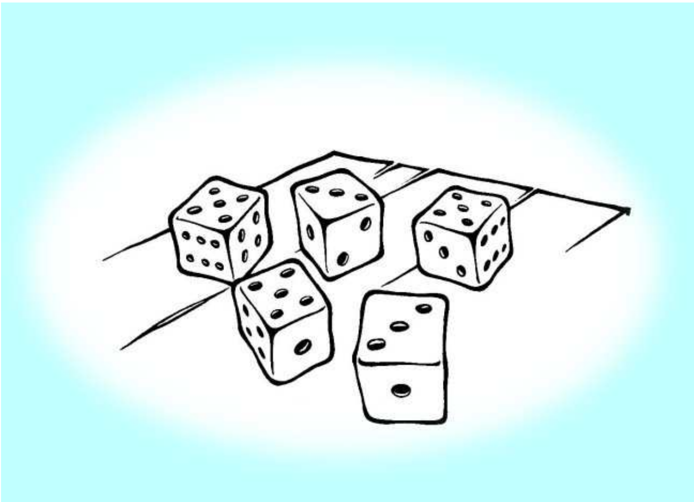
Allan C. Malmberg

Terningkast



INFA 2008

Programmet *Terning*

Terning er et INFA-program tilrettelagt med henblik på elever i 8. - 10. klasse som har særlig interesse i at arbejde med situationer af chancemæssig art.

I *Terning* kan eleverne beskæftige sig med chancesituationer som har med terningkast at gøre. De kan fastlægge hændelser af forskellig art - ved hjælp af en lettilgængelig notation - og de kan lade programmet beregne sandsynligheder for disse hændelser. Mange af de fundne teoretiske resultater vil let lade sig afprøve i rigtige kast med terninger.

Terning giver eleverne mulighed for undersøgelser over "ventetiden" på en forelagt hændelse: Hvor mange kast skal der fx udføres for at der er 50% chance for at hændelsen indtræffer?

Eleverne kan også undersøge samspillet mellem to terningkast-hændelser A og B og herigennem blive fortrolige med fortolkningen af hændelserne "A og B indtræffer begge", "A eller B indtræffer", "A men ikke B indtræffer". Også betingede sandsynligheder "A indtræffer, givet B indtræffer" kan behandles med støtte i eksempler på terningkast-situationer.

I elevteksten gennemgås de muligheder der findes i *Terning*, og der gives eksempler på problemløsning som kan gennemføres ved programmets hjælp. Til brug for elevernes afprøvning af opnået faglig kunnen og af deres håndtering af Terning-programmet er givet en omfattende samling af opgaver af varierende sværhedsgrad.

Indhold

1. Hændelser fastlagt ved øjenkast

Indtil videre vælger vi i programmet *Terning* muligheden **Én hændelse.**

Du vil nu alleröverst se et felt hvor der spørges om antallet af terninger. Der er mulighed for at kaste med 2-6 terninger. Vi vil udføre nogle kast med to terninger, så vi indtaster tallet 2 i *terningfeltet*. Vi sætter T=2.

Ved kast med to terninger er der 36 muligheder for kasteresultater. Lad os antage at vi kaster med en grøn og en rød terning. De 36 muligheder er da:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	**35**	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

For eksempel svarer kasteresultatet 35 til at den grønne terning viser 3, og den røde terning viser 5.

De 36 mulige resultater betragter vi som **ligevægtede**, dvs. de har alle **samme sandsynlighed**, eller **samme chance**, for at forekomme ved et kast med de to terninger. Da der er 36 ligevægtede hændelser, har hver af de 36 hændelser en sandsynlighed på 1/36, dvs. ca. 2.8%.

Eksempel 1. Lad os se på hændelsen:

En af terningerne viser 5 øjne

Når vi siger "en af terningerne" mener vi at enten den grønne eller den røde terning **eller begge terninger** viser 5 øjne.

Se på oversigten ovenfor. Find de kasteresultater hvor én terning eller begge terninger viser 5. Der er i alt 11 resultater hvor der forekommer et 5-tal. Nogle af dem er 51,52,56,15,35. Du kan let se at der i alt er 11 i oversigten.

Sandsynligheden for hændelsen "En af terningerne viser 5 øjne" er derfor 11 ud af 36, dvs. 11/36.

Vi vil nu lade programmet *Terning* foretage udregningen for os. I feltet *Antal terninger* indtaster vi 2, og i feltet *Øjental* indtaster vi 5:

Øjental: 5

Derefter klikker vi på OK.

På skærmen kommer nu følgende:

Antal terninger: 2
Hændelse: 5
Sandsynlighed: 11/36 (0.306)

Terning beregner altså sandsynligheden til 11/36, dvs. ca. 0.30 som decimaltal.

I programmet er indbygget en **kastetjekker**. Klik på den pågældende knap og der kommer følgende på skærmen.

```
Hændelse: 5      Antal terninger: 2

15
25
35
45
51
52
53
54
55
```

```
      56
      65

Undersøgelse:

       23    Nej
       35    Ja
       53    Ja
       55    Ja
```

Den øverste liste viser de kasteresultater der indgår i hændelsen. Du kan se at listen indeholder de 11 kast vi så på før.

I den næste liste har vi indtastet 4 kasteresultater. Programmet fortæller med et *Ja* eller et *Nej* om de hører med til den hændelse vi er interesseret i. Du kan se at resultatet 23 ikke hører med til hændelsen. Det gør derimod de tre andre kasteresultater vi har undersøgt.

