VisiRegn ideer 6

Simulering af chancer

Inge B. Larsen
ibl@dpu.dk
INFA juli 2001

Indhold:

Angivelsen af klassetrin må naturligvis tages med en del forbehold.
B: Begyndertrinnet 1.-3. klasse
M: Mellemtrinnet 3.-7. klasse
Æ: Ældste klassetrin 7.-10. klasse

Denne tekst er tænkt som lærerens baggrundsmateriale til en række elevaktiviteter. Elevaktiviteterne, der er beskrevet på særskilte ark er ikke øremærkede til bestemte klassetrin. En del af aktiviteterne kan tages op på mange forskellige klassetrin, idet indsamlingen og simuleringen af data samt behandlingen af disse afpasses efter elevernes matematiske kunnen. Nogle aktiviteter er beskrevet detaljeret, mens andre blot beskriver en chancesituation, der kunne inspirere til simulering. Der er som regel i hver aktivitet en stigende sværhedsgrad i opgaverne.

Chancesituationer lægger i høj grad op til en eksperimenterende arbejdsform, hvor eleverne gætter på en chancesituations forløb, samler data fra forløb af chancesituationen, eventuelt ved at udforme en simuleringsmodel, og tager det oprindelige gæt op til en revision set i lyset af de indsamlede data. Det er et emne, hvor der ikke vil være ét tal, som er det rigtige facit, men hvor man forhåbentlig gennem udforskning af chancesituationer kan styrke sit intuitive sandsynlighedsbegreb, og indhente erfaringer med at opbygge modeller til simulering af chancesituationer.

Ved en eksperimenterende arbejdsform er nogle af lærerens vigtige opgaver:
- at give et oplæg til problemet, så eleverne bliver nysgerrige og opsatte på at udforske det
- at hjælpe eleverne med at finde metoder til udforskning af problemet
- at hjælpe eleverne med at tolke resultaterne
- at inspirere eleverne til selv at formulere nye spørgsmål i forlængelse af problemet

Hvad siger Faghæfte 12 Klare Mål for Matematik (fra 2001)?

I undervisningsministeriets faghæfte kan man i den vejledende læseplan under 'Matematik i anvendelse' på 3.-7. klassetrin læse:

> *'Eleverne udfører desuden eksperimenter, hvori tilfældighed indgår. Begrebet sandsynlighed fremtræder som en første præcisering af et mere intuitivt chancebegreb. Simulering af eksperimenter gennemføres ved hjælp af datamaskine.'*

Og under 'Matematik i anvendelse' på 7.-9. klassetrin:

> *'Sandsynlighedsbegrebet indgår i forbindelse med behandling af datamaterialer. Vægten lægges på det statistiske sandsynlighedsbegreb. Simuleringer foretages ved hjælp af datamaskinen.'*

Hvad vil det sige, at noget er tilfældigt?

I vores hverdag træffer vi på en lang række situationer, der kunne kaldes *chancesituationer*. En chancesituation kendes på, at vi ikke kan forudsige udfaldet af den (udfaldet er tilfældigt), men hvis situationen forekommer gentagne gange, så viser der sig et mønster i udfaldene. Eksempel: Når vi kaster en terning, kan vi ikke på forhånd vide, hvilket øjental den vil vise, men kaster vi den mange gange, vil der som regel vise sig det mønster, at hvert af de 6 øjental forekommer ca. lige mange gange. En lang række spil giver eksempler på sådanne chancesituationer: lotto, bingo, ludo, roulette, tipning osv.

Men det er ikke kun i spil, at man træffer på chancesituationer. Situationer, hvis udfald er styret af tilfældighed, kommer vi ustandselig ud for: Vil mit nye køleskab holde mere end 8 år? Vil bussen, jeg skal med, være forsinket med mere end 3 minutter? Vil det gå hurtigst, hvis jeg vælger køen ved kasse 2 i supermarkedet? Vil der være mere end 5 elever fraværende i klassen? Vil der i klassen med 24 elever være to elever, der har samme fødselsdag? Osv.

Vi kan forsøge at blive klogere på en chancesituation ved at indsamle erfaringer, om hvordan den forløber. Det kan dog ofte være både arbejds- og tidskrævende at indhente sådanne erfaringer. Så på et tidspunkt kunne det være en fordel, at vi på computeren opbyggede en model, der efterligner - *simulerer* - forløbet af chancesituationen.

Ved hjælp af en *simuleringsmodel* for en given chancesituation vil vi hurtigt kunne indhente oplysninger om mange forløb af chancesituationen. Opbygning af simuleringsmodeller sker ved hjælp af *tilfældige tal* også kaldet *slumptal*.

Lidt om slumptal

Man kan ikke sætte et menneske til at frembringe tal helt tilfældigt. Der vil altid vise sig et eller andet mønster i sådanne tal. Man har da også gennem tiderne udvist megen opfindsomhed, når der skulle udtages noget på tilfældig vis. Et righoldigt eksempelmateriale kan findes i de metoder/spil, som formiddags- og ugeblade anvender for at finde vindere i diverse konkurrencer, samt i diverse TV-konkurrencer og i de mange forskellige lotto- og bingospil.

Før computere blev almindeligt udbredte anvendte man tabeller med slumptal til simulering af chancesituationer. Disse tabeller var i princippet frembragt ved, at man i en pose anbragte 10 kugler med hver sit af numrene 0, 1, 2, …, 9. Posen blev rystet, en kugle tilfældigt udtaget, og man havde tabellens første slumptal eller slumpciffer. Den udtagne kugle blev lagt tilbage i posen, som så blev rystet, og det næste slumptal blev udtaget, osv. Nedenfor er vist det øverste af en side fra Erlang T, som er en sådan tabel over tilfældige tal.

TAVLE 15

	1		2		3		4		5		6	
11	1397	3294	6896	6483	9218	3629	3119	6687	0887	3069	9530	3572
12	2583	0220	6676	6797	6333	0758	3448	5978	7705	8302	3628	0360
13	2268	7876	3023	2936	8260	5498	5861	1059	4060	6617	0625	6959
14	7359	1601	4132	9968	2149	1888	1291	4026	4534	2864	4087	8606
15	2460	2900	7711	2406	1386	0482	0287	2071	0223	3482	8956	0043
16	3345	0818	6613	1538	7659	5135	9230	1140	8188	2766	8775	0231
21	7146	9688	8264	7548	1432	2189	5978	4108	9922	7352	5997	7185
22	5224	9811	5456	5350	4653	0386	0362	9955	3178	8397	6465	1879
23	6625	8202	3459	4672	3207	9971	0573	8312	5701	3649	9626	5078
24	7524	5315	8747	9937	3377	4458	8615	7839	0020	6446	2198	6144
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

Når man har en tabel med tusindvis af tilfældige cifre, kan man fx bruge den til at simulere kast med en terning: Man starter et tilfældigt sted i tabellen. I Erlang T findes startstedet vha. 5

terningkast. Hvis disse fx giver 1, 5, 2, 2 og 3, så starter man på det markerede sted i tabellen, idet de to første terningkast siger start i Tavle 15, de to næste siger brug række 22 og det sidste siger brug søjle 3. Her læser man så de tilfældige cifre:
4653 0386 0362 9955 3178 osv.
Man overspringer så de cifre, der ikke er aktuelle ved terningkast, og får ved simuleringen følgende terningkast:
4, 6, 5, 3, 3, 6, 3, 6, osv
Hvis man ville simulere udtrækning af lottotal fra 1 til 36, så ville man se på par af cifre og af dem kun bruge: 01, 02, 03, ….,36
Med slumptallene ovenfor får man:
03, (og 03 igen, men den overspringes, da den allerede er udtaget), 31, osv.

Slumptal på computer
I VisiRegn og mange andre programmer er der indbygget funktioner til at frembringe tilfældige tal. Disse tal er faktisk ikke helt tilfældige, da de er frembragt vha. en algoritme, som på et tidspunkt vil starte forfra på at udsende de samme tal, men da dette først sker efter mange tusinde tal er udtaget, har det ingen praktisk betydning. Manglende tilfældighed ved sådanne slumptal kan ikke påvises med statistiske test. (Et eksempel, på hvordan en sådan funktion kan opbygges, er givet i *Brug Lommeregneren 3* af Allan C. Malmberg.)

Den chancesituation eller det eksperiment, som man ønsker at simulere, må man naturligvis have et nøje kendskab til. Med andre ord: hvis man har mulighed for at iagttage forløbet af chancesituationen eller for at udføre eksperimentet med konkrete materialer, bør man gøre dette og med papir og blyant notere resultaterne. Når man har oplevet, hvor omstændeligt og tidskrævende dette er, er man klar til at opbygge sin simuleringsmodel på computeren og ved hjælp af denne hurtigt udføre eksperimentet et stort antal gange. Yderligere kan man så med computeren straks hente oplysninger fra de indsamlede resultater fx i form af grafiske afbildninger.

Møntkast **Aktivitet 6.1**

Materialer: Mønter, papir, lineal og blyant

Opgave 1)-3)
Der startes med manuel udførelse af eksperimentet, så eleverne helt konkret ved, hvad det drejer sig om. To elever arbejder sammen: en kaster mønten, den anden noterer resultatet på papir i en liste af 1-taller og 2-taller.
Lad eleverne inden møntkastene gætte på, hvad resultatet kan blive af de 20 møntkast. Kunne man mon få 10 kronekast og 10 platkast? Kunne man få 20 platkast? Osv.

