Tre slags gennemsnit

Allan C. Malmberg

Det er en af de hyppigst forekommende udregninger i den elementære talbehandling at beregne gennemsnit eller middeltal af en række tal.

For mange skoleelever indgår beregningen som rutine i den stillede opgave: Der er spurgt om gennemsnittet, så udregner vi det, uden i øvrigt at tænke over hvad det betyder eller hvad det kan anvendes til. Og det spørges der for resten heller ikke om i opgaven.

Lad os se på nogle eksempler som kan vise at gennemsnit kan være mere end én ting.

Vi går i første omgang let henover det sædvanlige gennemsnit, det såkaldte *aritmetiske gennemsnit*. Vi ved alle at dette gennemsnit beregnes ved at vi lægger de forelagte tal sammen og dividerer den fundne sum med antallet af tal.

Lad os blot gøre det så enkelt som muligt, og sige at vi har forelagt to tal a og b. Det aritmetiske gennemsnit af disse tal beregner vi efter følgende formel:

$$A=\frac{a+b}{2}$$

Vi vil nu se på nogle situationer hvor dette gennemsnit ikke har stor mening.

Geometrisk gennemsnit

Vi ser på nogle procentvise stigninger:

1. år: stigning på 5%   2. år: stigning på 25%

Hvad er den gennemsnitlige stigning pr. år over de to år?

Et eksempel

En vare koster 100 kr. ved starten af år 1. Derefter udvikler prisen sig efter de stigninger der er angivet ovenfor:

Efter år 1: pris 100 kr.+ 5% =100·1.05 = 105.00 kr.

Efter år 2: pris 105 kr. + 25% = 105·1.25 = 131.25 kr.

De 100 kr er altså vokset til 131.25 kr. i løbet af to år.

Slutbeløbet udtrykt ved startbeløbet og de to stigningsfaktorer: 100·1.05·1.25=131.25

Problem: Hvis stigningen hvert af de to år skal være den samme, hvilken stigningsfaktor vil så give samme slutbeløb som ovenfor?

Kald den søgte stigningsfaktor x. Der skal da gælde: $100 \cdot x \cdot x = 131.25$

Eller $x^2 = 1.3125$

Heraf fås: $x = \sqrt{1.3125} = 1.1456$

dvs. stigningsfaktoren har været 1.1456, og den procentvise stigning dermed 14.56%. Med andre ord: En stigning det ene år på 5% og det andet år på 25% svarer til en årlig stigning på 14.56% hvert af de to år.

Havde vi udregnet det aritmetiske gennemsnit af de to stigninger ville vi have fået tallet 15%. Men en stigning på 15% hvert af de to år giver ikke samme slutresultat som en stigning på 5% det ene år og 25% det andet år. Her er det rigtige svar, som vi har set, at den "gennemsnitlige stigning" har været 14.56%.

Gennemsnit af denne art har sin egen betegnelse: *geometriske gennemsnit* Det geometriske gennemsnit af to tal a og b kan beregnes ved formlen:

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

Vi beregnede altså her det geometriske gennemsnit af de to givne stigningsfaktorer.

Harmonisk gennemsnit

En tredje type af gennemsnit forekommer fx ved beregninger af gennemsnitshastigheder ved kørsel over en række lige store afstande: Vi kører på henturen med 80 km/t og på hjemturen med 60 km/t, hvad er den gennemsnitlige hastighed på hele turen?

I skolen har vi lært at disse opgaver med gennemsnitshastigheder er lumske. De skal behandles på en speciel måde:

> Vi antager fx at turen har en længde på 120 km. Udturen har så varet 1,5 time, og hjemturen vil tage 2 timer. Alt i alt har vi derfor kørt 240 km på 3,5 time. Heraf finder vi gennemsnitshastigheden: 240/3,5 = 68,57 km/t.

Vi ser at det aritmetiske gennemsnit af de to hastigheder er 70 km/t. Men hvis vi kørte med denne hastighed på både udtur og hjemtur, ville det ikke svare til at køre med 80 km/t på udturen og 60 km/t på hjemturen.

