TALKUNNEN

6

Allan C. Malmberg

Tilnærmede tal og computertal

INFA Matematik - 2000

INFA - IT i skolens matematik

Projektledelse:
Allan C. Malmberg
Inge B. Larsen

INFA-Klubben:
Leif Glud Holm
IT-Konsulent

Agnete C. Malmberg
Pædagogisk Konsulent

Distribution af programmer og tekster:
INFA, Danmarks Pædagogiske Universitet
Emdrupvej 101, 2400 København NV
Telefon: 3969 6633, lokal 2697
Fax: 3969 6626
e-mail: infa@infa.dk
Web: www.infa.dk

*

Tekst:	Allan C. Malmberg
Layout:	Leif Glud Holm

Indhold

Tilnærmede tal

Computertal

Tilnærmede tal

1. Betydende cifre

Når vi benytter en talangivelse i hverdagens meddelelser, er det underforstået at vi følger nogle regler som sikrer at modtageren af talinformationen ikke bliver vildledt. Når vi angiver et måleresultat ved tallet 2.45, er det underforstået at den „rigtige værdi“ ikke nødvendigvis er lige præcis 2.45, det kan godt tænkes at den afviger en smule fra dette tal. Men afvigelsen er så lille at den rigtige værdi er nærmere ved 2.45 end ved 2.44 og ved 2.46. Med andre ord: Hvis måleresultatet angives med to decimaler, så er 2.45 den mest nøjagtige værdi der kan benyttes.

Hver gang vi angiver et måleresultat, indfører vi en fejl, nemlig afvigelsen mellem den rette værdi og det benyttede måleresultat. I almindelighed kender vi ikke fejlens størrelse når vi angiver et måleresultat, vi kender kun en grænse for hvor stor fejlen kan være.

Når vi angiver et måleresultat som 2.45, kan fejlen højst beløbe sig til 0.005. Den rette værdi vil jo ligge mellem 2.445 og 2.455. Fejlen er altså højst 5 enheder på den tredje decimals plads, eller sagt på en anden måde: *Fejlen er højst ½ enhed i den sidste decimal i tallet.*

Ved angivelse af måleresultater vil vi gå ud fra at tallene er angivet på en sådan måde at fejlen i talangivelsen højst er ½ enhed i den sidste decimal. Angivelsen er dermed så nøjagtig som den kan være med det valgte antal af decimaler. I måleresultatet 2.45 kan vi derfor „have tillid til“ alle de angivne cifre. Vi siger at talangivelsen indeholder tre *betydende* cifre.

I angivelser af måleresultater bør vi benytte talangivelser hvori alle cifre er betydende cifre. Kun derved kan vi sikre at den information der gives, er til at stole på.

Hvis vi ikke er i stand til at angive talværdier med et tal hvori alle cifre er betydende cifre, så må vi til talangivelsen knytte en oplysning som fortæller hvor meget talangivelsen kan afvige fra den rigtige værdi.

Når vi i hverdagens brug af tal benytter talangivelser som ikke helt gengiver den nøjagtige værdi, så taler vi om *tilnærmede tal*. De angivne tal er tilnærmelser til de korrekte værdier. Vi ved ikke hvor meget de tilnærmede tal afviger fra de korrekte værdier, men hvis vi har kendskab til antallet af betydende cifre i angivelserne af de tilnærmede værdier, så ved vi hvor meget de kan afvige fra de korrekte værdier.

2. Regning med tilnærmede tal

Med adgang til en lommeregner kan vi let udføre beregninger med tal som indeholder et stort antal cifre. For eksempel kan vi på et øjeblik multiplicere de tre tal 2.45, 3.56 og 4.78:

$$2.47 * 3.56 * 4.78 = 42.031496$$

Spørgsmålet er imidlertid om det har nogen mening at angive resultatet af beregningen med seks decimaler. Lommeregneren leverer selvfølgelig de seks decimaler, den kan jo ikke vide hvor mange betydende cifre der er i det angivne resultat. Det kan kun den der udfører beregningen og som har kendskab til de tal der indgår i beregningen.

2.1 Addition og subtraktion

Vi ser først på nogle beregninger der består i at lægge to tilnærmede tal sammen.

Lad os antage at vi vil beregne summen a + b, hvor a og b er angivet ved tallene: a = 2.45 og b = 3.78. For summen har vi (hovedregning): a + b = 6.23.

Hvis vi nu antager at både a og b er angivet med tre betydende cifre, kan vi da gå ud fra at summen på 6.23 også indeholder tre betydende cifre? Eller sagt på en anden måde: Er den angivne sum på 6.23 så nær ved den korrekte værdi at der højst er tale om en fejl på ½ enhed i sidste decimal, altså en fejl på 0.005?

Vi belyser spørgsmålet ved et *fejlgrænseskema:*

Beregningsstørrelse	Nedre grænse	Øvre grænse
a	2.445	2.455
b	3.775	3.785
a + b	6.220	6.240

Vi ser altså at den rigtige værdi for summen a + b ligger mellem 6.220 og 6.240. Når vi angiver summen som 6.23, kan vi altså ikke garantere at det sidste ciffer er korrekt. Vi kan dermed ikke fastholde at resultatet 6.23 indeholder tre betydende cifre. Hvis vi vil være helt korrekte, kan vi da angive resultatet ved: 6.23 (fg: 0.01). Med oplysningen i parentesen fortæller vi at talangivelsen 6.23 har en fejlgrænse på 0.01. Den rette værdi kan altså ligge mellem 6.23-0.01 og 6.23+0.01.

Af skemaet ser vi at fejlen i den angivne sum kan have en størrelse på 0.010, dvs. 2 gange den fejl på 0.005 som kan forekomme i hver af de to angivelser for a og b.

Havde vi i stedet foretaget en beregning med fire tal som hver var angivet med to decimaler, så ville vi være kommet til at fejlgrænsen for summen ville være 4 gange 0.005, altså 0.020.

I et fejlgrænseskema udfører vi to beregninger: Den ene viser hvad den nedre grænse for resultatet er, den anden hvad den øvre grænse er. Vi udfører en ”dobbeltregning”.

Øvelse 1
Opstil et fejlgrænseskema for beregningen af summen:

2.45 + 3.78 + 4.08 + 7.63

Alle de anførte cifre er betydende.

Vi ser nu på en subtraktion: Vi vælger igen tallene 2.45 og 3.78 og beregner differensen 3.78 - 2.45. Vi opstiller et fejlgrænseskema:

Beregningsstørrelse	Nedre grænse	Øvre grænse
a	2.445	2.455
b	3.775	3.785
b - a	1.320	1.340

Bemærk hvordan de to grænser for b - a beregnes: Den nedre grænse er fremkommet som 3.775 - 2.455, og den øvre grænse som 3.785 - 2.445.

Ved beregningen af 3.78 - 2.45 får vi resultatet 1.33. Af skemaet kan vi se at den korrekte værdi for b - a kan ligge imellem 1.320 og 1.340. Når vi angiver resultatet af beregningen som 1.33, kan vi derfor ikke garantere at det sidste ciffer er korrekt. Vi kan altså heller ikke i denne beregning være sikre på at resultatet 1.33 indeholder tre betydende cifre. Men vi kan korrekt angive resultatet som:

1.33 (fg:0.01).