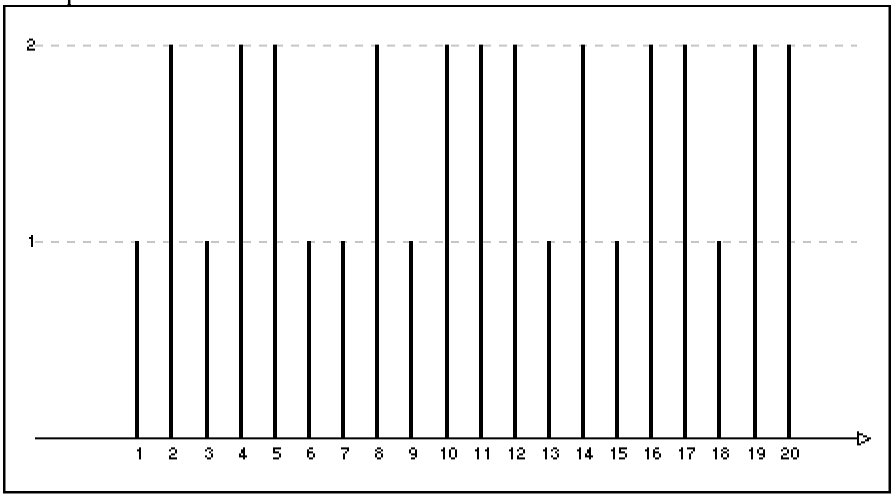
VisiRegn anvendes kun i opgave 2 og 3 til at afbilde de indhentede data grafisk.

Det er vigtigt at få styr på de forskellige muligheder for afbildning, og hvad de kan fortælle os.

Eksempel: datapinde for 20 kast, der gav 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2:

Ud ad den vandrette akse afsættes kaste nummer og over hvert kaste nummer afsættes en pind af højden 1, hvis det var et platkast og af højden 2, hvis det var et kronekast.

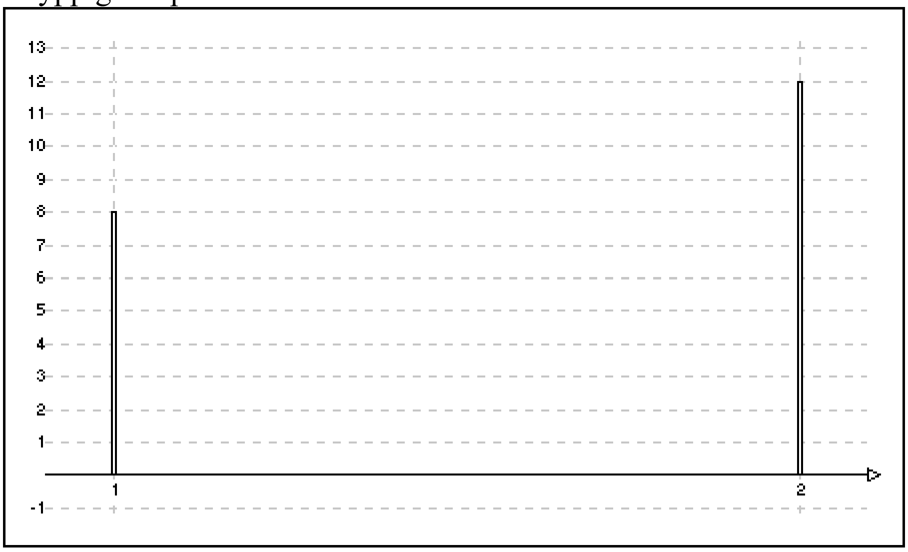
Datapinde:



Man kan aflæse udfaldet af hvert enkelt møntkast. Man kan således aflæse i hvilken rækkefølge kronekast og platkast kom. Til gengæld er det ikke umiddelbart synligt, hvor mange kronekast og hvor mange platkast, der var. Datapindene indeholder fuld information om, hvordan de 20 møntkast forløb.

Ved hyppighedspindene har vi bearbejdet de oprindeligt fundne tal (de rå data) ved at tælle op, hvor mange der er af hver, og afbilde resultatet. Til gengæld kan vi ved hyppighedspindene ikke længere se, hvad fx det 10. møntkast viste.

Hyppighedspinde:



Ved at bearbejde de oprindelige data (til hyppighedspinde) har vi fået et bedre overblik over dem (hvis det er antallet af krone-/platkast, vi er interesseret i). Til gengæld har vi mistet noget information.

Dette er kernen i den beskrivende statistik: vi giver afkald på noget information - i dette tilfælde den rækkefølge, krone-/platkast blev udtaget i - og vinder til gengæld i overblik over, hvor mange krone-/platkast, der var. Kunsten ved den beskrivende statistik består i at få et godt overblik over de indsamlede data uden samtidig at miste væsentlig information.

Opgave 4) Metode 1
Dette er den første og mest simple af 3 metoder. De 3 metoder giver 3 generelt forskellige angrebsvinkler på simulering af chanceeksperimenter med VisiRegn. Denne første metode er den mest elementære og anvendelig på selv de første klassetrin.

Til erstatning for det tidsrøvende og kedsommelige arbejde med at kaste mønten mange gange, lader man så computeren simulere møntkast. Det vil sige, at man i computeren bygger en model, der afspejler den situation, man har ved kast med en fair mønt. Ved modellen skal der altså ved hvert 'kast' være lige stor chance for plat (1) og for krone (2).

I VisiRegn er der en funktion SLUMP(2), som kan indsættes i udtryk og som kan anvendes til at simulere kast med en mønt. Denne funktion vil ved hver gennemregning af arkets udtryk tilfældigt frembringe et af tallene 1 og 2. En gennemregning af arkets udtryk får man automatisk, når der ændres i arket. Men man kan også selv fremtvinge en gennemregning af udtrykkene ved klik på Gennemregn knappen eller ved brug af F9-tasten eller ved menuvalget Funktioner/Gennemregn arket. SLUMP(2) kan kort skrives SL(2).

Opgave 5)-7) Metode 2
Som det ses kan man på meget enkel vis (metode 1) foretage simuleringer i VisiRegn, men vil man også have VisiRegn til at vise resultaterne af en serie af simuleringer, så må der lidt mere til.

I stedet for kun at simulere ét møntkast, simulerer man nu 20 møntkast ved hver gennemregning, og anvender grafisk afbildning til at få et hurtigt overblik over resultaterne. På computeren er det meget enkelt at afbilde talsæt i mange forskellige former for grafer. Det, der så bliver udfordringen, er at finde den eller de grafer, der bedst illustrerer, det man ønsker at undersøge. Et skridt på vejen er naturligvis at kunne tolke, hvad grafen fortæller.
I opgave 7 kopierer man SLUMP(2) udtrykket videre, til man har 100 linier hver med simulering af et møntkast.

Opgave 8)-12) Metode 3
Holder man sig kun til opgave 8 er metoden enkel. Lidt mere kompliceret bliver det i de efterfølgende opgaver, hvor der anvendes selvhenvisende navne. Det vil nok kræve lidt øvelse at holde styr på, hvordan man starter tabel og graf på passende vis. Til gengæld er oplevelsen i opgave 11) af den dynamiske illustration af 'De store tals lov' nok besværet værd.

Opgave 13)-16)
Disse opgaver udgør et lille sidespring (der fortsættes i aktivitet 6.1a). Det illustrerer, at hvis man ønsker to andre tal som kode for plat og krone, så kan det også have lade sig gøre.

Opgave 13). Udtrykket 5*SLUMP(2)-3 vil tilfældigt frembringe et af tallene:
2 (=5*1-3) og 7 (=5*2-3).

Opgave 15). Udtrykket 2*SLUMP(2)+6 vil tilfældigt frembringe et af tallene 8 og 10.

Opgave 16)
Hvis man tilfældigt, vil frembringe heltallene m og s, hvor m<s, så kan det lade sig gøre med udtrykket: (s-m)*SLUMP(2) + (2*m-s)
idet SLUMP(2)=1 giver (s-m)*1 + (2*m-s) = m og
SLUMP(2)=2 giver (s-m)*2 + (2*m-s) = s
Se i øvrigt aktivitet 6.1a, hvor der arbejdes mere med dette.

Lineær transformation af SLUMP(2) **Aktivitet 6.1a**

Dette er et interessant men decideret sidespring, der kan udelades. Det har været brugt som udfordring til særlig hurtige elever. Her tages problemstillingen fra opgave 16) i aktivitet 6.1 op til nærmere behandling.

I de 3 første opgaver indsamles trinvist erfaringer omkring lineære transformationer af SLUMP(2). Disse erfaringer fører i opgaverne 4 og 5 frem til opstilling af en model, der for vilkårlige to naturlige tal giver en lineære transformation af SLUMP(2), som tilfældigt frembringer et af de to naturlige tal. (Se næste side.)

I opgave 7 arbejdes med grafisk afbildning af en lineær transformation af SLUMP(2). Der forudsættes her kendskab til den rette linies ligning.

	Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
A1	mindste	13	13	
A2	største	15	15	
A3	a	største-mindste	2	
A4	b	mindste-a	11	
A5				
A6		a*SLUMP(2)+b	15	

Lotto m.m. **Aktivitet 6.2**

Indeholder eksempler på simple simuleringer af hverdagsfænomener.
Betydningen af tallet i parentesen efter SLUMP synliggøres.

Kast med 2 mønter **Aktivitet 6.3**

Materialer: Mønter

Opgave 1)-3) Bygger langsomt op til, at simuleringsmodeller kan udformes med regneoperationer på SLUMP funktionen. Dog må man være opmærksom på, at de algebraiske regneregler ikke gælder her. Fx er SL(2)+SL(2) ikke det samme som 2*SL(2).

