primtal, men endnu er der ikke ført noget bevis for at der også findes uendelig mange par af primtalstvillinger. Der kendes primtalstvillinger med over 3000 cifre.]

**1.13 Nogle primtalstvillinger**
For hvilke tal x i området 1..13 er de to nabotal til tallet

30*(27-2x)*(15-x)

begge primtal?

**1.14 Hvor tæt ligger primtallene?**
Find antallet af primtal i talområderne:

| | |
|---|---|
| (1) 1..999 | (2) 9001..9999 |
| (3) 99001..99999 | (4) 999001..999999 |
| (5) 9999001..9999999 | (6) 99999001..99999999 |

NB Inden for TALs talområde findes i alt 5 761 455 primtal.
Prøv ikke på at få TAL til at udskrive dem.



**1.15 Hvor tæt ligger primtalstvillingerne?**
Undersøg hvor mange par af primtalstvillinger der ligger i de talområder der er nævnt i den foregående opgave.

NB Opstil ved hjælp af *Søg* en procedure som direkte udskriver en liste over primtalstvillingerne i de forelagte områder.

**1.16 Primtallenes ujævne fordeling**
Undersøg hvor mange primtal der ligger i de to områder

10000000..10000100 og 10000100..10000200

**1.17 Ti primtal i en differensrække**
Start ved tallet 199. Find en række på 10 tal: 199, 199+a, 199+2a, 199+3a,...,199+9a som alle er primtal.

**1.18 Hvor mange af dem er primtal?**
Undersøg hvor mange af de tal som skrives med lutter 1-taller

1, 11, 111,..., 11111111

der er primtal.

[I denne række af tal er der op til det tal der skrives med 10000 1-taller kun fundet fire primtal.]

**1.19 Er de alle primtal?**
Undersøg hvor mange tallene

31, 331, 3331, ..., 33333331

der er primtal.

**1.20 Hvor længe går det godt?**
Start med tallet 43 og gå frem i listen over ulige tal:
Først springes ét ulige tal over, du kommer da til primtallet 47.
Derefter springes to tal over, og du kommer til primtallet 53.
Derefter springes tre tal over, og du kommer til primtallet 61.

Fortsæt på den beskrevne måde med at gå frem i listen over ulige tal. Hvornår kommer du til et tal som ikke er primtal?

**1.21 Et tilfælde?**
Undersøg for x= 1,2,3,..,22 hvornår værdien af udtrykket

$$17*2^x - 1$$

er et primtal.

Foretag dernæst den samme undersøgelse for udtrykket

$$x^4 + 1$$

**1.22 Rest 1 ved division med 40**
Find fem primtal der giver resten 1 ved division med 40.
Undersøg dernæst for hvert af de fundne tal om det kan skrives på formen

$$x^2 - 10y^2$$

**1.23 Rest 1 ved division med 24**
Find fem primtal som alle giver resten 1 ved division med 24.
Undersøg om de fundne tal kan skrives på formen

$$x^2 + 6y^2$$



**1.24 Rest 11 ved division med 24**
Find fem primtal som alle giver resten 11 ved division med 24.
Undersøg om de fundne tal kan skrives på formen

$$2x^2 + 3y^2$$

**1.25 Hvilke primtal?**
Find ved hjælp af TAL de primtal x i området 1..1000 for hvilke det gælder at både 2x-1 og 2x+1 er primtal.

Hvordan ville det gå hvis du udvidede talområdet til at omfatte tallene 1..1 000 000? Kan du redegøre for hvad resultatet ville blive uden at du først foretager en søgning ved hjælp af TAL?

# 2. Trekanter med heltallige sidelængder

### 2.1 En katete har længden 10
Find de retvinklede trekanter hvor en af kateterne har længden 10, og hvor den anden katete højst har længden 25.

### 2.2 Hypotenusen har længden 20
Find de retvinklede trekanter som har en hypotenuse af længden 20.

### 2.3 Pythagoræiske trekanter
Find alle de retvinklede trekanter hvis sidelængder er hele tal i området 1..25.

### 2.4 Hypotenusen 1 større end den ene katete
Fastlæg fire retvinklede trekanter (med sidelængder under 50) hvor hypotenusen er 1 større end den største katete.