Den øverste liste omfatter her alle de kasteresultater der indgår i den hændelse vi har indtastet. Sådan vil det ikke altid være. Ofte vil hændelsen nemlig indeholde et stort antal kasteresultater - måske flere tusinde - og listen vil da blot vise et udvalg af de kasteresultater som indgår i hændelsen. Men du vil altid kunne foretage din egen undersøgelse af lige så mange resultater som du har lyst til.

Eksempel 2. Vi ser nu på en kombination af flere øjental.
Hvis vi under *Øjental* indtaster:

Øjental: 56

så vil programmet beregne sandsynligheden for hændelsen:

Både øjental 5 og 6 forekommer.

Prøv selv. Lad *Terning* beregne sandsynligheden for hændelsen 56 og undersøg ved hjælp af kastetjekkeren om programmet regner rigtigt.

Eksempel 3. Der er andre muligheder for at kombinere to øjental. Således vil hændelsen 5 minus 6:

Øjental: 5 - 6

bevirke at *Terning* beregner sandsynligheden for at øjentallet 5, men ikke 6, forekommer.

Og hændelsen **5 eller 6** angives således:

Øjental: 5/6

Den får programmet til at beregne sandsynligheden for at enten forekommer øjentallet 5 eller øjentallet 6 (eller dem begge).

Prøv selv. Lad *Terning* beregne sandsynligheden for hændelsen 5-6 og for hændelsen 5/6. Kontroller ved hjælp af oversigten over de 36 mulige kasteresultater at programmet regner rigtigt.

Flere kombinationer. Her er nogle andre eksempler på hvordan øjental kan kombineres:

55/66
5-55
1/2/3
-5-6

Prøv selv. Overvej hvad de fire hændelser svarer til i **kasteresultater** og lad derefter *Terning* beregne sandsynligheden for hver af de fire hændelser.

Brug undervejs kastetjekkeren for at kontrollere at du har forstået de fire hændelser korrekt.

Kast med tre terninger. Vi sætter nu T=3. Vi kan forestille os at vi kaster med en grøn, en rød og en sort terning. For hvert af de 36 kasteresultater i oversigten ovenfor er der nu 6 muligheder for øjentallet på den sorte terning, den kan jo vise 1,2,3,4,5 eller 6. Alt i alt er der dermed 36*6 mulige kasteresultater, dvs. 216 ligevægtede kasteresultater.

Prøv selv. Sæt T=3, og lad *Terning* beregne sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

5
5-6
55/66
55-555

Undersøg med kastetjekkeren om du og programmet opfatter hændelserne på samme måde.

Hændelser fastlagt ved bogstaver
Indtil nu har vi fastlagt hændelser ved hjælp af tal, som fx 56, 5-55, 5-6 og 5/6. Nu vil vi gøre brug af bogstaver til fastlæggelse af hændelser.

Vi vælger igen T=3 og indtaster i Øjental:

Øjental: xx

Programmet opfatter denne besked som en hændelse hvor to terninger viser samme øjental.

Vi lader programmet beregne sandsynligheden for hændelsen:

Antal terninger:	**3**
Hændelse:	**xx**
Sandsynlighed:	**96/216= 4/9 (0.444)**

Undersøg ved hjælp af kastetjekkeren om programmet har regnet med de rigtige kasteresultater. Du vil se at tjekkeren fortæller at to af terningerne viser samme øjental, og det forekommer også at alle tre terninger viser det samme. Således er både 121 og 222 godkendte kasteresultater.

Hvis du ikke vil godtage de kasteresultater hvor alle tre terninger viser det samme øjental, kunne du have indtastet:

Øjental: xxy

Programmet vil nu beregne sandsynligheden for et kasteresultat hvor to terninger viser samme øjental og den tredje terning viser noget andet. Forskellige bogstaver står for forskellige øjental.

Alt i alt kan du gøre brug af bogstaverne *x y z p q* og *r*.
Samme bogstav står for samme øjental, og forskellige bogstaver står for forskellige tal.

Prøv selv. Sæt T=3, og lad *Terning* beregne sandsynligheden for hændelsen xxy og undersøg ved hjælp af kastetjekkeren om det er de rigtige kast der indgår i hændelsen.

Nogle andre eksempler. Sæt T=3, og beregn sandsynligheden for hver af følgende otte hændelser.

xyz
xxx/xyz
xx-xxx
6xx
16x
6-5
6-5-4
1/6-5-4

Undersøg ved hjælp af kastetjekkeren om programmet korrekt beregner sandsynligheden for de otte hændelser..

Øjental-hændelser
En lille oversigt over typiske Øjental-hændelser.

6	En terning (eller flere) viser 6
66	To terninger viser 6
55/66	To terninger viser 5 eller to terninger viser 6
56	En terning viser 5 og en viser 6
xx	To terninger viser samme øjental
xxy	To terninger viser samme øjental, en tredje terning viser noget andet.
6-66	En sekser, men ikke to seksere
6-5-4	Sekser, men hverken 5 eller 4
6-45	Sekser og ikke både 4 og 5.

Et øjental-udtryk er opbygget af tre grundstene:

og-udtryk	Eksempel:	56
minus-udtryk	Eksempel:	-5
eller-udtryk	Eksempel:	5/6

De tre typer af udtryk kan kombineres. Prøv dig frem.

Der gælder: **I et ”eller-udtryk” må der ikke sættes minus.**
Du kan altså ikke indtaste 5/-6 som en hændelse.