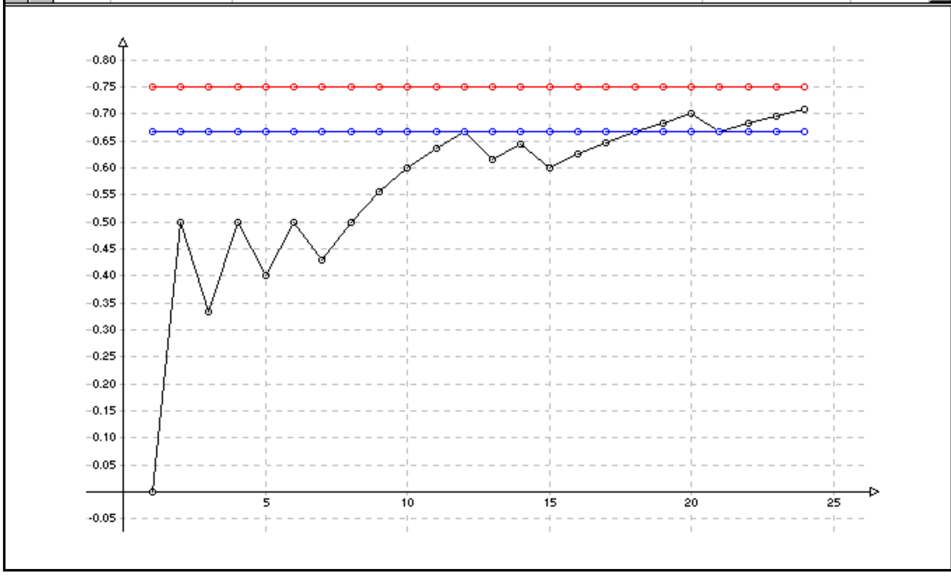
Opgave 4)
Indeholder et klassisk eksempel på, at selv fremragende matematikere kan tænke uhensigtsmæssigt, når det drejer sig om kombinatorik og sandsynlighedsregning. Problemstillingen her er jo samtidig ganske enkel.

Mulige simuleringsmodeller:
Metode 1: Man indsætter blot udtrykket SL(2)+SL(2) i første linie og simulerer løs og noterer selv ned, hvor ofte 2, 3 og 4 forekommer. Hvis d'Alembert har ret skal de forekomme med stort set samme hyppighed.
Metode 2: Man kopierer udtrykket i første linie til fx de første 150 linier og afbilder hyppighedspinde over de 150 værdier. Hvis d'Alembert har ret skal de 3 hyppighedspinde være af stort set samme højde.

Metode 3: Man indsætter blot udtrykket SL(2)+SL(2) i første linie og T-mærker det, hvorefter man simulerer løs og opsamler resultaterne fra tabellen i form af hyppighedspinde. Hvis d’Alembert har ret skal de 3 hyppighedspinde være af stort set samme højde.

Den nedenfor viste udbygning af denne model giver mulighed for at se frekvensen arbejde sig frem mellem de to påståede teoretiske sandsynligheder. De 24 simuleringer, som billedet viser, udpeger ikke tydeligt hvilken af de to sandsynligheder frekvensen arbejder sig hen mod, men det vil yderligere simuleringer afsløre.

T	*		Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
		A1	kast	SL(2)+SL(2)	2	
		A2		"Hyppighed for mindst 1 plat:		
		A3	hyp	HVIS kast=4 SÅ hyp ELLERS hyp+1	17	hyp.
T		A4	nr	nr+1	24	nr.
T		A5	frekvens	hyp/nr	0.708	frek.
		A6				
		A7		"d'Alembert gav sandsynligheden:		
T		A8	p1	2/3	0.667	ss
		A9		"Laplace gav sandsynligheden:		
T		A10	p2	3/4	0.750	ss
		A11				



nr	frekve	p1	p2
1	0.000	0.667	0.750
2	0.500	0.667	0.750
3	0.333	0.667	0.750
4	0.500	0.667	0.750
5	0.400	0.667	0.750
6	0.500	0.667	0.750
7	0.429	0.667	0.750
8	0.500	0.667	0.750
9	0.556	0.667	0.750
10	0.600	0.667	0.750
11	0.636	0.667	0.750
12	0.667	0.667	0.750
13	0.615	0.667	0.750
14	0.643	0.667	0.750
15	0.600	0.667	0.750
16	0.625	0.667	0.750
17	0.647	0.667	0.750
18	0.667	0.667	0.750
19	0.684	0.667	0.750
20	0.700	0.667	0.750
21	0.667	0.667	0.750
22	0.682	0.667	0.750
23	0.696	0.667	0.750
24	0.708	0.667	0.750

Terningkast **Aktivitet 6.4**

Materialer: Terninger

Opgave 1)-3) Kast med 1 terning. Først manuelt, så med VisiRegn. Også ved dette eksperiment tegnes de to væsentligt forskellige grafer til illustration af resultatet af de 20 terningkast, og det overvejes, hvad hver af disse to grafer kan fortælle om eksperimentet.

Opgave 4)-6) Kast med 2 terninger. Først manuelt, så med VisiRegn. Overvejelser over modellen helt parallelt til de, der var ved kast med 2 mønter.

Opgave 7)-10) Tivoli. Kast med 9 terninger.
I opgave 7) kunne man igen prøve hver af de 3 metoder (eller blot den, man synes bedst om) til simulering af kast med de 9 terninger.
Opgave 8)-10) viser, hvordan modellen kan udbygges til direkte at vise hyppigheden for hver af de 3 gevinstmuligheder.

4 personers fødselsmåneder **Aktivitet 6.5**

Alle måneder er godt nok ikke lige lange, men der er jo ikke stor forskel på deres længde.
Hvis fødselsdagene ikke er jævnt fordelt over årets måneder, vil en antagelse om dette, så gøre det nemmere eller sværere at finde to med fødselsdag i samme måned?
Problemet søges altså ikke løst ved teoretiske overvejelser, men ved at man opstiller en simuleringsmodel og indhenter erfaringer om situationsforløb vha. denne. Det sidste er som regel nemmere end det første.

Sandsynlighedsteoretiske overvejelser:
Hvad er sandsynligheden for at der blandt fire tilfældigt udtagne måneder er mindst to ens?
Der udtages tilfældigt 4 måneder. Ved hver udtagning er der 12 muligheder.
I alt er der så 12*12*12*12 muligheder.
Af disse vil der i 12*11*10*9 ikke være to måneder, der er ens.
Så sandsynligheden for ikke at få to ens måneder blandt de 4 udtagne måneder er:
(12*11*10*9) / (12*12*12*12) = 0.573
Dvs. sandsynligheden for mindst to ens måneder blandt de 4 udtagne er:
1-0.573 = 0.427

Se simuleringsmodellens frekvens 'æde sig ind på' denne værdi med voksende antal simuleringer.

Fødselsdagsproblemet **Aktivitet 6.6**

Dette er et klassisk problem, der som regel skaber undren, og den sandsynlighedsteori, der skal til for at løse problemet hører næppe hjemme i skolen, men at opbygge en simuleringsmodel i VisiRegn er betragtelig simplere, og med denne kan man så udforske, hvad chancen er.

Sandsynlighedsteoretiske overvejelser:
Hvad er sandsynligheden for, at der i en gruppe med n personer er mindst 2, der har fødselsdag samme dag? (Altså, at de er født den samme dag i den samme måned men ikke nødvendigvis det samme år.)

Vi antager, at fødselsdagene for de n personer ikke afhænger af hinanden (altså fx at der ikke er nogen tvillinger iblandt), og at hver af årets 365 dage har lige stor chance for at være fødselsdag for en hvilken som helst person. Så vi ser bort fra, at fødsler ikke er jævnt fordelt over året, og hvis en person faktisk er født den 29. februar vil dette blive ændret til fx den 1. marts.

Et udfald kan således betragtes som et ordnet n-sæt af tal fra 1 til 365. Af disse er der:

$$365 * 365 * \ldots * 365 = 365^n$$
(n faktorer)

Antallet af n-sæt, hvor alle de n tal er forskellige er:

$$365 \bullet 364 \bullet \ldots \bullet (365-n+1) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

Sandsynligheden, for at alle fødselsdage er forskellige, er derfor: $\dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$

Altså har man, at sandsynligheden, for at mindst to har samme fødselsdag, er:

$$1-\frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

Med denne formel findes følgende sandsynligheder for at mindst to blandt n personer har samme fødselsdag:

n	Sandsynlighed
5	0.027
10	0.117
15	0.253
20	0.411
22	0.476
23	0.507

n	Sandsynlighed
25	0.569
30	0.706
40	0.891
50	0.970
60	0.994

VisiRegn har fakultetsfunktionen indbygget. Prøv fx at indsætte udtrykket 10!
Men allerede ved 34! er man nået op på en talstørrelse, der er uden for maskinens talområde.
33! kan i VisiRegn vises i E-notation. Hvor mange cifre har tallet?

Man kan dog ved at gå trinvist frem og kopiere i tre omgange finde sandsynlighederne vha. VisiRegn. Nedenfor er af pladshensyn kun medtaget tilfældene 1, 2, 3, 4 og 5 personer. Der er brugt kopiering af udtrykkene i A2, A9 og A15. Sammenhold selv VisiRegn modellen med formlerne på foregående side.

	Navn	Udtryk	Værdi
A1		365	365
A2		A1-1	364
A3		A2-1	363
A4		A3-1	362
A5		A4-1	361
A6		"Sandsynlighed for ingen fælles	
A7		"fødselsdage blandt n personer:	
A8	person1	A1/365	1.000
A9	person2	person1*A2/365	0.997
A10	person3	person2*A3/365	0.992
A11	person4	person3*A4/365	0.984
A12	person5	person4*A5/365	0.973
A13		"Sandsynlighed for mindst to	
A14		"personer med samme fødselsdag:	
A15	Person1	1-person1	0.000
A16	Person2	1-person2	0.003
A17	Person3	1-person3	0.008
A18	Person4	1-person4	0.016
A19	Person5	1-person5	0.027

Gå planken ud **Aktivitet 6.7**

Materialer: Kridt og fliser til at tegne på (eller papir og blyant). Terninger

Opgave 1) På de yngste klassetrin vil det sikkert være en god ide med en 'rigtig fange' og en 'rigtig planke', mens man på de ældste klassetrin eventuelt kan tegne planken og have en brik, der forestiller fangen.

Opgave 2) Der er naturligvis ikke ét rigtigt svar på spørgsmålet. Svaret afhænger jo bl.a. af, hvor længe man synes, at det er underholdende at bevæge sig frem og tilbage på planken.

Opgave 3) Eleverne bør med papir og blyant prøve at lave en graf til beskrivelse af forløbet af et spil. Det vil lette forståelsen af den senere graf af simuleringen i VisiRegn.