### 2.5 Kateterne har en forskel på 1
Fastlæg tre retvinklede trekanter hvor den ene katete er 1 større end den anden.

### 2.6 En side af længden 47
Find en retvinklet trekant med heltallige sidelængder og med en katete af længden 47.

Undersøg for en række tal i området 1..100 om de kan være sidelængde for en katete i en retvinklet trekant. Opstil en antagelse om hvilke tal der kan forekomme som katetelængde og test din antagelse på nogle eksempler.



### 2.7 Primtalslængder
Find fire retvinklede trekanter hvor såvel længden af hypotenusen som længden af en af kateterne er et primtal.

### 2.8 Iagtagelser i pythagoræiske trekanter
Lav en liste over sidelængderne (a,b,c) i ti pythagoræiske trekanter.

Undersøg i din liste om det er rigtigt at

(1) Mindst et af de tre tal a, b og c er lige

(2) Såvel 3 som 5 går op i et af tallene a,b,c

(3) Højst ét af tallene a,b,c er et kvadrattal

### 2.9 Find hvilket tal der går op
Benyt din liste fra foregående opgave. Undersøg hvilket tal der altid vil gå op i produktet af kateternes længder i en retvinklet trekant, og hvilket tal der altid vil gå op i produktet af alle tre sidelængder.

Afprøv din formodning ved nogle flere eksempler.

### 2.10 Hvis hypotenusens længde er et primtal
Lav en liste over pythagoræiske trekanter, og find i listen de trekanter hvor længden af hypotenusen er et primtal.

Undersøg hvilken form disse primtal er af: Kan de skrives som 4x+1 eller som 4x+3? Opstil en formodning om hvilke primtal der kan forekomme som længden af hypotenusen i en retvinklet trekant, og afprøv den gennem nogle eksempler.

# 3. Tal i forklædning

### 3.1 Sum af kvadrattal og primtal
Find de tal i området 5..100 som kan skrives som en sum af et kvadrattal (0 medregnet) og et primtal.

### 3.2 Sum af to kvadrattal
Find de tal i området 1..100 som kan skrives som summen af to kvadrattal.

Find det mindste tal som på to måder kan skrives som summen af to kvadrattal.

Find de primtal (større end 2) som kan skrives som summen af to primtal. Undersøg hvilken rest disse primtal giver når de divideres med 4.

### 3.3 Hvilke lige tal opfylder kravet?
Undersøg gennem eksempler hvilke lige tal der kan skrives på formen

$x^2 - y^2$ (y kan eventuelt være 0)

Opstil en hypotese og afprøv den gennem en række eksempler.

### 3.4 Hvilke ulige tal opfylder kravet?
Undersøg gennem eksempler hvilke ulige tal der kan skrives på formen

$x^2 - y^2$ (y kan eventuelt være 0)

Opstil en hypotese og afprøv den gennem en række eksempler.

Undersøg også hvilke ulige tal der kun på én måde kan skrives på den anførte form.



### 3.5 Sum af et kvadrattal og et kubiktal
Find de tal i området 1..100 som kan skrives som summen

$x^2 + y^3$ (x og y kan eventuelt være 0)

### 3.6 Sum af kubiktal og et tal i femte
Tallet 1032 kan på to måder skrives som en sum af et kubiktal og et tal opløftet i 5'te. Find de to måder.

Det samme gælder for tallet 9504. Find de to omskrivninger.

### 3.7 Primtal som er sum af to kvadrattal
Undersøg hvilke primtal i intervallet 1..500 der kan skrives som summen af to kvadrattal.

### 3.8 Tre tal i træk
Find tre på hinanden følgende tal som alle kan skrives som summen af to kvadrattal.

### 3.9 Tallet 1105
1105 er det mindste tal som på fire måder kan skrives som summen af to kvadrattal. Find de fire måder.

### 3.10 Sum af to kubiktal
Find de tal som på to måder kan skrives på formen

$x^3 + y^3$

og hvor x og y begge ligger i området 1..35.

### 3.11 En fejlagtig formodning
Formodningen „Ethvert ulige tal større end 1 er enten et primtal

eller summen af et primtal og det dobbelte af et kvadrattal“ er forkert. I talområdet op til 100 000 findes der to undtagelser. De ligger begge mellem 5700 og 6000.
Find dem.

### 3.12 Tallet 252

Dette tal kan på to måder skrives som summen af tre kubiktal. Find de to omskrivninger.

### 3.13 Goldbachs formodning

Goldbach fremsatte i 1742 den formodning at ethvert lige tal større end 2 kan skrives som summen af to primtal.