2. Hændelser fastlagt ved øjentalsum

Vi vælger stadig **Én hændelse.** Vi kan her også fastlægge hændelser ved at gøre brug af summen af øjentallene på de terninger der indgår i kastet. Lad os igen se på kast med tre terninger. For eksempel kan vi i feltet Øjentalsum indtaste:

Øjentalsum: 14 ..18

Det betyder at vi ser på terningkast hvor de tre terninger tilsammen viser 14,15,16, 17 eller 18 øjne. Vi lader *Terning* beregne sandsynligheden:

Antal terninger:	**3**
Øjentalsum:	**14..18**
Sandsynlighed:	**35/216 (0.162)**

Du kan ved hjælp af kastetjekkeren kontrollere at programmet har benyttet de korrekte kasteresultater.

Vi kan også kombinere to betingelser:

Øjental: xx
Øjentalsum: 14..18

Det betyder at vi ser på de kast hvor **begge betingelser er opfyldt**: To terninger skal vise samme øjental, og summen af de tre terningers øjental skal være fra 14 til 18.

Her er programmets resultater:

Antal terninger: 3

Hændelse: xx
Sandsynlighed: 96/216= 4/9 (0.444)

Øjentalsum: 14..18
Sandsynlighed: 35/216 (0.162)

Kombineret hændelse:
Sandsynlighed: 23/216 (0.106)

Her er de to hændelsers sandsynlighed beregnet hver for sig: Hændelsen xx har sandsynligheden 96/216 hvis den var den eneste hændelse (det har vi set i det foregående), og hændelsen Øjentalsum 14..18 har sandsynligheden 35/216 (det fandt vi også før).

Sandsynligheden for den kombinerede hændelse at både xx forekommer og at øjentalsummen er fra 14 til 18, er beregnet til 23/216.

Prøv selv. Undersøg ved hjælp af kastetjekkeren om det er de rigtige kast der indgår i den kombinerede hændelse.

Øjentalsum-hændelser

Her er nogle eksempler på hændelser der er fastlagt ved angivelse af øjentalsum.

7	Summen af øjentallene er 7
5..7	Summen af øjentallene er 5, 6 eller 7
..5	Summen af øjentallene er 5 eller derunder
10	Summen af øjentallene er 10 eller derover
8..9	Summen af øjentallene er 8 eller 9
8,9	Summen af øjentallene er 8 eller 9
3..6,7,11	Summen af øjentallene er 3..6 eller 7 eller 11

3. Andre fastlæggelser

Ud over Øjental og Øjentalsum er der tre andre muligheder for fastlæggelse af hændelser:

Variation af øjental
Bredde af øjental
Max og min af øjental

Variation. Her kan vi angive hvor mange forskellige øjental der skal indgå i hændelsen. Til eksempel sætter vi Variation til 3. Det betyder at vi kun ser på kast med tre forskellige øjental, fx 123 og 351, men ikke 446 der kun indeholder to forskellige øjental.

Bredde. Her kan vi angive hvad afstanden fra det mindste øjental til det største skal være. Sætter vi Bredde til 3, så kan vi godtage kast som 255 og 124, men ikke 265 der har en bredde på 4.

Max og min. Her kan vi fx sætte største øjental, **max**, til 5 og mindste øjental, **min**, til 2. Vi godtager da kast som 523 og 552, men ikke 553 hvor mindste øjental er 3 og ikke 2.

Under max/min kan du nøjes med at udfylde et af felterne, altså enten max eller min.

Når vi gør brug af flere muligheder for at fastlægge hændelser, er det altid underforstået at **alle de givne betingelser skal opfyldes.**

Et eksempel. Vi sætter T = 3 og indtaster følgende betingelser:

Øjental: xx
Øjentalsum: 10..
Bredde: 3

Max: 5

Her er programmets beregninger:

Antal terninger: 3

Øjental: xx
Sandsynlighed: 96/216= 4/9 (0.444)

Øjentalsum: 10..
Sandsynlighed: 135/216= 5/8 (0.625)

Bredde: 3
Sandsynlighed: 54/216= 1/4 (0.250)

Max: 5
Sandsynlighed: 61/216 (0.282)

Kombineret hændelse:
Sandsynlighed: 3/216= 1/72 (0.014)

Vi ser at den kombinerede hændelse har en sandsynlighed på 3/216. Af de 216 mulige resultater af et kast med tre terninger er der altså kun tre der opfylder alle vore stillede betingelser.

I kastetjekkeren kan vi se at de tre kasteresultater er:

255 525 552

Prøv selv. Opstil tre eller flere betingelser for en hændelse, og lad programmet beregne sandsynligheden. Kontroller at de foretagne beregninger er korrekte.

4. Ventetid: Hvornår indtræffer hændelsen?

Lad os antage at vi kaster med tre terninger, og at vi venter på at alle tre terninger viser samme øjental. Vi venter altså på at hændelsen

Øjental: xxx

indtræffer.

Vi lader programmet beregne hændelsens sandsynlighed:

Antal terninger: 3
Hændelse: xxx
Sandsynlighed: 6/216= 1/36 (0.028)

Derefter klikker vi på **Ventetid-knappen**.

På skærmen får vi nu en oversigt:

Sandsynlighed: p = 6/216 = 0.028

Fraktil	Talområde
1 %	1 .. 1
5 %	1 .. 2
10 %	1 .. 4
25 %	1 .. 11
50 %	1 .. 25
75 %	1 .. 50
90 %	1 .. 82
95 %	1 .. 107
99 %	1 .. 164

Af listen kan vi fx se at der ud for 50% står: 1..25. Det betyder at der er **50% chance for at hændelsen xxx indtræffer inden for de første 25 kast.** Vi ser også at der er 10% chance for at hændelsen indtræffer allerede inden for de første 4 kast.