Der er her tale om et nyt gennemsnit, det såkaldte harmoniske gennemsnit Dette gennemsnit kan beregnes ved en formel:

$$H = \frac{2}{1/a + 1/b}$$

som kan omformes til:

$$H= \frac{2ab}{a+b}$$

Ved indsættelse af værdierne for a og b får vi til kontrol:

$$H= 2·60·80/140 = 9600/140 = 68,57.$$

Også ved beregning af gennemsnit af valutakurser kan vi benytte det harmoniske gennemsnit: Vi køber først for 1000 kr af en valuta hvis kurs er 1.25, derefter for 1000 kr. af en valuta hvis kurs er 1.50. Hvad er den gennemsnitlige kurs for vore køb?

Svaret er givet ved det harmoniske gennemsnit af de to kurser:

$$H = \frac{2·1.25·1.50}{1.25+1.50} = 1.36$$

Du kan let kontrollere at dette er den gennemsnitlige kurs ved de to valutakøb.

* * *

Vi kan nu konkludere at der er andre gennemsnit end det sædvanlige aritmetiske. Somme tider kan vi benytte dette gennemsnit, men i andre situationer får vi brug for enten det geometriske gennemsnit eller det harmoniske.

Nu melder selvfølgelig spørgsmålet sig: *Hvordan kan jeg vide om det er det ene eller det andet eller det tredje gennemsnit jeg skal anvende?* Hvornår bruger man det aritmetiske, hvornår skal man anvende det geometriske, og i hvilke tilfælde skal man trække det harmoniske ud af stalden?

I øvrigt vil den erfarne skoleelev her sikkert begynde at ane at rækken af gennemsnit nok slet ikke er udtømt med de tre nævnte. Det skulle ikke undre om matematiklæreren kendte endnu flere af typen.

Hvad vil vi med gennemsnit?

Men lad os se på generelle egenskaber ved gennemsnit. Lad os først slå fast at et gennemsnit benytter vi for at kunne give en koncentreret beskrivelse af en række taldata. I vore eksempler ovenfor var der kun forelagt to tal a og b, og det var dem vi erstattede med ét tal, nemlig gennemsnittet. Det er altid ideen ved brug af gennemsnit: *Vi vil benytte ét tal som en erstatning for de foreliggende taldata*.

Når vi derfor skal afgøre hvilket gennemsnit vi ønsker at anvende, må vi gøre os klart hvad det er for et indhold i de forelagte tal vi ønsker at udtrykke ved et enkelt tal. Hvis vi ikke aner hvad de forelagte tal udtrykker, kan vi heller ikke foreslå ét gennemsnit som bedre end et andet. Det er en betingelse at vi véd hvad vore tal udtrykker.

Lad os som eksempel tage to tal 50 og 80. Vi får at vide at de fortæller hvor mange kroner vi har brugt på to biografture. Nu kan vi bestemme os for et gennemsnit. Vi vil nemlig vide hvad vi kunne have brugt "i gennemsnit" på de to ture således at de samlede udgifter havde været de samme som da vi brugte 50 kr. på den ene tur og 80 kr. på den anden. Her er ingen tvivl: vi skal benytte det aritmetiske gennemsnit, 65 kr.

Lidt mere formelt kunne vi gå frem sådan: Der foreligger en *specifikation* S som fortæller hvilket beregning vi er interesseret i med hensyn til de to tal a og b. Vi skal da finde et tal x som kan erstatte både a og b, sådan at det foreliggende beregningsresultat bliver det samme.

Med andre ord:

S(a,b): De samlede udgifter ved køb for a og b kroner

Betingelse: S(a,b) = S(x,x).

Her ser vi at x skal være det aritmetiske gennemsnit af a og b hvis den stillede betingelse skal opfyldes:

$a + b = x + x$, dvs. $x = \frac{a+b}{2}$

Lad os vende tilbage til de procentvise stigninger. Her har vi følgende specifikation:

S(a,b): Den samlede stigningsfaktor når den første stigningsfaktor er a og den næste er b.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x)

Den søgte x-værdi skal altså kunne gå ind i stedet for a og b, og give samme samlede stigningsfaktor som resultat.

En udregning giver her:

$a \cdot b = x \cdot x$ eller: $x = \sqrt{a \cdot b}$

Som vi så blev resultatet her at vi skulle anvende det geometriske gennemsnit af de to stigningsfaktorer.