Undersøg ved hjælp af TAL om formodningen passer for tallene i området 5..100.

### 3.14 Tallet 325

Tallet 325 er det mindste tal der på tre måder kan skrives om en sum af to kvadrattal. Find de tre måder.

### 3.15 Tallet 1729

Tallet 1729 er det mindste tal der på to måder kan skrives som summen af to kubiktal. Find de to måder.

### 3.16 Tallet 5525

Tallet 5525 er det mindste tal der på seks måder kan skrives som summen af to kvadrattal. Find de seks måder.



## 4. Find tallet!

### 4.1 Primtalsafstand

Om et tal T oplyses:

1. T er et primtal
2. T er mindre end 200
3. Det næste primtal i talrækken er T+12

Find T

### 4.2 Nitten sammensatte tal

Om et tal T oplyses:

1. T er mindre end 1000
2. Tallene T+1, T+2,..., T+19 er alle sammensatte tal

Find T

### 4.3 Et signalement af T

Om et tal T oplyses:

1. T er fircifret
2. T er delelig med 461
3. T har kun 4 divisorer (1 og T medregnet)
4. T kan ikke skrives som summen af $2x^2$ og et primtal

Find T

### 4.4 Hvor gammel var han?

En mand var x år i året $x^2$. Hvor gammel var han da han deltog i de olympiske lege i Paris i 1924?

**4.5 Find tallet**
Tallet T giver rest 1 ved division med 2, 3 og 5, men rest 0 ved division med 7. Find det mindste tal der passer med disse oplysninger.

**4.6 Sum af kvadrattal**
Summen af første x kvadrattal er givet ved formlen

x*(x+1)*(2x+1)/6

Hvornår er denne sum selv et kvadrattal? Det er den for x=1, men der findes yderligere én løsning. Find den!

**4.7 Kvadrattal som også er trekanttal**
Undersøg om der findes kvadrattal i området 1..5000 som også er trekanttal.

**4.8 Sum af to kubiktal**
Find det mindste trekanttal (større end 1) som kan skrives som en sum af to kubiktal.

**4.9 Kvadrattal som ender på 444**
Find de to mindste kvadrattal som ender på tre 4-taller.

**4.10 Find tallene**
Om to tal a og b gælder at deres største fælles divisor er 6 og at deres mindste fælles multiplum er 210. Hvad kan a og b være?

Hvad er a og b når summen a+b skal være så lille som mulig?



**4.11 Find tallet**
Om tallet T gælder at det hverken kan divideres med 2, 3, 4, 5 eller 6: Tallet er hver gang 1 for lille til at divisionen går op.

Derimod kan T divideres med 7.

Hvad kan T være? Find tre løsninger i området 1..1000.

**4.12 Find tallet!**
Et tal mellem 1000 og 2000 giver resterne 4, 5 og 6 når det divideres med henholdsvis 7, 11 og 13. Find tallet!

**4.13 Find tallet!**
Find det mindste positive tal som giver rest 1 ved division med 1000 og rest 8 ved division med 761.

**4.14 To trecifrede nabotal**
Tallet 183184 er opbygget af to trecifrede nabotal, 183 og 184. Det sekscifrede tal er et kvadrattal (tjek det!). Undersøg om der findes andre sekscifrede kvadrattal der er opbygget af to trecifrede nabotal. Undersøg også om der findes ottecifrede kvadrattal som på samme måde er opbygget af to fircifrede nabotal. Findes der mon fircifrede kvadrattal der er opbygget af to tocifrede nabotal?

(Bemærk at nabotallene godt må have det største tal forrest).

# 5. Ligninger i hele tal

Ligninger der løses inden for området af hele tal, kaldes diophantiske ligninger efter den græske matematiker *Diophant* der levede i det tredje århundrede.

**5.1 En ligning med to ubekendte**
Ligningen

$$x^3 - 7 = y^2$$

har løsningen x=2, y=1. Men den har endnu en løsning i hele positive tal, hvor x antager en værdi under 100.

Find denne løsning.

**5.2 Find løsningerne**
Løs ligningen

$$x^3 + 17 = y^2$$

hvor både x og y ligger i området 1..25.