Ved hjælp af fejlgrænseskemaer kan vi undersøge hvilke fejl der kan forekomme ved additioner og subtraktioner af tilnærmede tal. Hvert af de tal der indgår i beregningen kan forøge resultatets fejlgrænse med ½ enhed i den sidste decimal i tallet. Har vi fx en beregning der omfatter et regnestykke med 10 tal der alle er angivet med to decimaler, så vil fejlgrænsen for resultatet være 10 gange 0.005, dvs. 0.05. Fejlen kan altså beløbe sig til 5 enheder i anden decimal. I en sådan situation kan det være nødvendigt at oplyse om fejlgrænsen når vi anfører beregningens resultat.

Lad os nu se på et eksempel hvor tallene ikke er angivet med samme antal decimaler. Vi ser på summen af de to tal 6.3 og 2.92. Det første af de to tal er angivet med én decimal, det andet med to decimaler.

Vi opstiller et fejlgrænseskema for beregningen.

Beregningsstørrelse	Nedre grænse	Øvre grænse
a	6.25	6.35
b	2.915	2.925
a + b	9.165	9.275

Ved beregning af summen 6.3+2.92 får vi 9.22. Af skemaet ser vi at den korrekte værdi for summen ligger mellem 9.165 og 9.275. Når vi angiver summen ved resultatet 9.22, kan der være en fejl på op til 0.055, nemlig en fejl på 0.05 som stammer fra tallet 6.3 og en fejl på 0.005 som stammer fra tallet 2.92. Det er altså fejlgrænsen for tallet 6.3 som dominerer fejlgrænsen for summen.

I den forelagte beregning bør vi derfor ikke angive resultatet med mere end én decimal, dvs. som 9.2. Selv i dette resultat kan vi ikke være sikre på at det sidste ciffer er korrekt. Som vi ser af fejlgrænseskemaet, kan den korrekte angivelse af summen med én decimal jo være 9.2 eller 9.3.

Hvis vi ville angive resultatet med oplysning om fejlgrænse, kunne vi oplyse: 9.22 (fg:0.055), eller med samme antal decimaler i tal og fejlgrænse: 9.22 (fg:0.06). Hvis vi ville benytte tallet 9.2 som resultat, måtte vi benytte angivelsen: 9.2 (fg:0.1).

Vi kan af eksemplerne se hvordan vi kan finde størrelsen af fejlgrænsen i en beregning der omfatter additioner og subtraktioner:

> Vi finder fejlgrænsen for hvert af de tal der indgår i beregningen, og disse fejlgrænser lægges sammen (de skal også lægges sammen når det drejer sig om subtraktioner).

Øvelse 2

Angiv fejlgrænsen for resultatet af følgende beregning med tilnærmede tal:

$$3.2 + 5.90 - 2.84 + 8.123$$

Hvordan vil du angive resultatet af beregningen?

Ved udregningen af fejlgrænsen for resultatet af en beregning der består af additioner og subtraktioner, ser vi altså at de enkelte tals fejlgrænser skal lægges sammen. Vi ved ikke hvordan fejlene på de enkelte tal er fordelt: I nogle tilfælde vil den tilnærmede værdi være større end den rette værdi, i andre tilfælde vil det være omvendt. Vi kan derfor satse på at fejlene delvis vil udligne hinanden, således at den samlede fejl på beregningen ligger langt under det der er givet ved den beregnede fejlgrænse. Fejlgrænsen fortæller jo kun hvor galt det kan gå i værste fald, dvs. når alle tilnærmede tal afviger så meget som muligt fra de rette værdier og når afvigelserne enten alle er positive eller alle er negative.

Vi vil derfor formulere en regne-praksis regel som kan vejlede os når vi skal angive resultatet af en beregning med tilnærmede tal.

> **Praksis-regel 1**
> Ved addition og subtraktion af tilnærmede tal angives resultatet med det mindste antal decimaler der forekommer blandt de tilnærmede tal.

Som vi allerede har set, sikrer denne regel os ikke at vi angiver resultatet med lutter betydende cifre. Der kan stadig være usikkerhed om de sidste cifre. Men reglen vil sørge for at vi opnår en balance mellem det teoretiske korrekte og det praktisk ønskelige. Reglen er at opfatte som en ”tommelfingerregel” som kan bruges i daglig omgang med tilnærmede tal. Til finere brug må vi foretage beregninger af fejlgrænser.

Eksempler

(1) 3.7 + 4.32 - 5.678

Efter regel 1 skal resultatet her angives med én decimal.

(2) 15.20 - 3.084 + 7.12

Efter regel 1 skal resultatet her angives med to decimaler.

(3) 18 + 3.8 - 6.789

Efter regel 1 skal resultatet her angives som helt tal, dvs. med 0 decimaler.

Øvelse 3

Angiv resultaterne af de tre beregninger i eksemplerne.

Skulle der i en beregning både indgå tilnærmede tal og tal som ikke er tilnærmede, dvs. eksakte tal, så skal der ved anvendelse af regel 1 kun tages hensyn til de tilnærmede værdier. I en beregning som

5.32 + 3.5 + 32

hvor kun de to første tal er tilnærmede, kan resultatet angives med én decimal (hvad bliver resultatet?).

I en beregning med tilnærmede tal som ikke er angivet ved betydende cifre, men ved angivelse af fejlgrænse, må vi anvende fejlgrænseberegninger når vi beslutter os for hvordan resultatet skal angives.

Skal vi til eksempel beregne summen:

3.2 (fg:0.5) + 2.45 (fg:0.07) + 3.15 (fg:0.05)

så kan vi ikke benytte regel 1. Vi må i stedet foretage en beregning af resultatets fejlgrænse og benytte den ved angivelse af resultatet.

2.2 Multiplikation og division

Vi ser nu på multiplikation af tilnærmede tal. Lad os antage at vi skal udføre beregningen 2.45 * 3.7, hvor de to tal er angivet med henholdsvis tre og to betydende cifre. Ved brug af en lommeregner finder vi: 2.45 * 3.7 = 9.065. Men hvor mange af cifrene i resultatet kan vi have tillid til?

Vi gør brug af et fejlgrænseskema. Ved dobbeltregning får vi:

Beregningsstørrelse	Nedre grænse	Øvre grænse
a	2.445	2.455
b	3.65	3.75
a * b	8.92425	9.20625

Af skemaet ser vi at den korrekte værdi for a * b vil ligge mellem 8.92425 og 9.20625. I det beregnede resultat på 9.065 vil det derfor være meningsløst at tage alle tre decimaler med, ja selv en angivelse med to decimaler er ikke rimelig. Det bedste vi kan gøre hvis vi igen vil have en balance mellem det teoretisk korrekte og det praktisk ønskelige, er at angive resultatet med to cifre, nemlig som 9.1. Og selv her kan vi ikke være sikker på at det sidste ciffer er korrekt.