I eksemplet med gennemsnitshastigheder ser billedet således ud:

S(a,b): Den samlede køretid ved en hastighed på a km/t på udturen og en hastighed på b km/t på hjemturen.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x)

Beregning (idet turens længde sættes til L km):

L/a + L/b = L/x + L/x

dvs. 1/a + 1/b = 1/x + 1/x

eller: $x = \frac{2ab}{a+b}$

Beregningerne viser at det gennemsnit der her skal bruges for at opfylde den opstillede betingelse, er det harmoniske gennemsnit.

Opgave**:** Gennemfør beregningen for valutavekslingen.

Rektanglet som eksempel

Vi ser nu på et nyt eksempel. Der er forelagt et rektangel med sidelængderne a og b. Find et "gennemsnitsrektangel" med lige store sider (altså et kvadrat).

Dette spørgsmål har ingen mening uden en nærmere specifikation. Lad os sige at det vi er på jagt efter er en figur med samme areal som rektanglet. Vi benytter nu følgende specifikation:

S(a,b): Arealet af rektanglet med sidelængderne a og b.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x)

Med andre ord: Find det kvadrat med sidelængden x som har samme areal som det forelagte rektangel.

Vi foretager her arealberegningerne i de to situationer, og får at betingelsen betyder følgende:

a·b = x·x

Her står jo at de to arealer skal være lige store. Vi finder heraf om det søgte x:

$x = \sqrt{a \cdot b}$

Den søgte værdi for x er altså det geometriske gennemsnit af a og b. Havde vi i stedet opstillet denne specifikation:

S(a,b): Omkredsen af rektanglet med sidelængderne a og b.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x),

så ville resultatet have været at x skulle være det aritmetiske gennemsnit af a og b. (Gennemfør udregningen!)

Lad os prøve endnu en specifikation i tilknytning til rektanglet med siderne a og b:

S(a,b): Forholdet mellem areal og omkreds af rektanglet med sidelængderne a og b.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x)

Ved udregning af forholdet mellem areal og omkreds får vi:

$$\frac{ab}{2a+2b} = \frac{x^2}{4x}$$

Heraf følger: $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

dvs. x er det harmoniske gennemsnit af tallene a og b. I kvadratet med den fundne sidelængde x vil forholdet mellem areal og omkreds altså være det samme som i det forelagte rektangel med sidelængderne a og b.

De tre eksempler viser os at det er den givne specifikation der helt afgør hvilket gennemsnit der er behov for. Ønsker vi et kvadrat som har samme areal som rektanglet, så skal vi benytte det geometriske gennemsnit for at finde sidelængden i kvadratet. Ønsker vi et kvadrat med samme omkreds som rektanglet skal vi benytte det aritmetiske gennemsnit. Og ønsker vi et kvadrat hvor forholdet mellem areal og omkreds er det samme som i rektanglet, så skal vi benytte det harmoniske gennemsnit.

Vi kan nu vende tilbage til spørgsmålet: *Hvornår skal man vælge det ene gennemsnit, hvornår det andet og hvornår det tredje?* Ja, desværre kan der ikke gives nogle færdige regler som kan klare dette problem. Svaret er at valget må afhænge af situationen. Som vi så i eksemplet med rektanglet kan alle tre gennemsnit forekomme, blot i hver sin sammenhæng.

Spørgsmålet om hvilket gennemsnit der er det rigtige hænger sammen med det generelle problem: Hvordan anvendes matematik korrekt til løsning af problemer! Det er der heller ikke noget let og almengyldigt svar på.

Lidt mere banalt svarer spørgsmålet om det rigtige gennemsnit til skoleelevens spørgsmål: Skal jeg lægge sammen eller gange? - Det kan vi heller ikke give et generelt svar på, det afhænger igen af situationen.

Matematiske krav

Undertiden kan der være opstillet matematiske krav til det gennemsnit der ønskes anvendt, og så er sagen straks nemmere. Så skal den besværlige virkelighed jo ikke med ind i billedet. For eksempel kan man af matematiske grunde ønske et gennemsnit, som har den egenskab at hvis de enkelte tal alle forøges med samme værdi så vil gennemsnittet også blive øget med denne værdi. Dette krav opfyldes af det aritmetiske gennemsnit, men ikke af de andre.