**5.3 Endnu to løsninger**
Ligningen i foregående opgave har to løsninger for x>25.
Find de to løsninger.

**5.4 Find to løsninger**
Find ved hjælp af TAL to løsninger til ligningen

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$$



**5.5 Løs ligningen**
Find løsningerne til ligningen

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

**5.6 Find prisen**
En mand køber 57 flasker hvidvin og 158 flasker rødvin til en samlet pris af 20 000 kr.

Hvad var prisen på rødvinen når det oplyses at rødvinen var dyrere end hvidvinen?

**5.7 Hvor mange var der?**
Ved en forlystelse koster billetten 15 kr. for voksne og 7 kr. for børn. Indtægten var i alt 2119 kr. Hvor mange børnebilletter blev der solgt?

**5.8 Find x og y**
Find to heltals-løsninger til ligningen

$$101x + 753y = 100\,000.$$

**5.9 Find alle løsninger**
Find alle heltals-løsninger til ligningen

$$23x + 31y = 1111$$

**5.10 Er der løsninger?**
Gør rede for at ligningen

$$5x + 10y = 182$$

ikke har løsninger i hele positive tal.

Undersøg dernæst om ligningen

$$5x + 11y = 182$$

har løsninger i hele positive tal.

## 5.11 Største fælles divisor

Vælg to tal a og b og find deres største fælles divisor d. Undersøg om det er muligt at finde sådanne værdier for x og y at hvis det ene tal a ganges med x og det andet tal b ganges med y, så bliver differensen mellem de to produkter lig med d:

$$ax - by = d.$$

## 5.12 Ni løsninger

I en skoleklasse får man til opgave at finde heltals-løsninger til ligningen

$$5x + 7y = 338$$

Klassen finder ni forskellige løsninger. Kan du gøre det lige så godt?

## 5.13 Hvor mange løsninger?

I et lotteri skal der bruges 31 gevinster af type A og 257 gevinster af type B. Der skal i alt bruges 100 000 kr. til gevinsterne.

Hvad kan de to typer af gevinster koste? Angiv alle mulige heltalsløsninger.

## 5.14 Aben og kokosnødderne: Den lette version

Tre mand strander på en øde ø. Eneste levende væsen ud over dem er en abe. På øen findes en bunke af kokosnødder. De tre



mænd aftaler at de næste morgen vil dele nødderne ligeligt imellem sig. Om natten lister en af dem sig hen til bunken af nødder, og han observerer at de ikke vil kunne deles ligeligt, idet der er en nød for meget. Denne nød giver han til aben, og derefter tager han sin andel af de resterende nødder. Lidt senere lister en anden af de tre mænd hen til bunken af nødder. Også han observerer at der er én nød for meget til at der kan foretages en ligedeling mellem de tre mænd. Han giver derfor også en nød til aben, og tager derefter sin tredjedel af de øvrige.

Om morgenen deler de tre mænd de resterende nødder. Denne gang kan bunken ligedeles, og der er ingen nød til aben.

Hvor mange kokosnødder var der i den oprindelige bunke?

Et forslag til fremgangsmåde: Det oprindelige antal nødder kaldes x og det antal de hver får tildelt i sidste fordeling kaldes y. Vi har da, idet a og b angiver de fordelingsantal der forekommer undervejs:

$$x = 3a + 1$$
$$2a = 3b + 1$$
$$2b = 3y$$

Af disse ligninger får vi ved at udtrykke b, a og x ved y:

$$4x = 27y + 10$$

Vi kan nu ved hjælp af TAL finde løsninger til denne ligning med to ubekendte. Vi kan også bruge hovedregning.

Ligningen kan også opskrives direkte ud fra de opgivne oplysninger:

$$2/3*(2/3*(x-1)-1) = 3y$$

Heraf fås:

$(4/9)*x - 4/9 - 2/3 = 3y$

som kan omformes til den tidligere opstillede ligning:

$4x = 27y + 10$

Find nu ved hjælp af TAL (eller ved hovedregning) nogle løsninger til den opstillede ligning.

**5.15 Aben og kokosnødderne: Kvartet-versionen**
Der er nu tale om fire mænd, en abe og en bunke kokosnødder. Fordelingen foregår som før med ligedeling til hver af mændene. De tre første gange bliver der en kokosnød tilovers til aben, men ikke sidste gang hvor ligedeling mellem de fire mænd kan foretages.

Hvor mange kokosnødder må der mindst have været i bunken?