Opgave 4) På hvilke klassetrin vil man kunne kapere en sådan simulering?
Selv om man ikke helt har forstået udtrykket i A2-A99 kan man godt have forståelse for, hvad værdierne og datakurven fortæller om forløbet af simuleringen.
Fastholder grupperne deres tidligere valgte længde på planken, efter at de har indsamlet flere erfaringer gennem simuleringen?

Variationer af spillet.
Spillet kan varieres på forskellig vis.
(a) En sørøverkaptajn ændrer reglerne, sådan at man bevæger sig frem, når terningen viser 1, 2, 3 eller 4, og bevæger sig tilbage, når terningen viser 5 eller 6. (Dette er grunden til, at der er anvendt en terning i stedet for en mønt).
Er det blevet bedre at være den, der går planken ud?
Ændres antallet af kast, der skal til for at slutte spillet?
(b) En sørøverkaptajn ændrer reglerne, sådan at man ikke længere starter i det midterste felt.
Prøv forskellige startpositioner, og undersøg, hvilken virkning det har for spillet
Advarsel: Pas på, at man ikke foretager så mange ændringer, at man mister overblikket over resultaterne.

'Gå planken ud' er et eksempel på en såkaldt slumptur. Her er man ikke blot interesseret i udfaldet af et bestemt eksperiment, men man følger over tiden en proces, hvis enkelte skridt er styret af tilfældigheder.

Fallit eller fordobling **Aktivitet 6.8**

Endnu et eksempel på en slumptur. Man kan faktisk bruge simuleringsmodellen fra før, blot skal udsagnet og værdien af start ændres.

Litteratur:

Allan C. Malmberg: Matematiske tabeller. Erlang T. Tabeller over tilfældige tal.
Gads forlag 1971.

Allan C. Malmberg: Brug Lommeregneren 3
Gads forlag 1979

1) Her skal bruges en mønt.
Brug koden: <u>1 for plat</u> og <u>2 for krone</u>
Kast mønten 20 gange og notér resultatet i en liste.
(Eksempel: 1,1,2,1,2,2,…): ____________________________________
Tæl hvor mange 1-taller og 2-taller, der er:
Min hyppighed af 1: _____ Klassens hyppighed af 1: _____
Min hyppighed af 2: _____ Klassens hyppighed af 2: _____
Tegn på papir datapinde, der viser, hvad hver af dine 20 møntkast gav.
Tegn på papir hyppighedspinde, der viser hyppigheden af 1-taller og af 2-taller.

2) Indsæt dine 20 tal i Udtryk-feltet i de 20 første linier i VisiRegn.
Afmærk de 20 udtrykfelter.
Vælg fra menuen *Grafik/Fra ark/Datapinde.*
(Sammenlign med dine håndtegnede datapinde).
Højreklik på grafikbilledet og vælg nummereringen 1,2,3,… på aksen i stedet for navne på aksen.
Vælg fra menuen *Grafik/Fra ark/Hyppighedspinde.*

3) Hvad var frekvensen for plat: ____/20 =__________
Hvad var frekvensen for krone: __________________
Hvilken sammenhæng er der mellem frekvensen for plat og frekvensen for krone? ____________________________________
(*Frekvensen* kaldes også *den relative hyppighed* eller *den statistiske sandsynlighed*).

<u>Metode 1:</u> meget simpel simulering ved hjælp af VisiRegn:

4) Start på nyt ark med valget *Filer/Nyt ark*
Simulering af de 20 møntkast ved hjælp af VisiRegn:
Indsæt i A1 udtrykket SLUMP(2), der tilfældigt får værdien 1 eller 2 ved hver gennemregning.
Klik nogle gange på *Gennemregn* knappen og se hver gang efter, hvad der sker med værdien for A1?
Simuler 20 møntkast ved 20 klik på *Gennemregn* og notér hvert resultat i en liste: ____________________________________

Metode 2: **bruger kopiering af udtryk og grafik fra ark. Størrelsen af en serie af simuleringer er lig det antal gange, man har sat udtrykket.**

5) Her er en første hurtigere måde til simulering af de 20 møntkast:
Tag en kopi af udtrykket i A1. Afmærk området A2:A20 og sæt kopien.
I området A1:A20 er der nu simulering af 20 møntkast.
Kast alle de 20 mønter igen ved at klikke på ***Gennemregn*****.**

6) Afmærk hele området A1:A20.
Vælg ***Grafik/Fra ark/Datapinde***
Klik på ***Gennemregn*** **knappen for at se 20 nye møntkast og deres datapinde.**
Vælg ***Grafik/Fra ark/Hyppighedspinde*** **og aflæs på grafen, hvor mange platkast _____ og kronekast _____, der var.**
Tjek i arket, at der er det angivne antal platkast og kronekast.
Hvad er frekvensen for platkast: ____/20 =_________

7) Udvid simuleringsmodellen til at simulere 100 møntkast og lav grafer af resultatet.
Hvor mange platkast vil du forvente at få: _________
Foretag 10 simuleringer af de 100 møntkast og besvar følgende:
Hvad er det mindste antal platkast, du har opnået: _________
Hvad er det største antal platkast, du har opnået: _________

Metode 3: **bruger tabel og grafik fra tabel. Desuden bruges et selvhenvisende navn til optælling af antallet af simuleringer. En serie af simuleringer kan gøres så lang som programmet tillader en tabel at være (pt. 700 linier).**

8) Vælg ***Filer/Nyt ark*** **for at starte på et nyt ark**
Indsæt udtrykket SL(2) (kort version af SLUMP(2)) i første linie, og giv det navnet ***mønt.***
T-mærk navnet ***mønt.***
Klik på ***Gennemregn*** **for at simulere møntkast og se resultaterne blive opsamlet i tabellen.**

Vælg *Grafik/Fra tabel/Hyppighedspinde* for at få et billede af resultaterne i tabellen.
Se hyppighedspindene ændre sig med nye klik på *Gennemregn.*

9) Det vil jo være rart at kunne holde styr på hvor mange møntkast, man har foretaget:
Udbyg med nummerering af møntkastene ved i linie A2 at indsætte navnet *nr* og udtrykket *nr+1*
(værdien bliver ???, da *nr* er selvhenvisende og endnu ingen værdi har)
Vælg *Funktioner/Startstil navne* og sæt *nr* til 0.
T-mærk også *nr* (herved renses tabellen) og start simuleringerne. Det er nu både i tabellen og arket muligt at se hvor mange kast, der er foretaget.

10) En ny serie af simuleringer startes ved:
Vælg *Funktioner/Startstil navne* og sæt *nr* til 0.
Klik på *Rens tabel* knappen og start simuleringerne.

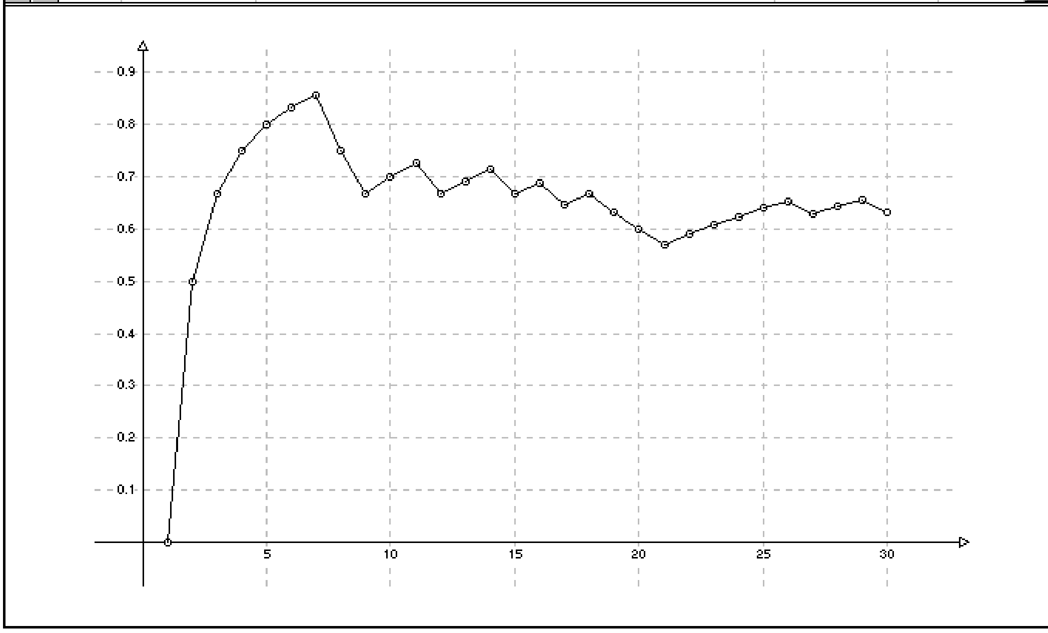
11) Kast mønten 200 gange og angiv frekvensen for plat: ___/200 =________
Det kan være svært at aflæse hyppigheden for plat ud fra hyppighedspindene, men modellen kan med to linier udbygges til også at optælle hyppigheden og frekvensen for plat. Se billedet på næste side.
Udvid modellen med de to linier.
Sæt frekvensen (*fplat*) til at blive vist med 3 decimaler.

HVIS-SÅ-ELLERS konstruktionen sørger for at hyppigheden for plat (*hplat*) bliver gjort 1 større hver gang *mønt* får værdien 1.

Vi vil se på, hvordan frekvensen for plat ændrer sig med antallet af møntkast, så T-mærk kun *nr* og *fplat* .
Der er to selvhenvisende navne *nr* og *hplat* .
Startstil dem begge til 0, så får *fplat* værdien ???, da man jo ikke kan dividere med 0.
Rens tabellen, hvor der blot er værdien 0 for *nr*. (At den tilhørende *fplat* værdi mangler, vil forhindre at der bliver tegnet xy-punkter).

Vælg *Grafik/Fra tabel/xy-punkter* og start simuleringen med F9-tasten.
Brug F9-tasten flittigt og bemærk, hvordan frekvensen for plat begynder at stabilisere sig.