Hvis vi regner efter, vil vi se at værdien 9.065 ikke ligger præcist midt imellem de to værdier der er angivet som nedre og øvre grænse for a * b:

Afstand fra 8.92425 til 9.065: 0.14075
Afstand fra 9.20625 til 9.065: 0.14125

Der er ikke stor forskel på de to afstande, og vi vil tage den gennemsnitlige afstand på 0.14100 som en praktisk brugbar fejlgrænse ved den udførte beregning.

Vi kan derfor ved hjælp af fejlgrænser angive resultatet af beregningen således: 9.07 (fg:0.15). Fejlgrænsen er angivet med to decimaler, og ved fejlgrænser runder vi op for at være på den sikre side.

Vi skal nu se hvordan fejlgrænsen for det beregnede produkt er sammenknyttet med fejlgrænserne for de to tal der indgår i multiplikationen.

Vi beregner her de relative fejlgrænser, dvs. fejlgrænsernes størrelse i forhold til de tal de er knyttet til.

Fejlgrænsen for 2.45 er 0.005, dvs. den relative fejlgrænse er

0.005:2.45 = 0.204%

Fejlgrænsen for 3.7 er 0.05, dvs. den relative fejlgrænse er

0.05:3.7 = 1.351%

For a * b fastlagde vi fejlgrænsen til 0.14100. Den relative fejlgrænse er da

0.14100:9.065 = 1.555%

(Ved beregningerne af de relative fejlgrænser har vi anvendt en lommeregner).

Af tallene for de relative fejlgrænser ser vi at summen af de to relative fejlgrænser for a og b netop er den relative fejlgrænse for produktet a * b:

0.204% + 1.351% = 1.555%

Vi har hermed et eksempel som belyser en almen regel: Den relative fejlgrænse for et produkt af tilnærmede tal er lig med summen af de relative fejlgrænser for de enkelte tal.

Vi kunne også have angivet resultatet af multiplikationen ved hjælp af den relative fejlgrænse: 9.07 (rfg:1.6%)

Vi vender nu tilbage til beregningen fra side 5:

2.47 * 3.56 * 4.78 = 42.031496

Lad os foretage en vurdering af den relative fejlgrænse for det angivne resultat. Vi vil her bruge de relative fejlgrænser og benytte summen af dem som et praktisk bud på den relative fejlgrænse for beregningens resultat.

De relative fejlgrænser for de tre tal er:

0.005:2.47	=	0.20%
0.005:3.56	=	0.14%
0.005:4.78	=	0.10%
I alt		0.44%

Tager vi nu 0.44% af det anførte resultat på 42.03 får vi: 0.185. Vi kan herefter beregne at det rette resultat af beregningen vil ligge imellem

$$42.03 - 0.19 = 41.84$$

og

$$42.03 + 0.19 = 42.22$$

Herefter kan vi overveje hvor mange cifre vi bør medtage når vi angiver resultatet af beregningen. Vi kan hurtigt se at de fem sidste decimaler i 42.031496 ingen mening har. Vi kan derimod gå med til at den ene decimal bevares, og vi angiver derfor resultatet af beregningen som: 42.0.

Men i dette resultat gælder som tidligere: Vi kan ikke garantere for korrektheden af sidste ciffer.

Ved hjælp af fejlgrænser og relative fejlgrænser kunne resultatet mere oplysende angives som: 42.03 (fg:0.19) eller 42.03 (rfg:0.44%).

Øvelse 4

Gennemfør en beregning af fejlgrænsen for beregningen ved hjælp af et fejlgrænseskema. - Beregningen vil ikke give helt samme resultat som det vi fik ved at tage summen af de relative fejlgrænser, men det vil ligge så tæt på at forskellen ikke har nogen praktisk betydning.

*

For division med tilnærmede tal kan vi gennemføre de samme overvejelser som ved multiplikation. Også her vil vi kunne finde en praktisk relative fejlgrænse for resultatet ved at tage summen af de relative fejlgrænser for de enkelte tal der indgår i beregningen.

Øvelse 5
Opstil et fejlgrænseskema for beregningen af 3.78:2.13. Beregn derefter de relative fejlgrænser for de to tal og for beregningsresultatet. Angiv beregningens resultat med et passende antal cifre og angiv resultatet ved hjælp af fejlgrænser.

Vi opstiller herefter en regel der gælder for regningsarterne multiplikation og division.

Praksis-regel 2
Ved multiplikation og division af tilnærmede tal angives resultatet med det mindste antal cifre der forekommer blandt de tilnærmede tal.

Bemærk, at ved multiplikation og division er antallet af decimaler i de tilnærmede tal uden betydning. Det er alene antallet af cifre der tæller.

Når vi tæller cifre i tilnærmede tal, medregner vi ikke de indledende nuller i decimaltal. Talangivelsen 0.00012 indeholder derfor kun to cifre.

Eksempler

(1) 2.345 * 8.9 * 3.47

Efter regel 2 angives resultatet med to cifre.

(2) 1.235 * 8.9667 * 78.0

Efter regel 2 angives resultatet med tre cifre.

(3) 3.5065 * 0.56789 * 78.00

Efter regel 2 angives resultatet med fire cifre.

Øvelse 6

Angiv resultaterne af beregningerne i de tre eksempler.

Øvelse 7

Foretag en beregning af den relative fejlgrænse for resultatet af de tre beregninger. Angiv derefter resultaterne ved hjælp af relative fejlgrænser.

2.3 Potensopløftning og roduddragning

Ved udregninger hvor tilnærmede tal opløftes til en potens, kan vi benytte resultaterne fra multiplikation. Beregningen af 2.34 opløftet i tredje potens svarer jo til beregningen

2.34 * 2.34 * 2.34 = 12.812904

Den relative fejlgrænse for talangivelsen 2.34 er

0.005:2.34 = 0.214%

Ved anvendelse af regel 2 har vi da at en praktisk relativ fejlgrænse for beregningens resultat er 3*0.214% = 0.642%. De 0.642% af beregningsresultatet svarer til ca. 0.082. Vi ser altså at den rette værdi af resultatet vil ligge mellem ca. 12.73 og 12.90. Det vil således ikke være rimeligt at medtage mere end tre cifre i angivelsen af resultatet af beregningen. Vi angiver derfor resultatet til: 12.8.

Ved hjælp af fejlgrænser har vi: 12.81 (fg:0.09) eller 12.81 (rfg:0.65%).

Vi kan dermed anvende regel 2 på potensopløftning: I resultatet medtager vi det antal cifre der findes i det tilnærmede tal der skal opløftes.

Vi skal imidlertid være varsom når det drejer sig om potensopløftning med høje værdier af eksponenten. Ved opløftning af et tilnærmet tal til eksponenten 10 vil vi få et resultat som har en relativ fejlgrænse af en størrelse på ca. 10 gange den relative fejlgrænse for det tal der opløftes. Til eksempel vil beregningen af 1.12 opløftet i 10. potens give et resultat med en relativ fejlgrænse på

$$10 * 0.005:1.12 = \text{ca. } 4.5\%$$

Lommeregneren udregner resultatet af potensopløftningen til 3.105848208. Med en relativ fejl på 4.5% vil det rette resultat ligge mellem ca. 2.97 og 3.25. Af lommeregnerens 9 decimaler kan vi se helt bort fra de 7 sidste, de er uden mening. Men vi kan endda dårligt nok beholde tre cifre i resultatet og angive det som 3.11. Det vil være bedre at nøjes med to cifre og angive resultatet som 3.1. Og selv i denne angivelse kan vi ikke være sikker på at sidste ciffer er korrekt.- Men vi kan benytte fejlgrænser og angive resultatet som: 3.11 (rfg:4.5%) eller som: 3.11 (fg:0.14).