**5.16 Aben og kokosnødderne: Den klassiske version**
Her foretages fordelingen mellem fem mænd og en abe. Hvor mange nødder skal der nu mindst være i bunken for at fordelingerne kan finde sted med én nød til aben ved hver af de første fire fordelinger, og ingen ved den sidste fordeling?

**5.17 Portobeløb**
Hvilke portobeløb under 100 kr. kan ikke klares når der kun er frimærker på 2 kr. og på 5 kr. til rådighed?

Undersøg det samme spørgsmål når der kun er frimærker på 3 kr. og 5 kr. til rådighed.

**5.18 Find talpar**
Find de hele positive tal x og y som opfylder følgende betingelse:



$x^2 -xy + 2x - 3y = 1997$

Forslag: Omskriv udtrykket til følgende form (find a, b og c)

$(x + a)*(x - y + b) = c$

og løs derefter opgaven ved hjælp af TAL.

**5.19 Punkter angivet ved én koordinat**
Punkter i koordinatsystemet (x,y), hvor x og y antager hele talværdier større end eller lig med 0, kan angives ved en enkelt talværdi p(x,y), „positionen“, givet ved:

$p(x,y) = (x + 3y + (x+y)^2)/2$

(1) Beregn positionen for følgende punkter:

(0,0) (1,0) (0,1) (1,1) (2,3) (5,0)

Undersøg ved hjælp af TAL om det er rigtigt at punkterne (x,y), hvor både x og y gennemløber områderne 0..10, giver lutter forskellige positioner.

(2) Find ved hjælp af TAL de punkter der svarer til positionerne:

20 30 100 268 500 1000

(3) Forklar hvorfor p(x,y) altid vil blive et helt tal.

## 6. Divisorer og delelighed

**6.1 Hvilke tal?**
Hvilke tal har kun 2 divisorer? Hvilke har 3 divisorer? Og hvilke har 4 divisorer? Afprøv din formodning på en række eksempler. Giv et argument for din formodnings rigtighed.

**6.2 Tre på hinanden følgende tal**
Find tre på hinanden følgende tal som alle har 4 divisorer.

**6.3 Ulige antal divisorer**
Undersøg gennem eksempler hvilke tal der har et ulige antal divisorer. Opstil en hypotese og afprøv den gennem en række eksempler.

**6.4 Tal med 6 divisorer og tal med 8 divisorer**
Find nogle tal som har 6 divisorer. Se på tallenes primfaktoropløsning. Kan du beskrive hvordan et tals primfaktoropløsning skal være for at der lige netop er 6 divisorer i tallet?

Giv derefter en beskrivelse af primfaktoropløsningen for tal som har 8 divisorer.

**6.5 Fire på hinanden følgende tal**
Prøv om du kan finde fire på hinanden følgende tal som alle har 6 divisorer.

**6.6 Fem på hinanden følgende tal**
Et sted mellem 40000 og 50000 findes fem på hinanden følgende tal som alle har det samme antal af divisorer. Find dem.



**6.7 Et tal med 12 divisorer**
Find det mindste tal som har 12 divisorer.

**6.8 Et tal med 16 divisorer**
Find det mindste tal som har mindst 16 divisorer.

**6.9 Et tal med 32 divisorer**
Find det mindste tal som har mindst 32 divisorer.

**6.10 Et tal med 50 divisorer**
Find det mindste tal som har mindst 50 divisorer.

**6.11 Fircifrede tal**
Hvor mange divisorer kan et fircifret tal højst have?
Find det mindste fircifrede tal som har dette antal af divisorer.

**6.12 Sekscifrede tal**
Hvor mange divisorer kan et sekscifret tal have?
Find det mindste sekscifrede tal som har dette antal af divisorer.

**6.13 Hvilket tal går op i produktet?**
Tag tre på hinanden følgende lige tal og gang dem sammen.
Hvilket tal vil altid gå op i produktet?

**6.14 Fem tal i rækkefølge**
Tag fem tal i rækkefølge og gang dem sammen. Hvilket tal vil altid gå op i produktet?

### 6.15 Rest ved division med 24
Undersøg ved eksempler om det er rigtigt at kvadratet på et primtal (større end 3) giver resten 1 ved division med 24.

### 6.16 Antal divisorer i produktet
Vælg to tal a og b som ikke har andre fælles divisorer end 1. Find antallet af divisorer i a og i b. Find dernæst antallet af divisorer i produktet a*b. - Formuler en regel om antallet af divisorer i et produkt af to tal, og afprøv reglen på nogle eksempler.