Hvis vi under Talområde indtaster 1..40, så svarer programmet med procenttallet 67.59%. Det betyder at der er ca. 68% chance for at hændelsen xxx indtræffer inden for de første 40 kast

Til højre på skærmen ser vi: **Middeltal 36.00.** I gennemsnit skal vi altså udføre 36 kast før hændelsen xxx indtræffer, men der kan være store forskelle fra spil til spil.

Prøv selv. Beregn sandsynligheden for hændelsen:

Antal terninger: 3
Øjental: xyz
Øjentalsum: 12..18

Undersøg derefter hvor mange kast der skal udføres for at der er 50% chance for at hændelsen indtræffer. Og hvad er det gennemsnitlige antal kast der må udføres før hændelsen indtræffer?

Prøv nu at udføre rigtige kast med tre terninger, og se hvor mange kast du skal udføre før hændelsen indtræffer.

5. Samspil mellem to hændelser

I Programmet *Terning* har du mulighed for at arbejde med to hændelser på én gang. Gå ind i programmet og vælg **"To hændelser".**

Der kommer nu et skærmbillede hvor du kan fastlægge to hændelser A og B. Vi ser på et simpelt eksempel.

Sæt antallet af terninger til 3 og indtast under A hændelsen 6 og under B hændelsen xx:

A: 6 **B: xx**

Hændelsen A indtræffer altså hvis en eller flere af de tre terninger viser øjentallet 6. Og hændelsen B indtræffer hvis to (eller alle tre) terninger viser samme øjental.

Vi giver her nogle eksempler på kasteresultater som fører til at A og B indtræffer:

A: Kasteresultater fx	654	622	156
B: Kasteresultater fx	334	665	112

Der vil være kasteresultater som får både A og B til at indtræffe. Hændelsen "A og B" betegner vi med **A*B**. Vi har her:

A*B: Kasteresultater fx	622	666	166

Vi lader nu programmet udføre beregninger for A, B og A*B. Klik på OK, og på skærmen får du følgende:

```
Hændelse A: Øjental 6
P(A)= 91/216  (0.421)
```

```
Hændelse B:Øjental xx
P(B)= 96/216  (0.444)

P(A*B)= 31/216  (0.144)
```

Med P(A) betegner vi sandsynligheden for hændelse A. I matematikken betegnes sandsynligheder med P efter det latinske ord for sandsynlighed: *probabilitas.*

Vi ser at sandsynligheden for A er 91/216. Det betyder at 91 af de 216 mulige kasteresultater får A til at indtræffe. Hændelsen B er en smule mere sandsynlig: 96 af de 216 mulige kasteresultater får B til at indtræffe.

Vi ser også at der 31 kasteresultater der får både A og B til at indtræffe.

Du kan gå ind i kastetjekkeren og her kontrollere at det er de rigtige kasteresultater der er talt med. Der er i programmet tre kastetjekkere, en for hver af hændelserne A, B og A*B.

Vi kan nu let regne ud hvor mange af de 91 kasteresultater i A der får A, men ikke B til at indtræffe: Det må være 91 - 31, altså 60 kasteresultater. Og der må være 96 - 31 kasteresultater, altså 65, der får B, men ikke A til at indtræffe.

Det kan vi få programmet til at udregne. Klik på de to felter P(A-B) og P(B-A). På skærmen får du nu:

P(A-B) = 60/216
P(B-A) = 65/216

Der er også et felt der er afmærket med P(A/B), dvs. sandsynligheden for **A eller B.** Klik på dette felt, og du får følgende beregning på skærmen:

P(A/B) = 156/216

A/B står for hændelsen " **A eller B eller begge indtræffer**". Vi ser at 156 af de 216 mulige kasteresultater får A/B til at indtræffe. Vi kan let kontrollere at tallet er rigtigt. Der er 91 kasteresultater i A og 96 i B, i alt 187. Men her har vi talt dem i A*B med to gange, så vi skal trække 31 fra de 187. Det giver 156.

Der er endnu to felter der kan klikkes på: P(A|B) og P(B|A). Dem vender vi tilbage til under "Betinget sandsynlighed".

Prøv selv. Sæt antallet af terninger til 3 og fastlæg to hændelser A og B: **A: Øjental 65   B: Øjental xxy**

1. Giv eksempler på kast som får A til at indtræffe
2. Giv eksempler på kast som får B til at indtræffe
3. Giv eksempler på kast som får A*B til at indtræffe

Undersøg **samspillet mellem hændelserne A og B,** dvs.:

Lad *Terning* beregne sandsynlighederne:

P(A),   P(B), P(A*B)

Beregn nu ved håndkraft sandsynlighederne:

P(A/B), P(A-B) og P(B-A)

og kontroller at *Terning* kommer frem til de samme resultater.

Når A*B er tom Det kan forekomme at A*B er tom, dvs. at der ikke findes kasteresultater som får både A og B til at indtræffe. Her et eksempel (vi kaster stadig med tre terninger):

A: 65   B: Øjentalsum 3..11

Kontroller at A*B er tom.

6. Betinget sandsynlighed

Vi vælger stadig **To hændelser.** Vi kaster med tre terninger og ser på hændelserne:

A: 65 B: Øjentalsum 14..18

Her er nogle kasteresultater for A, B og A*B.