T	*		Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
		A1	mønt	SL(2)	2	
T		A2	nr	nr+1	30	
		A3	hplat	HVIS mønt=1 SÅ hplat+1 ELLERS hplat	19	
T		A4	fplat	hplat/nr	0.633	
		A5				
		A6				
		A7				
		A8				
		A9				
		A10				
		A11				



nr	fplat
1	0.000
2	0.500
3	0.667
4	0.750
5	0.800
6	0.833
7	0.857
8	0.750
9	0.667
10	0.700
11	0.727
12	0.667
13	0.692
14	0.714
15	0.667
16	0.688
17	0.647
18	0.667
19	0.632
20	0.600
21	0.571
22	0.591
23	0.609
24	0.625
25	0.640
26	0.654
27	0.630
28	0.643
29	0.655
30	0.633

12) Nulstil de selvhenvisende navne igen og rens tabel.
Foretag kun en simulering ved et tryk på F9 og tjek at modellen arbejder som den skal.
Tryk 1 gang mere på F9 og tjek igen.
Tjek modellen nogle gange på denne måde.

---

13) SLUMP(2) kan indgå i et vilkårligt udtryk og vil ved beregningen af udtrykket blive erstattet tilfældigt af enten 1 eller 2.
Giv et bud på, hvilke to tal udtrykket 5*SLUMP(2)-3 vil kunne frembringe: ___ og ____
Afprøv dit bud ved hjælp af VisiRegn.

14) Lav et udtryk, hvori SLUMP(2) indgår og lad din makker prøve at finde ud af, hvilke to tal udtrykket kan frembringe.

15) Udfordring:
Find et udtryk, der tilfældigt frembringer et af de to tal 8 og 10.

16) *Udfordring:
Kan man mon for vilkårlige to heltal altid finde et udtryk med SLUMP(2), som frembringer tallene?
(Der er hjælp at hente i Aktivitet 6.1a)

1) SLUMP(2) frembringer de to tal 1 og 2
Hvilke to tal frembringer SLUMP(2)+4? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer SLUMP(2)+8? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer SLUMP(2)+13? _______ og _______
For at få 7 eller 8, skal man til SLUMP(2) lægge _______
For at få 11 eller 12, skal man til SLUMP(2) lægge _______
For at få 24 eller 25, skal man til SLUMP(2) lægge _______
Når man lægger et tal til SLUMP(2) bliver differensen mellem de to tal, der frembringes altid den samme, nemlig: _______

2) Hvilke to tal frembringer 3*SLUMP(2)? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer 5*SLUMP(2)? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer 17*SLUMP(2)? _______ og _______
For at få 8 eller 16, skal man gange SLUMP(2) med _______
For at få 10 eller 20, skal man gange SLUMP(2) med _______
For at få 13 eller 26, skal man gange SLUMP(2) med _______
For at få to tal, hvis differens er 7, kan man gange SLUMP(2) med ___
For at få to tal, hvis differens er 9, kan man gange SLUMP(2) med ___
For at få to tal, hvis differens er 23, kan man gange SLUMP(2) med ___

3) Hvilke to tal frembringer 2*SLUMP(2)+1? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer 5*SLUMP(2)+1? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer 2*SLUMP(2)+5? _______ og _______
Hvilke to tal frembringer 3*SLUMP(2)+5? _______ og _______
Skriv ud for hvert af de 4 tilfælde ovenfor, hvad differensen mellem de to frembragte tal er. Hvordan hænger differensen sammen med det tal man ganger med? ____
Hvordan kan man ved hjælp af tallet, man ganger med, og tallet, man lægger til, finde det mindste af de to frembragte tal? _______________

4) Hvis man gerne vil frembringe tallene 13 og 15 ved hjælp af SLUMP(2), hvad skal man så gange med, og hvad skal man dernæst lægge til?
Skriv udtrykket der frembringer 13 og 15: _____*SLUMP(2) +______
Skriv udtrykket der frembringer 14 og 17: _____*SLUMP(2) +______
Skriv udtrykket der frembringer 11 og 20: _____*SLUMP(2) +______
Skriv udtrykket der frembringer 25 og 50: _____*SLUMP(2) +______
Skriv udtrykket der frembringer 83 og 97: _____*SLUMP(2) +______

5) Vi vil i VisiRegn opstille en model, der kan give os svar på spørgsmål, som dem i opgave 4). Modellen skal som inddata have de to tal (min og max), som man gerne vil kunne frembringe tilfældigt ved hjælp af SLUMP(2), og som uddata skal modellen give tallet a, som SLUMP(2) skal ganges med og tallet b, som skal lægges til. Modellen er vist nedenfor. Dog mangler det vigtigste, nemlig udtrykkene, der finder a og b.
Gør modellen færdig, og tjek den med forskellige værdier for min og max.

	Navn	Udtryk	Værdi
A1	min	13	13
A2	max	15	15
A3	a		2
A4	b		11
A5		a*SLUMP(2)+b	

Når man ganger SLUMP(2) med et tal, og dernæst lægger et tal til, så siger man, at man har foretaget en *lineær transformation* af SLUMP(2).

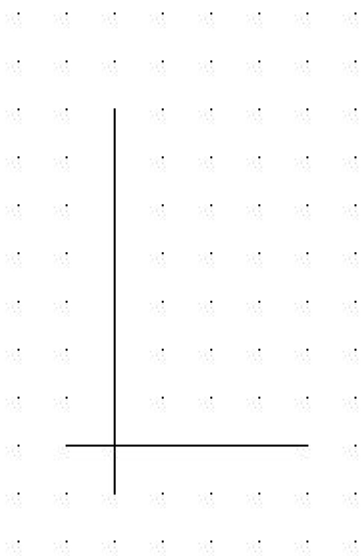
6) 2*SLUMP(2)+11 er altså den lineære transformation af SLUMP(2), hvor man ganger med 2 og lægger 11 til.

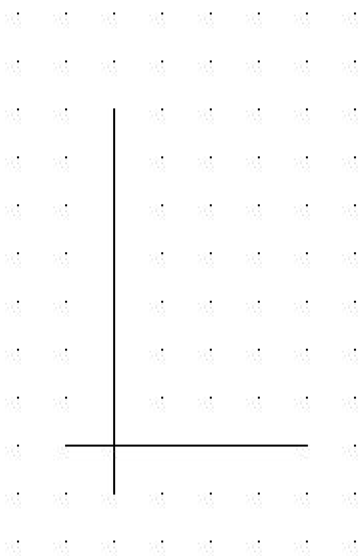
(a) 2*SLUMP(2) er også en lineær transformation af SLUMP(2). Hvad er det for et tal, man her lægger til? _______

(b) SLUMP(2)+11 er også en lineær omformning af SLUMP(2). Hvad er det for et tal, man her ganger med? _______

(c) I udtrykket 2*(SLUMP(2)+11) lægger man først til og ganger så bagefter, men udtrykket kan skrives på en anden måde, så det klart ses, at dette også er en lineær transformation. Gør det: ___*SLUMP(2) +__

7) Den lineære transformation 2*SLUMP(2)+1 giver 3, når SLUMP(2)=1.
Man siger det også på den måde, at 1 føres over i 3.
Man kunne også skrive, at punktet (1 , 3) tilhører transformationen.
Tilsvarende har man, at punktet (2 , 5) tilhører transformationen.
Indsætter man disse punkter i et koordinatsystem, så har man altså ud af den vandrette akse de to værdier (1 og 2) for SLUMP(2), og ud af den lodrette akse har man, hvad de to værdier føres over i ved transformationen.





(a) Indsæt de to punkter i det første koordinatsystem og forbind dem med en ret linie.

(b) Hvad er ligningen for denne linie? ____________________

Man kunne også have byttet om på det, sådan at det var 1, der blev ført over i 5, og 2, der blev ført over i 3.

(c) Hvilke to punkter har transformationen så? (,) og (,)

(d) Indsæt de to punkter i det andet koordinatsystem og forbind dem med en ret linie.

(e) Hvad er ligningen for denne linie? ____________________

(f) Hvilken lineær transformation af SLUMP(2) vil føre 1 over i 5 og 2 over i 3? ___*SLUMP(2) + _____

(e) Tjek med VisiRegn, at denne transformation virkelig giver enten tallet 3 eller tallet 5

Med SL(2) udtog man tilfældigt mellem 1 og 2.
Med SL(6) udtager man tilfældigt mellem 1, 2, 3, 4, 5 og 6, så SL(6) kan bruges til simulering af et terningkast.
Ved lottoudtagning udtages tilfældigt blandt tallene 1, 2, 3, …, 35, 36.
Så til udtagning af lottotal skal man naturligt nok anvende SL(36).

1) Indsæt udtrykket SL(36) i første linie og giv det navnet *Lotto*
T-mærk *Lotto* og klik så 7 gange på *Gennemregn*
Blev nogle af de 7 tal i tabellen ens? Dette ses hurtigt, hvis man får tegnet hyppighedspinde (Vælg: *Grafik/Fra tabel/Hyppighedspinde*) over de 7 værdier.
Gentag forsøget. (Klik på *Rens tabel* og dernæst 7 gange på *Gennemregn*)

2) I VisiRegn kan man ikke ved hver udtagning kontrollere, om tallet allerede er udtaget. Hvis en simulering af udtagning af 7 lottotal ikke giver 7 forskellige tal, så må man fortsætte med at udtage tal (klikke på *Gennemregn*), indtil man har 7 forskellige.

(a) Udfør eksperimentet med udtagning af 7 lottotal 10 gange, og notér for hver gang, hvor mange tal, der skulle udtages, før man havde 7 forskellige tal. ____________________________________

2) I Viking-Lotto er der ikke 36 tal men derimod 48, og der udtages ikke 7 men 6 tal.
Lav en simuleringsmodel i VisiRegn, der kan bruges til udfyldning af en række i Viking-Lotto.

3) I en klasse er der 24 elever. Der skal helt tilfældigt udtages 4 af dem til en festkomité.
Lav en simuleringsmodel, der kan anvendes til udtagningen af de 4 elever.