## 7. Klassiske taltyper

### 7.1 Overvægtige tal
Et tal N er divisor-overvægtigt når summen af alle dets ægte divisorer er større end N.

De fem mindste divisor-overvægtige tal er 12, 18, 20, 24 og 30.

Vis at det ulige tal 45045 er divisor-overvægtigt.

Find det mindste ulige tal som er divisor-overvægtigt. Det ligger i området 900..1000 og har 16 divisorer.

### 7.2 Tetraediske tal
Tetraediske tal kan skrives som

x*(x+1)*(x+2)/6

hvor x antager værdierne 1,2,3,...

Udskriv en liste over de 50 første tetraediske tal.

### 7.3 Tetraediske tal og andre tal
Undersøg om der findes tetraediske tal der er kvadrattal.

Undersøg om der findes tetraediske tal der er trekanttal.

Findes der tetraediske tal der er primtal?

### 7.4 Sum af tetraediske tal
Næsten ethvert tal der ender på 6 kan skrives som summen af højst fire tetraediske tal (som ikke behøver at være forskellige).

Undersøg om det gælder for tallene: 6, 16, 26,...,96.

### 7.5 Kubiktal som nabo til kvadrattal

Undersøg nogle talområder for at finde eksempler på kubiktal og kvadrattal som er nabotal.

### 7.6 Kvadrattal som er trekanttal

De tre mindste kvadrattal $x^2$ som også er trekanttal, findes let for x inden for området 1..50. De næste to er sværere at finde: Prøv med x i nærheden af 200, og prøv med x i nærheden af 1200.

### 7.7 8T+1 er et kvadrattal

Efterprøv gennem eksempler om det er rigtigt at når T er et trekanttal, så er tallet 8T+1 et kvadrattal.

### 7.8 Fuldkomne tal

For tallet 6 gælder at summen af dets ægte divisorer er lig med tallet selv. Et sådant tal kaldes et fuldkomment tal.
Der findes under 100 yderligere kun ét fuldkomment tal. Find det!

Der findes ét trecifret fuldkomment tal (i nærheden af 500) og ét fircifret fuldkomment tal (lidt større end 8000).

Find de to tal! ( Benyt eventuelt ved søgningen at et fuldkomment tal større end 6 altid vil give rest 1 ved division med 9).

Det femte fuldkomne tal er 33 550 336. Tjek at det anførte tal er fuldkomment.

[De fuldkomne tals historie er nært knyttet til Mersenne-tallene. Det er endnu et åbent spørgsmål om der findes fuldkomne tal som er ulige.

Allerede hos *Euklid* findes et bevis for, at ethvert tal af formen $(2^x-1) * 2^{x-1}$, hvor $2^x-1$ er et primtal, er et fuldkomment tal (Euklids



Bog 9, sætning 36). Et bevis for at et lige fuldkomment tal kun kan være af denne form er givet omkring 1740 af *Euler* (1707-83).]

### 7.9 Fuldkomne tal som sum af kubiktal

De kendte fuldkomne tal (fraset tallet 6) kan skrives som en sum af ulige kubiktal. De to først er:

$1^3 + 3^3$

$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$

For hvert nyt fuldkomment tal tages dobbelt så mange led med i udregningen som ved det foregående tal.

Undersøg om disse summer giver de tal du fandt i den foregående opgave.

### 7.10 Trecifrede palindromer

Et tal der skrives ens forfra og bagfra kaldes et palindrom.
Lav en liste over alle primtal mellem 100 og 999 og afmærk de primtal som er palindromer.

Opstil dernæst en søgeprocedure i TAL som finder de trecifrede palindromer der er primtal.

### 7.11 Fircifrede palindromer

Undersøg ved hjælp af søgefunktionen i TAL om der findes fircifrede palindromer (se foregående opgave) som er primtal.

Undersøg endvidere om der findes fircifrede palindromer der er kvadrattal.

Find et fircifret palindrom der er kubiktal, og find et fircifret palindrom der er trekanttal.
Find et tal der går op i alle fircifrede palindromer.

## 7.12 Femcifrede palindromer med 0 i midten

Opstil en søgeprocedure for de femcifrede palindromer der har 0 som midterste ciffer. Undersøg om der findes sådanne tal som er primtal. Findes der sådanne tal som er trekanttal? Kvadrattal? Kubiktal?