A: 652 655 **B**: 555 266 **A*B**: 655 665

Vi lader nu *Terning* beregne sandsynlighederne for de tre hændelser:

Hændelse A: Øjental: 65
P(A) = 30/216 (0.139)

Hændelse B: Øjentalsum: 14..18
P(B) = 35/216 (0.162)

P(A*B) = 18/216 (0.083)

Vi ser at sandsynligheden for at hændelse A indtræffer, er 30/216 eller som decimaltal: 0.139. Det betyder at A indtræffer ved 30 af de 216 resultater der er mulige ved kast med tre terninger.

Hvis vi nu får at vide at hændelsen B indtræffer, så ved vi at kasteresultatet er blevet et af de 35 resultater der er indeholdt i B. Af disse 35 er der 18 der findes i A*B. Det betyder at når B indtræffer, så er der 18 ud af 35 kasteresultater der får A til at indtræffe. Vi kan nu beregne den **"betingede sandsynlighed",** dvs. sandsynligheden for at A indtræffer når vi ved at B indtræffer: Denne sandsynlighed betegner vi sådan:

P(A|B)="sandsynligheden for A når B indtræffer" = 18/35

Programmet kan udføre denne beregning for os: Klik på feltet P(A|B). Vi får då på skærmen:

P(A|B) = 18/35 (0.514)

Når vi ved at B indtræffer, så er sandsynligheden for at A indtræffer 0.514, altså væsentligt større end de 0.139 som var sandsynligheden for A når vi ikke ved om B indtræffer. Vi har altså for den ubetingede og den betingede sandsynlighed:

P(A)=0.139 P(A|B)= 0.514

Det betyder:

Når B indtræffer, øger det A's sandsynlighed for at indtræffe.

Vi vil kort sige: **B styrker A**

Vi ser herefter på den ubetingede og den betingede sandsynlighed for B:

P(B) = 0.162 P(B|A) = 0.600

Heraf ser vi: **A styrker B.**

Når A indtræffer, øger det B's sandsynlighed for at indtræffe.

Generelt gælder der om to hændelser A og B:

Hvis A styrker B, så vil B styrke A.

Hvis P(A|B) er mindre end P(A), så har vi:

Når B indtræffer, formindsker det A's sandsynlighed for at indtræffe. Eller kort: **B svækker A.**

Der gælder generelt**: Hvis B svækker A, så vil A svække B.**

Prøv selv. Vi kaster med tre terninger og ser på hændelserne A og B:

A: Øjental: 12 B: Øjental: xx

Undersøg om A og B styrker hinanden eller svækker hinanden.

*

Hvis P(B)=0

Hvis P(B) = 0, så kan B ikke indtræffe, og dermed eksisterer den betingede sandsynlighed P(A|B) ikke.

Uafhængige hændelser. Hvis P(A)=P(A|B), så vil de to hændelser hverken styrke eller svække hinanden. Det vil sige at sandsynligheden for at den ene hændelse indtræffer ikke påvirkes af om den anden hændelse indtræffer eller ikke indtræffer. Sådanne to hændelser kaldes **uafhængige hændelser**.

For uafhængige hændelser A og B har vi:

P(A|B) = P(A*B)/P(B) = P(A)

og tilsvarende

P(B|A)=P(A*B)/P(A) = P(B)

Heraf får vi:

P(A*B) = P(A)*P(B)

Et eksempel. Her er et simpelt eksempel med to uafhængige hændelser. Vi kaster med to terninger og ser på hændelserne:

A:11/12/13/33 B:11/14/15/44

Vis at A og B er uafhængige hændelser.

7. Udfør kast

I programmet findes der en knap **Udfør kast.** Vi skal nu se hvordan den kan anvendes. Vi sætter antallet af terninger til 3 og indtaster følgende hændelse:

Øjental: xx

Vi ser altså igen på den hændelse at mindst to af de tre terninger viser samme øjental.

Programmet beregner følgende sandsynlighed for hændelsen:

Antal terninger: 3   Hændelse: xx

Sandsynlighed 96/216 = 4/9 (0.444)

Hændelsen A har altså en sandsynlighed på ca. 0.444.

Vi klikker nu på knappen **Udfør kast**. Her skal vi angive hvor mange kast vi ønsker udført, fra 10 og op til 2000. Vi indtaster: 100.

På skærmen kan vi nu få følgende udskrift:

Antal kast: 100

Antal forekomster af hændelsen: 42

90%-konfidensinterval: 0.337 .. 0.507

Vi ser at hændelsen forekom i 42 af de 100 kast. Det er i god overensstemmelse med den beregnede sandsynlighed på 0.444. I den nederste linje angives et **90%-konfidensinterval.** Det fortæller at med et resultat på 42 forekomster kan vi antage at den rigtige sandsynlighed er fra 0.337 til 0.507.

At der er tale om et **90%**-konfidensinterval betyder at vi i ca. 90 ud af 100 kasteserier vil få et interval som indeholder den teoretiske værdi for hændelsens sandsynlighed.

Vi ser at den beregnede sandsynlighed på 0.444 ligger i det angivne konfidensinterval.

Hvis kasteserien giver et konfidensinterval som indeholder den beregnede sandsynlighed, vil vi betragte det som et tegn på at programmets beregning er korrekt.

Skulle vi få et interval som ikke indeholder den beregnede sandsynlighed, vil vi være på vagt over for beregningen. Vi kan da foretage en ny udførelse af kast. Hvis også den giver et konfidensinterval som ikke indeholder den beregnede værdi, må vi tage beregningen op til nærmere undersøgelse.

Men husk at et enkelt "skævt interval" ikke betyder at beregningen af sandsynligheden er forkert. I ca. 10 ud af 100 kasteserier vil det forekomme at intervallet ikke indeholder den beregnede sandsynlighed.