Ved møntkast bruges her igen koden: 1 for plat og 2 for krone

Hvis man vil simulere kast med 2 mønter, så kan denne model bruges:

	Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
A1	mønt1	SL(2)	2	
A2	mønt2	SL(2)	2	
A3	møntsum	mønt1+mønt2	4	

Her kan man se, hvad hver af de 2 mønter viste. Desuden er summen af de to møntkast fundet.

1) Prøv nogle gennemregninger af modellen ovenfor.
Hvilke værdier kan *møntsum* antage? ________________
Og hvad fortæller disse værdier om simuleringens udfald?

____

Hvis man blot er interesseret i, hvor mange plat og hvor mange krone, der kom ud af simuleringen, så har man egentlig kun brug for *møntsum* , og den kan man faktisk få i blot en linie, som her:

	Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
A1	kast2	SL(2)+SL(2)	3	

Her kan man ikke længere se, hvad hver af de to kast gav, men man kan godt regne ud, hvor mange platkast, der var:

2) Hvis SL(2)+SL(2) er lig 2, så har der været ______ platkast
Hvis SL(2)+SL(2) er lig 3, så har der været ______ platkast
Hvis SL(2)+SL(2) er lig 4, så har der været ______ platkast

Når man udformer en simuleringsmodel, må man sørge for:
- **at modellen frembringer tal svarende til netop de situationer, der kan forekomme i eksperimentet**
- **at tallene har den rigtige chance for at forekomme**

3) Kunne man have brugt følgende udtryk i stedet for SL(2)+SL(2):
(Begrund dine svar (ud fra de to indrammede krav ovenfor))
(a) SL(4)
(b) SL(3)+1
(c) 2*SL(2)

To af Frankrigs dengang bedste matematikere, Jean d'Alembert (1717-83) og Pierre Laplace (1749-1827) var uenige om svaret på følgende spørgsmål:
To mønter kastes samtidig. Hvad er sandsynligheden for, at mindst én af dem viser plat?

d'Alembert ræsonnerede på følgende vis:
Der er 3 lige mulige udfald:
0 plat, 1 plat eller 2 plat.
Altså er sandsynligheden 2/3.

Laplace ræsonnerede på følgende vis:
Der er 4 lige mulige udfald:
krone-krone, krone-plat, plat-krone og plat-plat
Altså er sandsynligheden 3/4.

De brugte altså hver sin model til at beskrive chancesituationen. Hvilken model, der giver den bedste beskrivelse, kan man undersøge ved at udføre eksperimentet mange gange eller ved at simulere eksperimentet mange gange ved hjælp af en passende simuleringsmodel.

4) Opstil en simuleringsmodel i VisiRegn og brug den til at afgøre, hvilken af de to matematikeres sandsynlighedsmodeller, der beskriver situationen bedst.

Det var _________________, der havde den bedste model.

Angiv de resultater fra din simuleringsmodel, der begrunder dit svar:

1) Her skal bruges en terning.
Kast terningen 20 gange og notér resultatet i en liste.
(Eksempel: 3,6,1,3,2,2,…)
Tæl hyppighederne op:

Min hyppighed af 1:	_____	**Klassens hyppighed af 1:**	_____
Min hyppighed af 2:	_____	**Klassens hyppighed af 2:**	_____
Min hyppighed af 3:	_____	**Klassens hyppighed af 3:**	_____
Min hyppighed af 4:	_____	**Klassens hyppighed af 4:**	_____
Min hyppighed af 5:	_____	**Klassens hyppighed af 5:**	_____
Min hyppighed af 6:	_____	**Klassens hyppighed af 6:**	_____
Sum:	**20**	**Sum:**	

Tegn på papir datapinde, der viser, hvad hver af dine 20 terningkast gav.
Tegn på papir hyppighedspinde, der viser hyppigheden af de seks mulige øjental.

---

2) Ved Møntkast aktiviteten blev der vist 3 forskellige metoder til simulering af et møntkast. Prøv disse metoder til simulering af et terningkast.

3) Resultaterne af simuleringerne kan afbildes i Datapinde eller Hyppighedspinde.
Hvad kan man aflæse om terningkastene ud af:
Datapinde (eller Datakurve)? ___________________________________
Hyppighedspinde? ______________________
Hvilken graf giver mest detaljeret information om terningkastene?
Hvilken graf giver bedst overblik over resultaterne af terningkastene?

---

4) Her skal bruges to terninger.
Kast terningerne og notér summen af deres øjental. Gentag dette 20 gange og find hyppigheden, hvormed hver af de mulige summer forekommer.
Tror du, at de har lige stor chance for at forekomme? ________

---

5) Udform en VisiRegn model til simulering af sum af øjental ved kast med to terninger. Afbild hyppighederne af øjentallene. Har de lige stor chance for at forekomme? ______________

Ved øjensum af to terningkast må man i modellen sørge for, at netop tallene 2, 3, 4, …, 11, 12 (og ingen andre) forekommer, og man må sørge for, at hver af dem har den rigtige chance for at forekomme.

6) Angiv hvorfor hvert af følgende 3 udtryk ikke kan anvendes til simulering af øjensum ved to terningkast, og beskriv eventuelt en chancesituation, som man kunne sige at udtrykket simulerer:
   (a) SLUMP(12)
   (b) SLUMP(11)+1
   (c) 2*SLUMP(6)

7) I en bod i Tivoli kan man mod betaling af 5 kr. få lov at kaste 9 terninger (der befinder sig i en 'osteklokke', som kan rystes).
Øjensummen for de 9 terningkast afgør, om der er gevinst:

Øjensum 9, 10, 11, 12, 13 eller 50, 51, 52, 53, 54 giver frit valg på alle 3 hylder.

Øjensum 14, 15, 16, 17, 18 eller 45, 46, 47, 48, 49 giver frit valg på de 2 nederste hylder.

Øjensum 19, 20, 21, 22, 23 eller 40, 41, 42, 34, 44 giver frit valg på nederste hylde.

Lav en simuleringsmodel af et spil i boden.
Simuler spillet og afbild hyppighederne for øjensummerne.
Giv herudfra din vurdering af chancerne for gevinst:

8) Det kunne være rart at få optalt, hvor mange gange de tre gevinstmuligheder forekommer. Det kan gøres med følgende lidt mere komplicerede model, der gør flittigt brug af udsagn:

	Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
A1		"Tivolibod - kast med 9 terninger.		
A2				
A3	x	SL(6)+SL(6)+SL(6)+SL(6)+SL(6)+SL(6)+SL(6)+	34	
A4				
A5	gev1	gev1+(x>=19)*(x<=23)+(x>=40)*(x<=44)	0	gev1
A6	gev2	gev2+(x>=14)*(x<=18)+(x>=45)*(x<=49)	0	gev2
A7	gev3	gev3+(x>=9)*(x<=13)+(x>=50)*(x<=54)	0	gev3
A8	nr	nr+1	0	spil

Gevinst 1 (*gev1*) svarer til frit valg på nederste hylde
Gevinst 2 (*gev2*) svarer til frit valg på de to nederste hylder
Gevinst 3 (*gev3*) svarer til frit valg på alle tre hylder

Uddybning af modellen:
(Husk, at et udsagn har værdien 1, hvis det er sandt og værdien 0, hvis det er falskt)

(a) Når (x>=19) og (x<=23) begge enten er 1 eller 0, hvilke mulige værdier kan så deres produkt (x>=19)* (x<=23) antage? ___________ Tjek dit svar med VisiRegn.

(b) For hvilke værdier af x vil (x>=19)* (x<=23) være 1 ? ______________

(c) For hvilke værdier af x vil (x>=40)* (x<=44) være 1 ? ______________

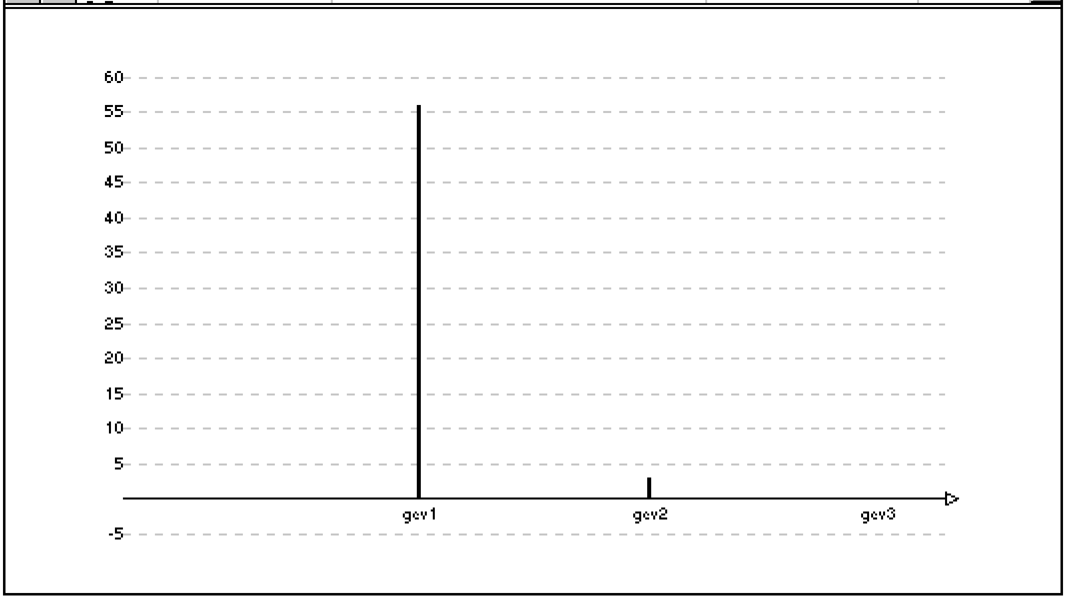
(d) Sammenhold (b) og (c): For hvilke værdier af x vil (x>=19)* (x<=23) + (x>=40)* (x<=44) være 1 ? ___________________

Navnene *gev1*, *gev2*, *gev3* og *nr* er alle selvhenvisende, og en ny serie simuleringer startes ved, at man startstiller dem alle til 0.