## 7.13 Femcifrede palindromer som er kvadrattal

Find fem femcifrede palindromer som er kvadrattal. Findes der femcifrede palindromer som er kubiktal?

## 7.14 Venskabelige tal

To tal a og b er venskabelige tal når summen af de ægte divisorer i a er lig med b, og samtidig summen af de ægte divisorer i b er lig med a. I området op til 1000 findes kun ét par af venskabelige tal. Det ene tal af de to er 220.
Find det andet og tjek at der er tale om venskabelige tal.

Et af tallene i det næste par af venskabelige tal er 1210. Find det andet tal og tjek at der er tale om venskabelige tal.

Undersøg om 2620 kan være det ene tal i et par af venskabelige tal.

Også ulige tal kan være venskablige tal. Det første eksempel på et par af ulige venskabelige tal indeholder tallet 12285.
Find det andet tal.

Tallene i det efterfølgende par af venskabelige tal har også fem cifre. Det ene tal er 17296. Find det andet og tjek at der er tale om venskabelige tal.

Et af tallene i et par af venskabelige tal er det syvcifrede tal 9363584. Find det andet!

Yderligere et eksempel på ulige venskabelige tal forekommer med 1175265 som det ene tal. Find det andet.



[*Venskabelige tal*. Matematikeren *Euler* (1707-83) fandt i 1740'erne 60 par af venskabelige tal. Han overså imidlertid det næstmindste par, det blev først fundet i 1866 af en 16-årig skoleelev. Der kendes nu flere tusinde par af venskabelige tal. Et par af ulige 152-cifrede venskabelige tal blev fundet i 1972.]

## 7.15 Kæde af tal

Start med tallet 12496. Find summen af de ægte divisorer i tallet. Find dernæst summen af de ægte divisorer i dette nye tal. Fortsæt sådan indtil du når tilbage til udgangstallet 12496.

## 7.16 En længere kæde

Start med tallet 14316 og gå frem som i den foregående opgave. Hvor mange tal indgår der i kæden?

## 7.17 Et tal ganges med sit spejltal

Tag et tocifret tal T og gang det med sit spejltal, dvs. det tal der fremkommer når cifrene ombyttes. Eksempel: 57*75.
Undersøg hvornår produktet er et kvadrattal.

## 7.18 Kvadrattal?

Undersøg for x og y i området 1..10 om udtrykket

$$x^2 + 2xy + y^2$$

giver et kvadrattal. Kunne du på forhånd have sagt hvad resultatet af undersøgelsen ville blive?

Undersøg dernæst for de samme værdier om udtrykket

$$x^2 + 3xy + y^2$$

kan give et tal der er et kvadrattal.

**7.19 Rest 1 ved division med 8**
Undersøg om det er rigtigt at kvadratet på et ulige tal giver resten 1 ved division med 8.

**7.20 En talprofil**
Vælg et tal. Tag til eksempel 1997.

1. Undersøg om 1997 er et primtal, et kvadrattal, et kubiktal eller et trekanttal.

2. Hvor mange primtal findes der i området 1..1997?

3. Undersøg om 1997 kan skrives som summen af to kvadrattal og om en sådan omskrivning kan foregå på flere måder.

4. Undersøg om 1997 kan skrives som differensen mellem to kvadrattal.

5. Undersøg om 1997 kan skrives som summen af tre kvadrattal og om denne omskrivning kan foregå på flere måder.
6. Undersøg om 1997 kan skrives som summen af et primtal og et kvadrattal.

7. Undersøg om 1997 kan skrives som summen af et primtal og det dobbelte af et kvadrattal.

8. Find en heltallig løsning til ligningen

$$x^2 - 7y^2 = 1997$$

9. Find det mindste tal x for hvilket det gælder at 19x giver resten 97 ved division med 1997.

11. Find alle løsninger til ligningen $19x + 97y = 1997$, hvor $x$ og $y$ er hele positive tal.



***INFA-Matematik:***
Informatik i matematikundervisningen

Et delprojekt under

***INFA:*** Informatik i skolens fag
Et forskningsprogram på Danmarks Lærerhøjskole

***Projektledelse:***
Allan C. Malmberg
Inge B. Larsen
Viggo Sadolin

**Distribution af programmer og tekster:**
INFA, Danmarks Lærerhøjskole
Emdrupvej 115B, 2400 NV

*

Tekst: Allan C. Malmberg

Layout: Leif Glud Holm