Vi udfører nu en ny kasteserie, denne gang på 1000 kast:

Antal kast: 1000

Antal forekomster af hændelsen: 428

90%-konfidensinterval: 0.402 .. 0.454

Med 1000 kast får vi et snævrere konfidensinterval: fra 0.402 til 0.454. Vi ser at også dette interval indeholder den beregnede sandsynlighed på 0.444.

I INFA-publikationen **Model og Data** kan du læse om hvordan beregningen af konfidensintervaller foregår.

8. Fordelinger

I programmet er indlagt nogle fordelinger som kan fortælle om hvad der kan forekomme ved kast med terninger.

Gå ind i **Fordelinger** og vælg **Øjentalsum**. Sæt antallet af terninger til 2. På skærmen får du nu en oversigt:

Øjentalsum-fordeling   Antal terninger: 2

	Sandsynlighed	Kumuleret sandsynlighed
2	1/36= 0.0277	1/36= 0.0277
3	2/36= 0.0555	3/36= 0.0833
4	3/36= 0.0833	6/36= 0.167
5	4/36= 0.111	10/36= 0.278
6	5/36= 0.139	15/36= 0.417
7	6/36= 0.167	21/36= 0.583
8	5/36= 0.139	26/36= 0.722
9	4/36= 0.111	30/36= 0.833
10	3/36= 0.0833	33/36= 0.9166
11	2/36= 0.0555	35/36= 0.9722
12	1/36= 0.0277	36/36= 1.000

Af oversigten ser vi fx at ved kast med to terninger er sandsynligheden 5/36 eller 0.139.for at få en øjentalsum på 8.

Vi kan også af listen over den kumulerede sandsynlighed, **den summerede sandsynlighed**, se at sandsynligheden for at få en øjentalsum på **8 eller derunder** er 26/36 = 0.722. Ved et kast med to terninger er der altså en sandsynlighed på ca. 72% for at terningerne tilsammen viser 8 øjne eller derunder. Der er dermed kun ca. 28% sandsynlighed for at få en øjentalsum på 9 eller derover.

Nederst på skærmen kan vi se at den gennemsnitlige øjentalsum ved kast med to terninger er 7.00.

Gå ind i Fordelinger igen og vælg **Max**. Sæt igen antallet af terninger til 2. Du får nu følgende på skærmen:

Max-fordeling Antal terninger: 2

	Sandsynlighed	**Kumuleret sandsynlighed**
1	1/36= 0.0277	1/36= 0.0277
2	3/36= 0.0833	4/36= 0.111
3	5/36= 0.139	9/36= 0.250
4	7/36= 0.194	16/36= 0.444
5	9/36= 0.250	25/36= 0.694
6	11/36= 0.306	36/36= 1.000

Middelværdi: 161/36 = 4.472

Af oversigten kan vi til eksempel se at der er en sandsynlighed på 7/36 = 0.194 for at **max**, det største øjental der forekommer i kastet, er 4. Vi ser også at sandsynligheden for at max er på 4 eller derunder, er 16/36 = 0.444. Der er altså en sandsynlighed på ca.44% for at der ikke forekommer noget øjental større end 4 ved et kast med to terninger.

Vi ser at i gennemsnit er max= 4.472. Det største øjental ved kast med to terninger er altså i gennemsnit ca. 4½.

Alle de oplysninger der findes i oversigterne under Fordelinger, kan du selv skaffe dig ved brug af *Terning*-programmet. Og de anførte middelværdier kan du derefter beregne ved hjælp af en lommeregner.

Prøv selv. Lad *Terning*-programmet beregne sandsynlighederne for **min**, den mindste værdi der forekommer ved kast med to terninger: Lav lige som ved **max** en tabel over sandsynlighederne for øjentallene 1..6 og beregn derefter middelværdien. Kontroller ved hjælp af Fordelinger at du har regnet rigtigt.

9. Opgaver

1. En sekser
Hvad er chancen for at slå mindst én sekser i et kast med tre terninger?

2. Femmer eller sekser
Hvad er chancen for at få tre femmere eller tre seksere i et kast med fire terninger?

3. Du ganger øjentallene
Du kaster med to terninger. Hvad er chancen for at de to øjental giver mindst 20 når de ganges sammen?

4. Sum højst 5
To terninger kastes. Hvad er chancen for at summen af øjentallene bliver højst 5?

5. Sum mindst 10
To terninger kastes. Hvad er chancen for at summen af øjentallene bliver mindst 10?

6. Sum 7 eller 8
To terninger kastes. Hvad er chancen for at summen af øjentallene bliver 7 eller 8?

7. Seksere
To terninger kastes. Hvad er chancen for at ingen af terningerne viser 6?

8. Bredde på 4
I et spil hvor man kaster med to terninger er der gevinst hvis forskellen mellem de to terningers øjental er 4. Hvad er chancen for gevinst i spillet?

9. To seksere

Hvad er chancen for at få to og kun to seksere i et kast med tre terninger?

10. To seksere igen

Hvad er chancen for at få to og kun to seksere i et kast med fire terninger?

11. Ventetid på to ens

Vi kaster med to terninger. Find ved hjælp af Ventetid hvad chancen er for et kast med to ens i løbet af de første tre kast. Og i de første fem kast.

12. Et spil

Vi kaster med to terninger. Når vi skal have en brik i spil, skal vi opnå en sekser eller en femmer. Find ved hjælp af Ventetid hvad chancen er for at vi kan nøjes med at udføre tre kast. Og fem kast. Og hvad er risikoen for at vi skal udføre mere end 10 kast?