På det efterfølgende billede er de 3 gevinstmuligheder afmærket og der er valgt *Grafik/Fra ark/Datapinde.*
Det ses, at ud af de 500 spil, var 56 med gevinst 1, 3 med gevinst 2 og 0 med gevinst 3.

Resultat giver følgende frekvenser for gevinsterne:
Frekvens for gevinst1: 56/500 = 0.112
Frekvens for gevinst1: 3/500 = 0.006
Frekvens for gevinst1: 0/500 = 0.000

T	*		Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
		A1		"Tivolibod – kast me(		
		A2				
		A3	x	SL(6)+SL(6)+SL(6)+SL(	31	
		A4				
		A5	gev1	gev1+(x>=19)*(x<=23)-	56	gev1
		A6	gev2	gev2+(x>=14)*(x<=18)-	3	gev2
		A7	gev3	gev3+(x>=9)*(x<=13)+(	0	gev3
		A8	nr	nr+1	500	spil



9) Undersøg ved nye simuleringer (startstil alle selvhenvisende navne til 0), om de ovenfor opnåede frekvenser giver et godt billede af gevinstmulighederne.

10) Udbyg modellen med frekvensberegningerne og afbild frekvenserne i stedet for hyppighederne.

I Viggos klasse inddeles klassens 24 elever i seks grupper med 4 elever i hver. I Viggos gruppe opdager man, at to af gruppens elever har fødselsdag i samme måned. Det viser sig, at også i to af de andre grupper findes der to deltagere med fødselsdag i samme måned. Er dette noget helt specielt, eller er det noget, som bør ske 'i følge tilfældighedens love'?

1) Undersøg, hvordan det forholder sig i jeres egen klasse. Lad fx de fire første elever i protokollen udgøre den første gruppe, de fire næste den anden gruppe, osv.

For at få nogle flere erfaringer, vil vi lave en simuleringsmodel til brug ved udforskningen af spørgsmålet. Som altid når vi laver matematiske modeller af virkeligheden, må vi forenkle tingene lidt.

Fx vil vi i modellen arbejde, som om året består af 12 lige lange måneder, og at fødslerne fordeler sig jævnt henover disse måneder. Man bør naturligvis overveje, i hvor høj grad en sådan forenkling kan være ødelæggende for det, vi ønsker at undersøge. Vil forenklingen væsentligt forøge eller formindske chancen for at få to fra samme måned?

I stedet for at spørge en person om hendes/hans fødselsmåned, vil vi tilfældigt vælge en måned, dvs. dens nummer. Så SLUMP(12) giver tilfældigt en måned ved dens nummer.

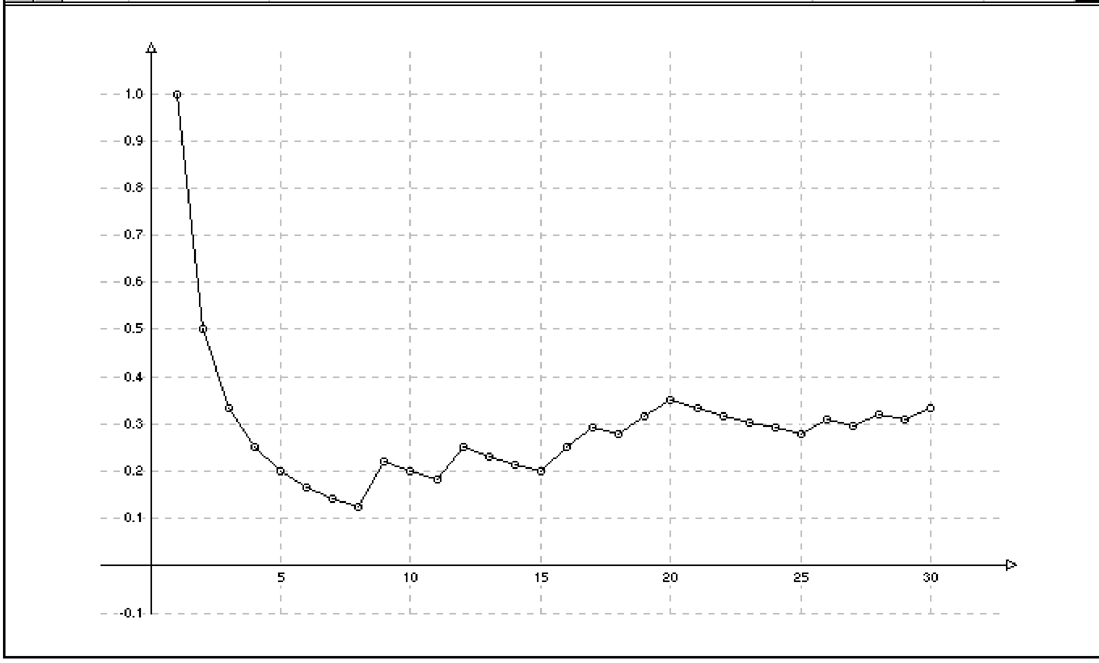
**2) Anbring udtrykket SLUMP(12) i hver af de 4 første linier i VisiRegn, og giv dem navnene p1, p2, p3 og p4 for hver af de 4 personer.
Notér om to af eleverne har fødselsdag i samme måned.
Foretag en ny simulering ved gennemregning af arket, og notér igen om to af eleverne har fødselsdag i samme måned.
Foretag i alt 30 simuleringer og giv på grundlag af disse et bud på, hvad chancen er (angiv frekvensen), for at der blandt 4 tilfældigt valgte personer findes to med fødselsdag i samme måned. Frekvens: ____________**

**3) Indhent eventuelt resultater fra andre, der også har udført simuleringerne, og giv på grundlag af det samlede materiale en ny vurdering af chancen for i en tilfældig gruppe på 4 elever at finde to med fødselsdag i samme måned.
Bud på frekvensen (den statistiske sandsynlighed): ______________**

4) Er det ud fra jeres resultater overraskende, at der i tre af de seks grupper i Viggos klasse var to elever med fødselsdag i samme måned? ________

5) Det er besværligt selv at skulle notere sammenfald af to måneder blandt de fire, og at skulle beregne frekvensen for, at dette indtræffer. Her er et forslag til, hvordan man med brug af udsagn og HVIS-SÅ-ELLERS konstruktion kan bygge videre på modellen, så man slipper for dette arbejde:

T	*		Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
		A6		"To med samme måned?		
		A7		p1=p2	0	s/f
		A8		p1=p3	0	s/f
		A9		p1=p4	0	s/f
		A10		p2=p3	0	s/f
		A11		p2=p4	1	s/f
		A12		p3=p4	0	s/f
		A13	ens	SUM(A7:A12)	1	ialt
		A14	hyp	HVIS ens=0 SÅ hyp ELLERS hyp+1	10	
T		A15	nr	nr+1	30	nr
T		A16	frekv	hyp/nr	0.333	



nr	frekv
1	1.000
2	0.500
3	0.333
4	0.250
5	0.200
6	0.167
7	0.143
8	0.125
9	0.222
10	0.200
11	0.182
12	0.250
13	0.231
14	0.214
15	0.200
16	0.250
17	0.294
18	0.278
19	0.316
20	0.350
21	0.333
22	0.318
23	0.304
24	0.292
25	0.280
26	0.308
27	0.296
28	0.321
29	0.310
30	0.333

Arkets 5 øverste linier, som ikke ses på dette billede, kan ses på næste side.

Uddybning af modellen:
I A7 vil udsagnet p1=p2 have værdien 1, hvis de to første måneder var ens, ellers vil det have værdien 0. Tilsvarende gælder for de 5 efterfølgende udsagn.

(a) Er der med dette taget højde for alle mulige sammenfald af fødselsmåneder blandt de 4 personer? ________
(b) Hvad er den største værdi, som navnet *ens* kan få? ______
og hvad gælder der så om de 4 udtagne måneder? ___________
(c) Hvad skal der gælde om *ens* , for at hyp bliver forøget med 1?____

T	*		Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
		A1		"4 personers fødselsmåned		
		A2	p1	SL(12)	4	mnd
		A3	p2	SL(12)	2	mnd
		A4	p3	SL(12)	7	mnd
		A5	p4	SL(12)	2	mnd

På billedet her, som viser arket øverste 5 linier, ses, hvorfor *p2=p4* på det første billede har værdien 1. Udsagnet er sandt, da der både ved *p2* og *p4* er udtaget februar måned.

6) Udvid modellen som vist ovenfor.
Startstil alle selvhenvisende navn til 0.
T-mærk navnene *nr* og *frekv* .
Tryk på funktionstasten F5 for at vælge xy-punkter.
Hold funktionstasten F9 nede for at udføre simuleringer og se på grafen, hvordan det går med frekvensen.
Efter hvor mange simuleringer kan frekvensen siges at have stabiliseret sig? __________
Hvad er frekvensen efter 700 simuleringer? ____________

Der er endnu mere fødselsdagsmystik i Viggos klasse. Det viser sig nemlig, at der blandt de 24 elever er to, der har fødselsdag ikke blot i samme måned, men også på samme dag. I klassen finder man det overraskende, der er jo 365 dage i året, og der er kun 24 elever i klassen. Da læreren fortæller dem, at der også i parallelklassen forekommer en 'dobbeltfødselsdag', stiger mystikken, og man finder, at det vil være en god ide at udforske problemet vha. simulering.

Forenkling af situationen: Alle år sættes til at have 365 dage (der ses altså bort fra skudår). Fødsler tænkes at fordele sig jævnt over de 365 dage.