Et andet matematisk krav kunne være at hvis alle tal erstattes af deres reciprokke værdier, så vil også gennemsnittet blive erstattet af sin reciprokke værdi. Dette krav opfyldes af det geometriske gennemsnit, men ikke af de andre.

Endnu et gennemsnit

Er rækken af gennemsnit udtømt med de tre? Nej, på ingen måde. Vi kan introducere et fjerde i tilknytning til vort rektangel med siderne a og b. Nu er specifikationen således:

S(a,b): Længden af diagonalen i rektanglet med sidelængderne a og b.

Betingelse: S(a,b) = S(x,x)

Vi søger altså det kvadrat som har diagonaler af samme længde som det givne rektangel. Ved udregning får vi:

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}\cdot x$

De to udtryk angiver diagonalernes længde i henholdsvis rektanglet og kvadratet.

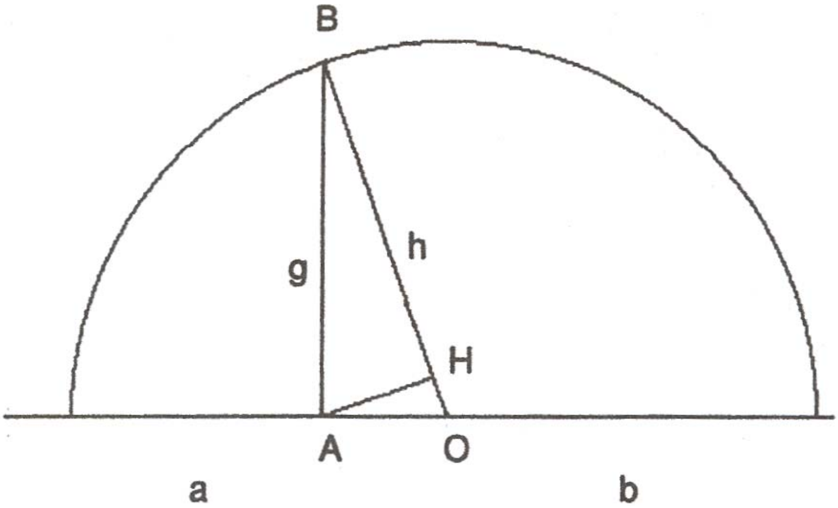
Heraf får vi: $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Dette gennemsnit har vi ikke tidligere mødt. Det kaldes *det kvadratiske gennemsnit* af a og b. Det kvadratiske gennemsnit K af a og b er altså givet ved formlen:

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

En geometrisk illustration

De tre gennemsnit af tallene a og b: det aritmetiske, det geometriske og det harmoniske kan illustreres på én figur.



To linjestykker af længden a og b er tegnet i forlængelse af hinanden. De to linjestykker mødes i punktet A. Over det samlede linjestykke tegnes en halvcirkel med linjestykket som diameter. I punkt A oprejses en vinkelret til skæring med cirkelbuen i B. Fra B tegnes en linje til cirklens centrum O, og fra A nedfældes den vinkelrette på BO. Det kan nu eftervises at længden af AB er det geometriske gennemsnit af a og b, og at længden af BH er det harmoniske gennemsnit af a og b. Det aritmetiske gennemsnit findes også på figuren, det er jo givet ved længden af radius i cirklen, altså ved linjestykket BO.

Eftervis at de nævnte linjestykker har de påståede længder.

Størrelsesrelationer
Af trekanterne ABO og ABH på figuren ser vi at det aritmetiske gennemsnit af a og b er større end det geometriske, som igen er større end det harmoniske. Gennemfør argumentet herfor.

I øvrigt kan det fjerde af de nævnte gennemsnit, det kvadratiske gennemsnit, også illustreres på tegningen: Tegn halvcirklen med centrum i O og med OA som radius (den halvcirkel som ligger inden i den store halvcirkel på figuren). Oprejs dernæst i O den vinkelrette på OB. Den skærer halvcirklen i et punkt K. Linjestykket BK har en længde som er lig med det kvadratiske gennemsnit af a og b. Eftervis at det er rigtigt.