Ved beregning af 1.12 opløftet til eksponenten 50 må vi efter vor regel regne med en relativ fejlgrænse på ca. 23%. I vækst-tabellen i folkeskolens tabelsamling kan man finde resultatet af beregningen angivet til 289.0022. Med en relativ fejlgrænse på 23% kan vi da skønne at den rigtige værdi ligger mellem ca. 232 og 357. Så i dette tilfælde kan vi ikke bruge nogen af de cifre der er anført i tabellens resultat på 289.0022. Det bedste vi kan gøre er nok at angive resultatet som

289 (fg:66) eller 290 (fg:70) eller 289 (rfg:23%)

Vi formulerer nu regel nr. 3.

Praksis-regel 3
Ved opløftning af et tilnærmet tal til en potens med en moderat eksponent vil resultatet kunne angives med det antal cifre der indgår i det tilnærmede tal. Ved opløftning til høje eksponenter vil en beregning af fejlgrænser kunne afgøre hvor mange cifre der kan benyttes i angivelsen af resultatet.

Til sidst ser vi på roduddragning. Lad os til eksempel se på uddragningen af kvadratroden af 1.23. Ved hjælp af en lommeregner får vi resultatet 1.109053651. Hvor mange af disse decimaler bør vi benytte når 1.23 er en tilnærmet værdi for et ukendt tal?

Vi ved at den rette værdi af det ukendte tal ligger mellem 1.225 og 1.235. Vi har da at grænserne for den rette værdi af den søgte kvadratrod er:

Nedre grænse. Kvadratroden af 1.225: 1.1068

Øvre grænse. Kvadratroden af 1.235: 1.1113

Vi ser heraf at vi kan afrunde lommeregnerens resultat til tre cifre: 1.11. I dette tilfælde er vi oven i købet sikre på at alle tre cifre er betydende cifre.

Ved uddragning af kvadratroden af et tilnærmet tal er den relative fejlgrænse det halve af fejlgrænsen for det tilnærmede tal, og ved uddragning af kubikroden er den relative fejlgrænse en tredjedel af fejlgrænsen for det tilnærmede tal.

Ved uddragning af roden af et tilnærmet tal er situationen faktisk den at vi somme tider kan angive resultatet med flere cifre end der indgår i det tilnærmede tal. Det er således tilfældet når vi benytter roduddragning med en høj rodeksponent. Men vi formulerer alligevel regel 4 i en forsigtig udgave:

Praksis-regel 4
Ved uddragning af en rod af et tilnærmet tal kan vi angive resultatet med det antal cifre der indgår i det tilnærmede tal.

Det skal understreges at de fire regnepraksis-regler er regler som kan være til hjælp når vi arbejder med tilnærmede tal. Reglerne fører ikke frem til skudsikre resultater, de er blot nogle let anvendelige tommelfingerregler som kan anvendes i den daglige omgang med tilnærmede tal. Hvis vi ønsker et solidere grundlag for vore talangivelser, må vi gøre brug af fejlgrænseberegninger.

Ved anvendelsen af fejlgrænser kan vi støtte os på følgende regler:

Fejlgrænseregler

1. Fejlgrænsen for en beregning der består af additioner og subtraktioner er lig med summen af fejlgrænserne for de tilnærmede tal der indgår i beregningen:

$$fg(a+b) = fg(a) + fg(b)$$

2. Den relative fejlgrænse for en beregning der består af multiplikationer og divisioner er lig med summen af de relative fejlgrænser for de tilnærmede tal der indgår i beregningen:

$$rfg(a*b) = rfg(a) + rfg(b)$$

3. Den relative fejlgrænse for den n'te potens af et tilnærmet tal er lig med n gange den relative fejlgrænse for det tilnærmede tal:

$$rfg(a^n) = n*rfg(a)$$

4. Den relative fejl for den n´te rod af et tilnærmet tal er lig med en n´tedel af den relative fejlgrænse for det tilnærmede tal:

$$rfg(\sqrt[n]{a}) = rfg(a):n$$

3. E-angivne tal

I nogle situationer kan man komme ud for at tilnærmede tal ikke kan angives ved de sædvanlige skrivemåder. For eksempel kan der være forelagt en talinformation der fortæller at den ukendte talværdi vil være 1800 når den afrundes til hundreder. Dermed fortæller vi at den rette værdi ligger imellem 1750 og 1850, med andre ord at tallet skal opfattes som: 1800 (fg:50).

Men hvis vi blot angiver den ukendte værdi ved det tilnærmede tal 1800, vil man tro at der foreligger et tal med fire betydende cifre, og hvis vi anvender dette antal af betydende cifre i de efterfølgende beregninger, vil vi komme til fejlagtige resultater.

I virkeligheden er der jo kun to betydende cifre i tallet 1800 i den foreliggende situation, nemlig cifrene „18“. At der foreligger et tal med to betydende cifre kan man fortælle ved hjælp af den såkaldte eksponentnotation:

$$18*10^2$$

Man kan også se dette tal anført som 18E2. Her fortæller tilføjelsen E2 at det angivne tal foran E'et skal ganges med 10^2.

Tilnærmede tal der er angivet afrundet til tiere, hundreder, tusinder, osv. bør angives i eksponentnotation så det klart fremgår hvor mange betydende cifre der forekommer i talangivelsen. Vi vil kalde sådanne tilnærmede tal for E-angivne tal.

Når E-angivne tal indgår i beregninger, er der ingen vanskeligheder ved anvendelse af regnepraksis-reglerne 2, 3 og 4. Her skal man jo tælle cifre i de tilnærmede tal, og ved et E-angivet tal skal man blot se på det tal der er anført til venstre for E'et. Undervejs i beregningen må man selvfølgelig regne med den „fulde talværdi“, dvs. 18E2 må i beregningerne indgå som tallet 1800.

Anderledes stiller det sig ved anvendelse af regel 1. Her skal jo tælles decimaler, og ved et tal der er afrundet til hundreder er der ingen decimaler på tale. Vi kan imidlertid kunstigt regne med et decimalantal på minus 2 i et sådant tal, og tilsvarende regne med et decimaltantal på minus 1 i tal der er afrundet til tiere og et decimaltal på minus 3 i tal der er afrundet til tusinder.

Med denne fortolkning af antallet af decimaler i et tal kan vi gøre brug af regel 1 selv om der indgår E-angivne tal i beregningerne.

Eksempler

(1) 234 + 78.2 + 18E2

Efter regel 1 skal resultatet angives med minus 2 decimaler, dvs. det skal angives afrundet til hundreder. Vi kan derfor angive resultatet som: 21E2. Eller vi kan skrive:

2100 (afrundet til hundreder).