Man skal altså tilfældigt tage dage ud blandt de 365 mulige.
Udtrykket SLUMP(365) kan således bruges til at simulere en fødselsdag, idet vi lader værdien 1 svare til 1. januar, og værdien 365 svare til 31. december, og værdien 33 svarer til den 33. dag i året altså 2. februar osv.
Man kan så lave følgende kode for fødselsdage i de forskellige måneder:

Januar	**hvis værdien er blandt**	**1-31**
Februar	**hvis værdier er blandt**	**32-59**
Marts	**hvis værdier er blandt**	**60-90**
April	**hvis værdier er blandt**	**91-120**
Maj	**hvis værdier er blandt**	**121-151**
Juni	**hvis værdier er blandt**	**152-181**
Juli	**hvis værdier er blandt**	**182-212**
August	**hvis værdier er blandt**	**213-243**
September	**hvis værdier er blandt**	**244-273**
Oktober	**hvis værdier er blandt**	**274-304**
November	**hvis værdier er blandt**	**305-334**
December	**hvis værdier er blandt**	**335-365**

1) Hvad nummer dag i året er din fødselsdag? __________

2) Lav et VisiRegn ark, der simulerer fødselsdagene for 24 elever (husk at bruge kopiering). Brug det til 50 simuleringer og notér ved hver simulering, om der er to med samme fødselsdag.
(Hyppighedspinde for fødselsdagene vil hurtigt afsløre, om der er to med samme fødselsdag).
(a) Hvor mange af de 50 simuleringer gav, at der blandt de 24 elever var mindst to med samme fødselsdag? ____ ud af 50
(b) Angiv den fundne frekvens for, at der blandt de 24 elever findes mindst to med samme fødselsdag: _________

3) Indhent eventuelt resultater fra andre der også har lavet simuleringerne, og giv på grundlag af det samlede materiale en vurdering af chancen for i en tilfældig klasse på 24 elever at finde mindst to med samme fødselsdag: ______________

4) Omform modellen til at undersøge hvad chancen er for, at der i en klasse med 30 elever findes mindst to med samme fødselsdag.
Hvilken frekvens finder du for at mindst to af de 30 elever har samme fødselsdag? ____________________

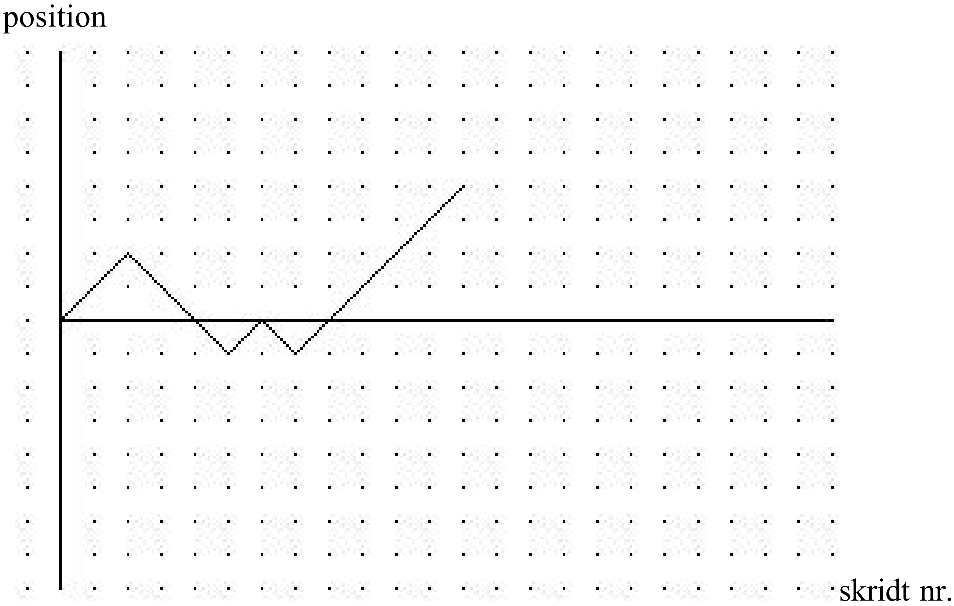
Historien:
En sørøverkaptajn med en særlig form for humor lader sine fanger 'gå planken ud' på en speciel måde ved hjælp af terningkast. Fangen starter midt på planken og med næsen ud mod havet (og hajerne). En terning kastes: Hvis terningen viser 1, 2 eller 3, går fangen et skridt frem (mod hajerne). Hvis terningen viser 4, 5 eller 6, går fangen et skridt baglæns (mod skibet). Der fortsættes med terningkast, indtil fangen er enten sikkert inde på skibet (og dermed benådet) eller er faldet i havet til hajerne.

Hajer	**3**	**2**	**1**	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**Skib**

1) **Find et sted hvor der kan afmærkes fx 7 felter som ovenfor, dvs. fangen har 3 skridt i hver retning. Den, der skal være fange, anbringer sig på det midterste felt (0) med næsen mod det, der skal være havet. Makkeren kaster en terning og dirigerer dermed fangens bevægelser. Prøv det. Bemærk, hvor mange kast, der skal til, før spillet er slut.**

2) **Hvis planken er for kort, er spillet hurtigt overstået. Hvis planken er for lang, varer spillet for længe. Hvad er den bedste længde for planken? Skal planken være fx 2 skridt i hver retning? Eller 7 skridt i hver retning? Eller 10 skridt i hver retning?**
Prøv spillet med forskellige plankelængder. Spillet må prøves flere gange med hver længde.
For hvert spil noteres, hvor mange terningkast, der blev brugt, og hvordan spillet endte (Brug skemaet).
Beslut ud fra de indsamlede data, hvilken længde I foretrækker til spillet.

3) **Graf for et spil.**
Spil 'Gå planken ud' med jeres foretrukne længde, og afbild spillets forløb med en graf, hvor der ud af den vandrette akse vises skridtnummer, og lodret vises for hvert skridtnummer, hvor på planken man nu befinder sig. Grafen kan se sådan ud:



4. Simulering af spillet ved hjælp af VisiRegn. De to første linier kan se sådan ud:

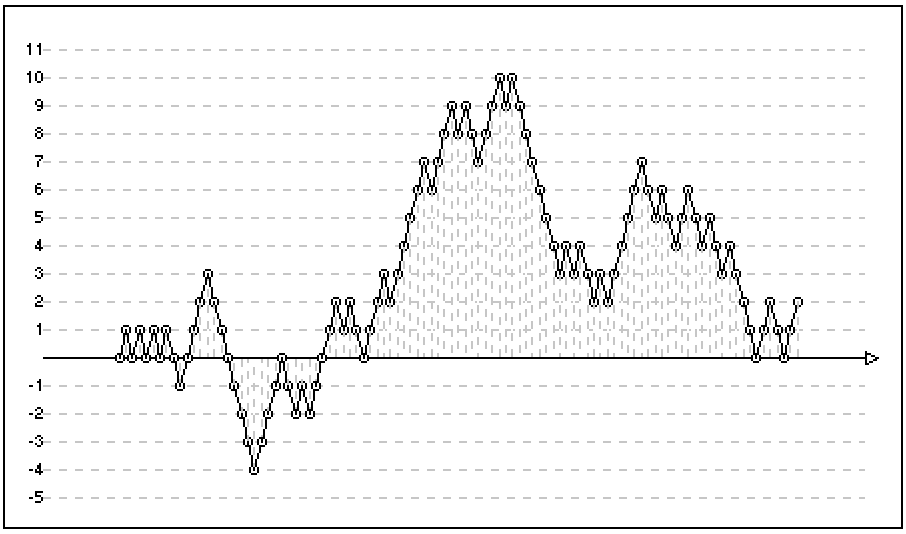
	Navn	Udtryk	Værdi	Enhed
A1	start	0	0	
A2	pos1	HVIS SL(6)<4 SÅ start+1 ELLERS start-1	-1	

I linie A1 sættes nummeret på det plankefelt, hvor personen starter. Det har her nummeret 0. I A2 findes personens næste position (*pos1*) ved at terningen kastes, og hvis den viser 1, 2 eller 3 (dvs. er mindre end 4), så skal der lægges en til (dvs. gå et skridt frem mod hajen). I modsat fald, altså hvis terningen viser 4, 5 eller 6 (dvs. at udsagnet SL(6)<4 er falsk), så skal der trækkes 1 fra (dvs. gå et skridt baglæns mod skibet). Vi kan ikke her se nøjagtig, hvad terningen viste, men vi kan i eksemplet ovenfor se, at da *pos1* er –1, så må terningen have 4, 5 eller 6.

I de følgende linier skal positionerne pos2, pos3, osv. findes, så kopier navnet pos1 nedad til pos100.

Næste position (*pos2*) findes ved, at terningen kastes på ny, og man skal igen bevæge sig 1 frem eller 1 tilbage, alt efter hvad terningen viser. Så *pos2* skal have samme udtryk som *pos1*, bortset fra at man nu ikke bevæger sig fra værdien for *start* men fra værdien for *pos1*. Men når man kopierer udtrykket for *pos1* til *pos2*, vil der automatisk blive taget vare på dette. Kopiér udtrykket for *pos1* til resten af arket til *pos2:pos100.*

Et overblik over spillets forløb fås nemmest ved at afmærke området *start:pos100* og vælge *Grafik/Fra ark/Datakurve.* Eksempel:



Her kan man se, at der startes med at gå 1 skridt frem, så 1 skridt baglæns, dernæst 1 skridt frem, osv. Det ses, at hvis planken har 3 skridt i hver retning, så sluttes der i eksemplet sikkert på skibet ved efter 20 skridt (*pos20* har værdien –4).

Hvornår sluttes der i eksemplet ovenfor, hvis planken har 4 skridt i hver retning? ___________ og hvor ender man: __________________

En ny simulering af spillet fås ved at klikke på *Gennemregn* knappen og resultatet ses umiddelbart på datakurven.

Brug skemaet nedenfor til at indsamle data om spillet.

Spil nr.	Plankens antal skridt i hver retning	Antal skridt før spillet endte	Resultat: haj eller skib
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Fallit eller fordobling

En spiller har 5 kr. og vil med disse deltage i et spil, hvor der kastes en mønt. Hvis mønten viser krone, vinder spilleren 1 kr., og hvis den viser plat, taber spilleren 1 kr. Spilleren beslutter sig for at spille indtil de 5 kr.
enten er tabt eller blevet fordoblet til 10 kr.

1) Udform i VisiRegn en model, der simulerer spillet.

2) Udfør spillet 50 gange, notér hvert resultat og find frekvensen for at spillet ender med en fordobling: ____/50 =__________