Af figurens trekanter vil vi herefter kunne se at det kvadratiske gennemsnit af a og b er større end det aritmetiske gennemsnit. For de fire gennemsnit har vi dermed følgende størrelsesrelationer:

$$H<G<A<K$$

Hvis de to tal a og b er lige store, får alle de fire gennemsnit samme talværdi.

Vi har fastslået størrelsesrelationeme mellem de fire gennemsnit på grundlag af figurbetragtninger. Der kan selvfølgelig føres et matematisk bevis herfor ud fra de algebraiske udtryk for de fire gennemsnit. Prøv at gennemføre et sådant bevis.

Fortolkning af størrelsesrelationeme

De fundne størrelsesrelationer kan fortolkes i tilknytning til det tidligere anvendte rektangel-eksempel.

1. G<A

Ved anvendelse af formlerne for de to gennemsnit har vi:

$$\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$$

Heraf får vi: $a \cdot b < (a + b)^2/4$

Tallet $a \cdot b$ er arealet af rektanglet med sidelængder a og b, medens tallet $(a + b)^2/4$ er arealet af det kvadrat der har samme omkreds som rektanglet med sidelængderne a og b. Vi kan derfor fortolke størrelsesrelationen G < A således:

Af alle rektangler med given omkreds
har kvadratet det mindste areal.

2. H <G

Ved anvendelse af formlerne for de to gennemsnit kommer vi frem til følgende resultat:

Af alle rektangler med givet areal har kvadratet
det største areal-til-omkreds forhold.

3. A<K

Denne størrelsesrelation fører til følgende resultat:

Af alle rektangler med given omkreds
har kvadratet den korteste diagonal.

Gennemfør udregningerne for hver af de to størrelsesrelationer H< G og A < K.

Generelle egenskaber ved gennemsnit

To generelle egenskaber ved de fire gennemsnit af a og b er følgende:

(1) Gennemsnittet har en talværdi der ligger i intervallet fra a til b.

(2) Hvis a og b multipliceres med samme tal, vil også gennemsnittet blive multipliceret med dette tal.

Derimod gælder ikke generelt: Hvis a og b forøges med samme tal, vil også gennemsnittet blive forøget med dette tal. Det gælder alene for det aritmetiske gennemsnit.

De tre gennemsnit A, G og H er nært knyttede til tre såkaldte matematiske rækker:

En ***aritmetisk række*** er fx følgende:

3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ...

hvor leddene i rækken forøges med samme værdi, her værdien 2, hver gang vi går et skridt videre. En sådan række kaldes også en differensrække.

I denne række gælder at ethvert led er *det aritmetiske gennemsnit* af sine to naboled. Således er 7 det aritmetiske gennemsnit af naboerne 5 og 9.

En ***geometrisk række,*** også kaldet en kvotientrække, er fx:

3 + 6 + 12 + 24 + 48 + ...

hvor leddene i rækken multipliceres med samme værdi, her værdien 2, hver gang vi går et skridt videre.

I denne række gælder at ethvert led er *det geometriske gennemsnit* af sine to naboled. Således er 12 det geometriske gennemsnit af naboerne 6 og 24.

Rækken

1 +1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5+...

kaldes ***den harmoniske række***. I denne række gælder at ethvert led er det harmoniske gennemsnit af sine to naboled. Således er 1/4 det harmoniske gennemsnit af naboerne 1/3 og 1/5. (Gør rede for at det er rigtigt).

En fælles beskrivelse

De betragtede gennemsnit af to tal a og b kan gives en fælles beskrivelse ved hjælp af en forskrift f på følgende måde:

$$\text{f(gennemsnit)} = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

For de fire gennemsnit skal f fastlægges på følgende vis:

Det aritmetiske genenmsnit: f(x) = x

Det geometriske gennemsnit: f(x) = log x

Det harmoniske gennemsnit: $f(x) = 1/x$

Det kvadratiske gennemsnit: $f(x) = x^2$

Til eksempel får vi for det geometriske gennemsnit G:

$$\log(G) = (\log a + \log b)/2$$

Vis at det stemmer med definitionen på geometrisk gennemsnit.