(2) 234 + 56E2 + 6E3

Efter regel 1 skal resultatet angives med minus 3 decimaler, dvs. det skal angives afrundet til tusinder. Vi kan derfor angive resultatet som: 12E3. Eller vi kan skrive:

12000 (afrundet til tusinder).

Øvelse 8
Gennemfør de to beregninger ved anvendelse af fejlgrænser og angiv resultaterne med tilhørende fejlgrænse.

4. En oversigt

Fremgangsmåde ved regning med tilnærmede tal

1. *Resultatpræcision.* Ved regning med tilnærmede tal kan man ved hjælp af de opstillede regnepraksis-regler indlede med at fastlægge resultatpræcisionen, dvs. bestemme antallet af decimaler eller antallet af cifre der skal indgå i angivelsen af beregningsresultatet.

2. *Beregning.* Beregningen udføres ved hjælp af hovedregning, papir og blyant, lommeregner eller andre regnetekniske hjælpemidler.

3. *Resultat.* Resultatet af beregningen angives med den forud fastlagte præcision. Vær opmærksom på at resultatet kan indeholde cifre som ikke er betydende cifre.

4. *Mere nøjagtigt resultat.* Hvis der ønskes en mere nøjagtig angivelse af resultatet, foretages en beregning af resultatets fejlgrænse eller relative fejlgrænse. Beregningen af fejlgrænser kan foretages ved et fejlgrænseskema eller ved hjælp af de givne fejlgrænseregler for beregning af fejlgrænser i en addition og subtraktion og for beregning af relative fejlgrænser i en multiplikation eller division.

Tre muligheder

Der er altså tre mulige fremgangsmåder ved beregninger der omfatter tilnærmede tal:

1. Anvendelse af praksis-reglerne
2. Anvendelse af fejlgrænsereglerne
3. Anvendelse af fejlgrænseskemaer

De bedste resultater fås ved inddragelse af fejlgrænser, men i daglig brug er det ofte tilstrækkeligt at tælle decimaler eller cifre efter de opstillede regnepraksis-regler.

Skolens regneopgaver

I regneopgaver i skolen er der ikke tradition for at de anførte talværdier opfattes som tilnærmede tal. Her er alle tal eksakte, også dem der vedrører målinger fra den fysiske virkelighed. Så når der skal foretages en beregning af arealet af et rektangel med siderne 2.43 m og 3.78 m, så antages det at de to sidemål er hellige eksakte tal. I konsekvens heraf kan arealet da blot beregnes på lommeregneren og angives med alle lommeregnerens decimaler: 9.1854. Dette tal er det ønskede facit.

På denne måde slipper man helt for overvejelser over hvordan et beregningsresultat bør fremlægges.

5. Opgaver til Tilnærmede tal

I opgaverne er de anførte tilnærmede tal angivet ved lutter betydende cifre når der ikke er angivet en fejlgrænse for tallet.

Angiv beregningsresultaterne med tilhørende fejlgrænse. Ved beregningen af fejlgrænserne kan benyttes de opstillede fejlgrænseregler. Hvor der er tvivl, kan en beregning gennemføres ved hjælp af fejlgrænseskema.

Hvor regnepraksis-reglerne kan anvendes, bør de opnåede resultater sammenlignes med dem der fås ved anvendelse af praksis-reglerne.

1. Beregn

(1) 3.17 + 4.10 + 5.87
(2) 12.2 + 8.83 – 3.71
(3) 73.69 + 49.63 – 81.23

2. Beregn

(1) 4.62 * 8.61
(2) 5.9 * 8.18
(3) 8.439 * 96.05

3. Beregn

(1) 3.406 : 0.52
(2) 68.04 : 44.81
(3) 28.71 : 1.113

4. Beregn

(1) 10.0 * 9.90
(2) 10.00 * 9.90
(3) 1.0 * 9.9
(4) 1.0 * 9.9 * 1.0
(5) 11 : 1.2
(6) 99 : 1.1

5. Beregn

0.19 * 1.08 * 0.27 * 12.01 * 2.01 * 100.03

6. Der er givet følgende ti tilnærmede tal:

1.696	8.344	1.042	4.764	7.446
6.534	5.553	3.848	0.781	7.414

Beregn tallenes sum og deres gennemsnit.

Udfør derefter de samme beregninger efter at de ti tal er afrundet til:

(a) 2 decimaler
(b) 1 decimal
(c) Helt tal

7. Beregn arealet af et rektangel hvis sidelængder er målt til:

$a = 21.1$ cm $\quad b = 14.8$ cm

8. En vej har en bredde på 7.5 m og en længde på 512 m. Beregn vejens areal.

9. En sten har en masse på 19.524 kg og et rumfang på 7.2 dm^3.

Beregn stenens massefylde.

10. En rektangulær bordplade har sidelængder der er målt til:

$a = 73.5$ cm (fg: 0.3) $\quad b = 56.8$ cm (fg: 0.3)

Beregn bordpladens areal.

11. I en trekant måles en grundlinie og den tilhørende højde til:

$g = 412$ m (fg: 1) $h = 108$ m (fg: 1)

Beregn trekantens areal.

12. Beregn værdien af udtrykket

$$\frac{xy}{2x + 3y}$$

når x og y er målt til: $x = 2.4$ (fg: 0.2) $y = 7.5$ (fg: 0.3)

Udtrykket kan omformes til:

$$\frac{1}{\frac{2}{y} + \frac{3}{x}}$$

Beregn værdien af dette udtryk.

Sammenlign resultaterne af de to beregninger og sammenlign de to beregningers fejlgrænser.

13. Beregn arealet af en cirkel hvis radius er målt til 82 cm.

14. En bil gennemkører med konstant hastighed en strækning på 1000 m (fg: 20) på 42 sekunder (fg: 1). Hvad er bilens hastighed?

15. Beregn rumfanget af en cylinder med følgende mål:

højde: 12.8 cm   diameter: 6.9 cm

Beregn endvidere arealet af cylinderens krumme overflade og beregn arealet af cylinderens totale overflade.

16. Beregn afstanden i koordinatsystemet mellem to punkter A og B hvis koordinater er målt til:

A: $x = 14.2$ $y = 3.8$ B: $x = 32.0$ $y = 4.9$

17. En cirkels diameter måles til 13.0 cm og dens omkreds til 41 cm. Beregn herudfra værdien af pi (angiv fejlgrænse).

18. I en trekant måles de tre sider til:

$a = 188$ m $b = 132$ m $c = 145$ m

Beregn trekantens areal og beregn dernæst en af trekantens højder.

19. En prognose fortæller at befolkningstallet for et område vokser med 2% om året (fg: 0.3%) Beregn hvor meget befolkningen vokser i løbet af 10 år.

20. Radius i en kugle måles til 5.2 cm (fg: 0.1). Beregn kuglens overflade og dens rumfang.

21. Beregn længden af hypotenusen i en retvinklet trekant hvor de to andre sider er målt til: 43 cm og 57 cm.

22. Beregn gennemsnitshastigheden for en bil som kører den første halvdel af vejstrækningen med 80 km/t (fg: 2) og den anden halvdel med 68 km/t (fg: 2).