13. Kvik-Ludo

I Kvik-Ludo kaster man med to terninger og får en brik i spil når én eller begge terninger viser 6. Find ved hjælp af Ventetid hvad chancen er for at vi kan nøjes med at udføre tre kast. Og fem kast. Og hvad er risikoen for at vi skal udføre mere end 10 kast?

14. 123 eller 234

Tre terninger kastes. Hvad er chancen for at de viser 123 eller 234?

15. Et produkt på 120 eller mere

I et spil kaster man med tre terninger og ganger de tre øjental sammen. Der er gevinst hvis man opnår et resultat på mindst 120. Hvad er chancen for gevinst?

16. En trøstpræmie

I spillet fra foregående opgave er der en trøstpræmie til den der opnår resultatet 3 eller 4 når øjentallene ganges sammen. Hvad er chancen for en trøstpræmie?

17. Hverken 5 eller 6

Tre terninger kastes. Hvad er chancen for at ingen af dem viser 5 eller 6?

18. To betingelser

To terninger kastes. Hvad er chancen for at øjentallene er forskellige og at det største er mindst 4?

19. Et spil

I et spil kastes to terninger. Der er gevinst i spillet hvis mindst en af terningerne viser 6 eller hvis summen af øjentallene er mindst 9. Hvad er chancen for gevist?

20. Ulige produkt

To terninger kastes. Hvad er chancen for at produktet af øjentallene er et ulige tal?

21. Ulige produkt igen

Løs den foregående opgave for kast med tre terninger. Angiv derefter chancen for at produktet er et lige tal.

22. Ulige sum

To terninger kastes. Hvad er chancen for at summen af øjentallene er et ulige tal?

23. Variation på 2

Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for at de fem terninger viser to - og kun to - forskellige øjental?

24. Variation på 3

Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for de fem terninger viser tre forskellige øjental?

25. Pokerterning: Tre ens
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for at få **Tre ens**: Tre terninger viser samme øjental, de to andre terninger viser to andre indbyrdes forskellige øjental.

26. Pokerterning: Fuldt hus
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for **Fuldt hus**: Tre terninger viser ét øjental, de to andre terninger viser ét andet øjental.

27. Pokerterning: To par
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for **To par**: To terninger viser ét øjental, to andre terninger viser ét andet øjental, den sidste terning viser et tredje øjental.

28. Pokerterning: Et par
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for **Et par**: To terninger viser samme øjental, de tre andre terninger viser tre andre indbyrdes forskellige øjental.

29. Pokerterning: Fem ens
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for at alle fem terninger viser samme øjental?

30. Pokerterning: Stribe
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for **Stribe**: dvs. at terningerne viser 12345 eller 23456.

31. Pokerterning: Nix
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for **Nix**: Fem forskellige øjental uden at der er tale om **Stribe**.

32. Kast med seks terninger
Vi ser på følgende hændelser:

Tre par , fx 113355
To gange tre ens, fx 222444
Fire ens plus to ens, fx 333366

Alle seks: 123456

Hvilken af disse hændelser har den største sandsynlighed og hvilken den mindste? Gæt, og kontroller dit gæt ved brug af *Terning*-programmet.

33. En situation fra Backgammon

Her kastes med to terninger. En spiller skal opnå mindst én 4'er eller en øjentalsum på 4 eller kasteresultatet 11. Hvad er chancen for et gunstigt kast?

34. Backgammon igen

Spilleren fra foregående opgave skal nu opnå mindst én 6'er eller en sum på 6 eller kasteresultatet 22. Hvad er chancen for at det lykkes?

35. Spillet "Skib-Kaptajn-Styrmand"

Der kastes med fem terninger. Beregn chancen for hver af følgende tre hændelser:

(a) Der forekommer øjentallene 6, 5 og 4
(b) Der forekommer øjentallene 6 og 5, men ikke 4
(c) Der forekommer øjentallet 6, men ikke 5

36. Mindst én sekser

Der kastes med seks terninger. Hvad er chancen for mindst én sekser? Og hvad er chancen når der kastes med fem terninger, med fire terninger, med tre terninger og med to terninger?

37. Største øjental er 5

Der kastes med seks terninger. Hvad er chancen for at det største øjental der forekommer, er 5? Og hvad er chancen når der kastes med fem terninger, med fire terninger, med tre terninger og med to terninger?

38. Sum af øjental
Der kastes med tre terninger. Opstil en tabel over chancen for de mulige øjentalsummer, fra 3 til 18.

39. Vi venter på hændelsen
I et spil med tre spillere kaster hver spiller en terning. Hvis to terninger viser ens og den tredje terning viser noget andet, har den tredje spiller vundet. Hvad er chancen for at man finder en vinder i det første spil? Hvad er chancen for at man finder en vinder i løbet af de første tre spil? Hvad er chancen for at man må bruge mere end fem spil for at finde en vinder?

40. Nu med fire spillere
Spillet fra foregående opgave udføres nu med fire spillere som hver kaster en terning. En vinder er fundet når tre terninger viser ens og den fjerde terning viser noget andet. Hvad er chancen for at der må spilles mere end fem spil for at finde en vinder? Og mere end ti spil?

41. Kast med fem terninger
Hvad er chancen for følgende fem hændelser:

(a) Der opnås øjentallet 1, men ikke 2.
(b) Der opnås 1 og 2, men ikke 3.
(c) Der opnås 1, 2 og 3, men ikke 4.
(d) Der opnås 1, 2, 3,og 4, men ikke 5
(e) Der opnås 1, 2, 3, 4 og 5.