23. Arealet af et rektangel med sidelængder på ca. 70 m og ca. 80 m ønskes fastlagt med tre betydende cifre. Hvor nøjagtig skal de to sidelængder måles for at dette kan opnås?

24. Arealet af en cirkel med en radius på ca. 120 cm ønskes fastlagt med tre betydende cifre. Hvor nøjagtig skal radius måles for at dette kan opnås?

25. Beregn massefylden af en mønt der har en diameter på 21 mm (fg: 0.1), en tykkelse på 1.5 mm (fg: 0.1) og som vejer 7.5 g (fg: 0.2).

26. Et træ har fået toppen kappet af i 8.25 meters højde (fg: 0.25). Den resterende træstamme fældes ved et snit 40 cm (fg: 10) over jorden. Træstammen har så nogenlunde form som en keglestub: Omkredsen i den tykke ende er 120 cm (fg:5) og i den tynde ende 60 cm (fg: 5). Træet skønnes at have en massefylde på 0.85 (fg: 0.05). Giv et skøn over træstammens vægt.

27. Løs andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor a, b og c er målt til: a = 2.14, b = 3.78, c = - 4.12.

Computertal

1. De aritmetiske grundoperationer

I det følgende vil vi se på nogle af de vanskeligheder der foreligger ved udførelsen af beregninger på computer. Vi skal se nogle eksempler på de problemer der kan opstå ved anvendelsen af computer – eller lommeregner – i beregninger.

Af hensyn til overskueligheden vil vi i eksemplerne benytte det almindelige titalsystem selv om computeren internt regner i totalsystemet. De anførte tal vil være givet i såkaldt E-notation, **x En**, hvor n er et helt tal, og hvor x for ethvert tal, (forskelligt fra 0), opfylder kravet: $0.1 \leqq |x| < 1$. Til beregningerne vil vi tænke os benyttet en datamaskine der har tre cifre reserveret til cifferdelen x og et ciffer reserveret til E-delen n. Det største og det mindste positive tal der kan repræsenteres i denne datamaskine, bliver da henholdsvis 0.999 E9 og 0.100 E-9.

Ved computerregningen vil der blive foretaget regnemæssige operationer på tallenes cifferdele for sig og på E-delene for sig. Vi vil derfor lade regneenheden i den hypotetiske datamaskine være udstyret med registre der i udformning og størrelse er specielt indrettet med henblik på disse operationer. Til operationer med cifferdelenes talværdier vil vi afsætte plads til seks cifre i regneenhedens registre samt yderligere en plads til en eventuel menteoverføring til en cifferposition foran decimaltegnet. Til operationer med E-delens talværdier afsættes plads til to cifre i regneenhedens registre.

Af hensyn til den videre lagring i datamaskinens regneregistre må alle resultater ved de foretagne beregninger i deres endelige form angives i den tilladte E-notation, altså med en cifferdel indeholdende tre cifre og en E-del indeholdende et ciffer. Enhver aritmetisk operation vil derfor i almindelighed skulle afsluttes med at der foretages afkortning af resultatet i regneregisteret Ved afkortningen vil vi her lade datamaskinen benytte den sædvanlige afrunding.

Vi ser nu på nogle eksempler på udførelsen af de aritmetiske grundoperationer. Ved addition og subtraktion vil vi benytte den fulde cifferkapacitet i regneenhedens registre. Tallenes cifferdele vil altså i regneenheden være angivet med 6 cifre. For a=0.837 E4 og b =0.619 E4 får vi ved udregning af a + b:

a	0.837 E4 = 0.837000 E4
b	0.619 E4 = 0.619000 E4
Addition:	1.456000 E4
Afkortning til tre cifre:	1.46 E4
På standardform:	0.146 E5

Ved udregning af a + b må der altså her efter additionens udførelse foretages afkortning og flytning af decimaltegn før resultatet foreligger i den endelige form.

Når de to addender ikke er angivet ved samme eksponent, indledes additionen med en række positionsskift. For a=0.264 E5 og b= 0.473 E3 får vi:

a	0.264 E5 = 0.264000 E5
b	0.473 E3 = 0.004730 E5
Addition	0.268730 E5
Afkortning	0.269 E5

Såfremt positionsskiftene strækker sig over mere end tre positioner, vil der foretages en afkortning i den trecifrede talnotation. Vi vælger at lade datamaskinen foretage denne afkortning ved afskæring af cifre. For a = 0.264 E5 og b = 0.478 E1 får vi da:

a	0.264 E5 = 0.264000 E5
b	0.478 E1 = 0.000047 E5
Addition	0.264047 E5
Afkortning	0.264 E5

Af udregningerne fremgår det at talværdien af b har været uden indflydelse på det endelige resultat.

Lad nu a og b have værdierne 0.102 E-2 og 0.531E-4. For differensen a - b får vi:

a	0.102 E-2 = 0.102000 E-2
b	0.531 E-4 = 0.005310 E-2
Subtraktion	0.096690 E-2
Afkortning	0.0967 E-2
Standarform	0.967 E-3

Ved angivelsen af de endelige resultater må det kontrolleres at E-delens værdi ligger inden for det tilladte område. En addition af tallene 0.763 E9 og 0.518 E9 vil således føre til resultatet 1.28 E9, der omskrives til 0.128 E10. Der indtræffer her et såkaldt *overløb* i eksponenten. På tilsvarende måde vil der kunne indtræffe *underløb* når den resulterende eksponent antager en værdi der er mindre end -9.

Øvelse 1

Udregn i trecifret computerregning summen a + b i hvert af følgende til fælde

(1) a=0.178 E5, b = 0.888 E5
(2) a=0.178 E5, b = 0.888 E3
(3) a=0.178 E5, b= -0.888 E5

Multiplikation
Vi ser nu på multiplikation. Denne udføres ved en multiplikation af tallenes cifferdele, medens E-delenes tal adderes. Multiplikationen af cifferdelene vil give et resultat der højst indeholder 6 cifre, og der vil således være afsat tilstrækkelig plads i computerens regneregister til det fuldstændige produkt. For a = 0.313 E4 og b = 0.741 E2 har vi:

a	0.313 E4
b	0.741 E2
Multiplikation	0.231933 E6
Afkortning	0.232 E6

Øvelse 2
Udregn i trecifret computerregning produktet a * b i følgende tilfælde:

(1) a = 0.178 E2, b = 0.888 E5
(2) a = 0.243 E3, b = 0.452 E-4
(3) a = 0.452 E-4, b = 0.452 E-4

Division
Herefter ser vi på division. Den egentlige divisionsprocedure udføres med tallenes cifferdele, medens divisorens E-del trækkes fra dividendens E-del. Af hensyn til den nødvendige afrunding af den fremkomne kvotient vil vi lade divisionen fortsætte indtil der foreligger en kvotient med fire betydende cifre. Vi ser på nogle eksempler.

For a = 0.120 E2 og b = 0.290 E3 har vi ved beregning af a :b:

a	0.120 E2
b	0.290 E3
Division	0.4137 E-1
Afkortning	0.414 E-1

Øvelse 3
Udregn i trecifret computerregning kvotienten a : b i følgende tilfælde:

(1) a = 0.600 E2, b = 0.110 E-3
(2) a = 0.250 E-5, b = 0.700 E3
(3) a = 0.800 E-5, b = 0.400 E5

2. Sammensatte regninger
Ved beregninger der udføres med computertal, vil en række af de sædvanlige regler for regning med tal ikke have gyldighed. Vi ser på et taleksempel hvor det er afgørende for en addition hvordan der sættes parenteser i regneudtrykket. For a=0.863 E2, b=0.528 E1 og c=0.196 E1 får vi ved udregning af summen (a + b) + c:

a	0.863 E2 = 0.863000 E2
b	0.528 E 1 = 0.052800 E2
Addition	0.915800 E2
Afkortning	0.916 E2

Ved fuldførelsen af udregningen af (a + b) + c får vi nu:

a + b	0.916 E2 = 0.916000 E2
c	0.196 E1 = 0.019600 E2
Addition	0.935600 E2
Afkortning	0.936 E2

En beregning af summen a + (b + c) vil imidlertid føre til et andet resultat. For b + c får vi først: 0.724 E1 og ved addition med a fås dernæst: a + (b + c) = 0.935 E2. Det ses altså, at den sædvanlige associative lov for addition ikke har bevaret sin gyldighed i computerregningen.

Heller ikke den associative lov for multiplikation er længere gyldig. For de tre betragtede tal: a = 0.863 E2, b = 0.528 E1 og c = 0.196 E1 får vi ved trecifret computerregning:

(a* b)* c = 0.894 E3   a* (b* c) = 0.889 E3

Disse taleksempler viser at man ved computerregning må være varsom med flytte parenteser, idet to forskelligt udførte sammenknytninger af regningens tal åbenbart kan føre til to forskellige beregningsresultater.

Andre fælder

Vi fremhæver endnu et par af de sædvanlige regneregler, som ikke har gyldighed i computerregning. For eksempel vil det ikke for vilkårlige tal a og b gælde, at værdien af (a + b) - b er identisk med værdien af a. Således har vi for a = 0.962 E2 og b = 0.721 E1:

a + b = 0.103 E3

(a + b) - b = 0.958 E2 (som er forskelligt fra a)

Også talværdien af (a* b) : b vil her adskille sig fra værdien af a, idet vi ved udregning får:

(a *b):b = 0.963E2.

Ved betragtninger over tals indbyrdes størrelsesforhold vil nogle af de sædvanlige regler for regning med uligheder også miste deres gyldighed. Addition af en og samme talstørrelse til to indbyrdes forskellige tal kan således frembringe identiske talværdier. Til eksempel kan vi anføre: a = 0.996 E3, b = 0.998 E3 og C = 0.521 E1. Vi har her:

a+c = b+c = 0.100 E4.

Dette eksempel viser at man for vilkårlige tal a, b og c, hvor a < b, ikke kan slutte: a + c < b + c.

Øvelse 4
Angiv tre positive tal a, b og c, hvor a < b, og hvor det ved trecifret computerregning gælder: a* c = b* c.

Vi har i dette afsnit set at de regler der gælder for computerregning på en række væsentlige punkter adskiller sig fra de sædvanlige regneregler for de reelle tal. Dette betyder dog ikke at computerregning er uanvendelig til udførelsen af forelagte beregninger. De eksempler vi har betragtet, gjorde således alle brug af trecifret regning, medens eksisterende datamaskiner som oftest vil anvende regning med 10-20 cifre. Derved vil de beregningsunøjagtigheder der skyldes udførelsen i computerregning, i mange tilfælde være uden praktisk betydning. Men uanset hvor mange cifre der benyttes i computerregningen, er de ovenfor omtalte afvigelser fra de sædvanlige regneregler til stede, og en række af de vanskeligheder der opstår ved anvendelsen af computerregning, lader sig derfor ikke fjerne.

3. Beregning af rødderne i en andengradsligning
Vi afslutter omtalen af computerregning med nogle eksempler der illustrerer anvendelsen af computerregning i en velkendt og overskuelig beregningssituation, nemlig den der foreligger ved beregningen af rødderne i en andengradsligning. Vi betragter alene andengradsligninger med to rødder, og eksemplerne vil her fremdrage nogle af de forskelle der kan være mellem den teoretiske løsning af et beregningsproblem og den praktiske løsning af det samme problem.

I beregningerne vil vi fortsat gøre brug af trecifret computerregning, men vi vil nu antage at den benyttede datamaskine ud over de fire almindelige regningsarter er i stand til at udføre kvadratrodsuddragninger.

Lad der nu være forelagt en andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$, der vides at have to rødder x_1 og x_2. Fra den teoretiske behandling af andengradsligninger har vi de velkendte udtryk for x_1 og x_2:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$

Vi vil i det følgende nærmere undersøge anvendelighed af disse udtryk ved beregninger der udføres i computerregning. Det ses umiddelbart at der ved de to beregninger vil indgå en række aritmetiske operationer som i computerregningen kan være behæftede med afrundingsfejl. Idet vi betegner tallet $b^2 - 4ac$ med „d“, indgår således i beregningen af x_1 og x_2 følgende ti enkeltoperationer, som hver især kan give anledning til afrundingsfejl:

(1) beregning af b^2

(2) beregning af 4a

(3) beregning af 4ac

(4) beregning af d

(5) beregning af $\sqrt{d}$

(6) beregning af $-b + \sqrt{d}$

(7) beregning af 2a

(8) beregning af $(-b + \sqrt{d}):2a = x_1$

(9) beregning af $-b - \sqrt{d}$

(10) beregning af $(-b - \sqrt{d}):2a = x_2$

Herudover vil der opstå afrundingsfejl ved angivelsen af a, b og c såfremt disse tal ikke kan angives eksakt i den trecifrede computerregning.

I eksemplerne vil vi kun betragte situationer hvor de angivne koefficienter er eksakt repræsenterede ved tre cifre. De fejl der da opstår i bestemmelsen af x_1 og x_2, vil dermed alle kunne føres tilbage til en eller flere af de ti operationer der er angivet ovenfor.

Til vurdering af et beregningsresultat vil vi foretage en sammenligning mellem den fundne og den korrekte trecifrede værdi. Det ideelle krav til den benyttede beregningsmetode må da være at den fundne værdi og den korrekte trecifrede værdi stemmer overens for enhver andengradsligning hvor såvel koefficienterne a, b og c, som rødderne x_1 og $x_2$tilhører det givne talområde for computerregningen. Med andre ord: Vi ønsker at alle de angivne resultater indeholder tre betydende cifre. Som vi skal se, kan dette krav imidlertid ikke opfyldes ved den angivne metode til beregning af x_1 og x_2.

Vi betragter først andengradsligningen:

$$6x^2 - 11x + 3 = 0$$

hvor a, b og c i trecifret computer regning angives ved: a = 0.600 E1, b = -0.110 E2 og c = 0.300 E1.