42. Et spil med tre terninger
I spillet er der følgende vinderkast: Tre ens, Stribe: 123, Stribe: 456 og To ens. Hvad er chancen for et vinderkast?

43. Endnu et spil med tre terninger
Her er vinderkastene: To ens, Tre ens, Øjentalsum på 13. Hvad er chancen for et vinderkast?

44. Over 10, men ikke Tre ens
I et terningspil kastes med tre terninger. En spiller vinder hvis han får en øjentalsum på over 10, dog vinder han ikke hvis terningerne viser Tre ens. Hvad er spillerens vinderchance?

45. Hvilken øjentalsum?
I et kast med to terninger er det en øjentalsum på 7 der har størst sandsynlighed. Kontroller det!

Hvilken øjentalsum har størst sandsynlighed i et kast med tre terninger? Med fire terninger? Med fem terninger? Og med seks terninger?

46. Har han ret?
En berømt matematiker sagde i 1714: Ved kast med to terninger har øjentalsummen 11 og øjentalsummen 12 samme chance for at forekomme. De forekommer nemlig begge ved ét kasteresultat: Henholdsvis 56 og 66. Afgør om han har ret.

47. En-to-tre
Der kastes med tre terninger. Der er følgende regler for gevinst: Hvis øjentallene 1, 2 og 3 forekommer: 100 kr. Hvis øjentallene 1 og 2 forekommer, men ikke 3: 20 kr. Hvis øjentallet 1 forekommer, men ikke 2: 10 kr. Beregn chancen for hver af de tre gevinster.

48. Bredde. To terninger
Der kastes med to terninger. Forskellen mellem de to terningers øjental kan være 0,1,2,3,4 eller 5. Beregn hvilken forskel der har størst sandsynlighed.

49. Bredde. Nu med tre terninger
Der kastes tre terninger, og vi undersøger forskellen mellem det største og det mindste øjental der forekommer. Beregn ligesom i den foregående opgave hvilken forskel der har størst sandsynlighed.

50. Øjentalsum 4
Hvad har størst sandsynlighed: At få mindst 8 ved kast med to terninger, at få mindst 12 ved kast med tre terninger, eller at få mindst 20 ved kast med fem terninger? Gæt og beregn.

51. To eller tre terninger?
Hvad har størst sandsynlighed: At få en øjentalsum på 9 ved kast med to terninger eller ved kast med tre terninger?

52. Delelig med 6
Kast med tre terninger. Hvad er chancen for at øjentalsummen er delelig med 6?

53. Delelig med 3
Kast med tre terninger. Hvad er chancen for at øjentalsummen er delelig med 3?

54. Et spil mellem to
Vælg mellem følgende: Der kastes to terninger og du vinder ved øjentalsum 5, eller der kastes med tre terninger og du vinder ved øjentalsum 10. Hvad vælger du?

55. Øjentalsum 14 ved tre eller fem terninger
Du vinder ved øjentalsum 14. Hvor er chancen størst: Ved kast med tre terninger eller ved kast med fem terninger?

56. Øjentalsum 15 ved tre eller fem terninger
Du vinder ved øjentalsum 15. Hvor er chancen størst: Ved kast med tre terninger eller ved kast med fem terninger?

57. Mere end dobbelt så stort
Der kastes to terninger. Hvad er chancen for at det ene øjental er mere end dobbelt så stort som det andet?

58. Mindst dobbelt så stor
Kast med to terninger. Hvad er chancen for at det ene øjental er mindst dobbelt så stort som det andet?

59. Netop dobbelt så stor
Der kastes to terninger. Hvad er chancen for at det største øjental er præcis dobbelt så stor som det mindste?

60. Og nu med tre terninger
Gentag beregningen fra foregående opgave når der kastes med tre terninger.

61. Tre gange så stort
Der kastes med to terninger. Hvad er chancen for at det største øjental er præcis tre gange så stort som det mindste.

62. Samspil mellem to hændelser
Vi kaster med tre terninger. Undersøg samspillet mellem hændelserne A og B:

A: xxy B: 12

Undersøg også om de to hændelser styrker eller svækker hinanden.

63. Samspil mellem to hændelser
Vi kaster med tre terninger. Undersøg samspillet mellem hændelserne A og B:

A: xx B: Øjentalsum under 8

Undersøg også om de to hændelser styrker eller svækker hinanden.

64. Uafhængige hændelser
Vi kaster med tre terninger og ser på hændelserne A og B:

A: xx B: Øjentalsum over 10

Gør rede for at A og B er uafhængige hændelser.

65. Når P(B-A) = 0
Der kastes med tre terninger. Undersøg samspillet mellem hændelserne A og B:

A: xx B: Variation 2

Styrker eller svækker de to hændelser hinanden?

66. Max og Variation
Der kastes med tre terninger. Undersøg samspillet mellem de to hændelser A og B:

A: Max = 6 B: Variation = 3

Styrker eller svækker de to hændelser hinanden?

67. Hvad er chancen for en sum på 12?
Der kastes med tre terninger. Hvad er chancen for en øjentalsum på 12? Hvad er chancen for en øjentalsum på 12 når det vides at mindst én af terningerne viser 4?

68. Hvad er chancen for 6?
Der kastes med tre terninger. Hvad er chancen for at mindst en af terningerne viser 6 når det vides at øjentalsummen er 12?

69. Chancen for Fuldt Hus
Der kastes med fem terninger. Hvad er chancen for Fuldt Hus (se opgave 26) når det vides at øjentalsummen er 24? Hvilken øjentalsum giver størst chance for Fuldt Hus?