For de eksakte værdier af ligningens rødder har vi: x_1 = 1½ og x_2= 1/3. Ved computerregning fås følgende resultater i enkeltoperationerne:

(1) $b^2 = 0.121\ E3$

(2) $4a = 0.240\ E2$

(3) $4ac = 0.720E2$

(4) $d = 0.490E2$

(5) $\sqrt{d} = 0.700\ E1$

(6) $-b + \sqrt{d} = 0.180\ E2$

(7) $2a = 0.120\ E2$

(8) $(-b + \sqrt{d}): 2a = 0.150\ E1 = 1.50$

(9) $-b - \sqrt{d} = 0.400\ E1$

(10) $(-b - \sqrt{d}): 2a = 0.333\ E0 = 0.333$

Med de givne koefficienter ses det at der her alene ved beregningen i (10) forekommer afrundingsfejl. Beregningerne fører da også til værdier for x_1 og x_2 som med tre cifres præcision stemmer overens med de eksakte værdier der er anført ovenfor.

Herefter ser vi på andengradsligningen:

$$0.283x^2 - 1.24x + 0.115 = 0,$$

hvor a, b og c har værdierne: a=0.283 E0, b=-0.124 E1 og c= 0.115 E0. Ved beregningen i trecifret regning får vi:

(1) $b^2 = 0.154$ E1

(2) $4a = 0.113$ E1

(3) $4ac = 0.130$E0

(4) $d = 0.141$ E1

(5) $\sqrt{d} = 0.119$ E1

(6) $-b + \sqrt{d} = 0.243$ E 1

(7) $2a = 0.566$ E0

(8) $(-b + \sqrt{d})$: $2a = 0.429$ E1 $= 4.29$

(9) $-b - \sqrt{d} = 0.500$ E-1

(10) $(-b - \sqrt{d})$: $2a = 0.883$ E-1 $= 0.0883$

Til sammenligning har vi de korrekte trecifrede værdier: $x_1 = 4.29$ og $x_2 = 0.0947$. Medens beregningen i computerregning således resulterer i den korrekte værdi for x_1, må bestemmelsen af x_2 betragtes som utilfredsstillende, og vi skal nu nærmere undersøge årsagen til denne store forskel i beregningsnøjagtighed for de to fundne værdier.

I de otte enkeltoperationer der fører frem til værdien af x_1, forekommer der en række afrundingsfejl. En sammenligning med de tilsvarende korrekte værdier for hver af de otte beregnede størrelser vil dog vise, at ingen af de anførte resultater afviger fra de korrekte trecifrede værdier, og hver af første otte beregninger frembringer dermed for de søgte værdier den mest nøjagtige angivelse der kan opnås i trecifret regning.

Dette gælder imidlertid ikke for beregningen af $-b - \sqrt{d}$ i (9). Tallene $-b$ og $\sqrt{d}$ er næsten lige store, og ved subtraktionen i (9) forekommer et *nøjagtighedstab* der bevirker at vi ikke kan have tillid til alle tre cifre i angivelsen for $-b - \sqrt{d}$. Den korrekte trecifrede værdi viser sig da også ved en nøjere beregning at være 0.536 E-1, og i det anførte resultat i (9) er således kun det første betydende ciffer korrekt. Denne unøjagtighed videreføres dernæst i (10) til den beregnede værdi for x_2.

Tilsvarende vanskeligheder vil opstå i enhver beregning hvor tallene - b og $\sqrt{d}$ afviger så lidt fra hinanden at udregningen af differensen mellem de to tal ikke kan foretages med en nøjagtighed der fuldt udnytter computerregningens præcision på tre cifre. Dette indtræffer når $b < 0$ og når samtidig værdien af 4ac er ubetydelig i forhold til værdien af b^2.

Man taler i sådanne tilfælde undertiden om at der i beregningerne indtræffer en *subtraktionskatastrofe*.

Ved et passende valg af beregningsmetoder vil man ofte kunne undgå denne situation eller i hvert fald reducere virkningen af dem.

Øvelse 5
Gennemfør beregningerne (1) - (10) ovenfor for andengradsligningen $x^2 - 100x + 1 = 0$.

4. Opgaver

I opgaverne er det underforstået at beregningerne udføres i tre-cifret computerregning.

1. Beregn a + b :

(1) a = 0.258 E1	b = 0.456 E2
(2) a = 0.196 E1	b = 0.105 E3
(3) a = - 0.812 E-2	b = 0.223 E-1

2. Beregn a + b :

(1) a = 0.200 E5	b = -0.501 E2
(2) a = 0.100 E5	b = -0.510 E1
(3) a = 0.100 E5	b = -0.500 E1

3. Beregn a*b :

(1) a = 0.343 E5	b = 0.580 E2
(2) a = 0.313 E5	b = 0.280 E2
(3) a = -0.303 E5	b = 0.120 E-2

4.. Beregn a:b :

(1) a = 0.402 E3	b = 0.180 E-5
(2) a = 0.654 E-1	b = 0.824 E3
(3) a = 0.950 E5	b = 0.110 E-2

5. Vis ved et taleksempel at der i trecifret computerregning ikke nødvendigvis gælder at a*(b+c) = a*b + a*c.

6. Vis ved et eksempel at der i trecifret computerregning ikke nødvendigvis gælder at 1: (1:a) = a

7. Find to tal a og b for hvilke det ved trecifret computerregning gælder at a*(1:b) og a:b har to forskellige værdier.

8. Find et tal a for hvilket det ved trecifret computerregning gælder at $a^3 * a$ og $a^2 * a^2$ har to forskellige værdier.

9. Find to tal a og b for hvilke det ved trecifret computerregning gælder at $(a*b)^2$ og a^2*b^2 har to forskellige værdier.

10. Find to tal a og b for hvilke det ved trecifret computerregning gælder at $(a + b)^2$ og $a^2 + 2ab + b^2$ har to forskellige værdier.

11. Find to tal a og b for hvilke det ved trecifret computerregning gælder at $(a+b)*(a-b)$ og $a^2 – b^2$ har to forskellige værdier.

12. Find to tal a og b for hvilke det ved trecifret computerregning gælder at $a<b$ og $a^2= b^2$.

13. Beregn ved trecifret computerregning rødderne i ligningen $ax^2 + bx +c = 0$, hvor a, b og c har værdierne: a = 1, b = -5 , c = 6.

14. Beregn ved trecifret computerregning rødderne i ligningen $ax^2 + bx +c = 0$, hvor a, b og c har værdierne: a = 2, b = 1.25, c = -0.8

15. Beregn ved trecifret computerregning rødderne i ligningen $ax^2 + bx +c = 0$, hvor a, b og c har værdierne: a = 0.456, b = -9.2, c = 1.

16. Beregn ved trecifret computerregning rødderne i ligningen $ax^2 + bx +c = 0$, hvor a, b og c har værdierne: a = 1, b = 40, c = 1.

17. Beregn ved trecifret computerregning rødderne i ligningen $ax^2 + bx +c = 0$, hvor a, b og c har værdierne: a = 1, b = -4, c = 3.99.

TALKUNNEN-SERIEN

Talkunnen 1: Taldata

Talkunnen 2: Tre test

Talkunnen 3: Datasæt i samspil

Talkunnen 4: Stikprøver

Talkunnen 5: Tal i brug og misbrug

Talkunnen 6: Tilnærmede tal og computertal

Talkunnen 7: Gå på taljagt